Ροπές

- Ορισμοί κ' ιδιότητες
- Παραδείγματα υπολογισμών
- Βέλτιστη Επιλογή

Υπενθύμιση: Δ24 Δ25 Δ26

1. Είδαμε (σε κάποιες περιπτώσεις) το πώς είναι δυνατόν να ολοκληρώνουμε συναρτήσεις ως προς κατανομές πιθανότητας.

2. Παρατηρήσαμε ότι οι σχετικοί υπολογισμοί γίνονται πιο περίπλοκοι, όσο πιο περίπλοκη γίνεται η κατανομή ως προς την οποία ολοκληρώνουμε (και όσο πιο περίπλοκη γίνεται κι η συνάρτηση ως προς την οποία ολοκληρώνουμε)

3. Παρατηρήσαμε όμως ότι αν γνωρίζουμε το πώς ολοκληρώνεται κάθε δυνατή συνάρτηση ως προς την $\mathbb{P}$, αυτό ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ (αυτό ισχύει επειδή το να γνωρίζουμε την παραπάνω λίστα ολοκληρωμάτων συνεπάγεται το εξής: Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε η δείκτρια συνάρτηση του A, $1_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$, έχει $E(1_A) = \mathbb{P}(A)$ - σύμβαση! Επομένως η $\mathbb{P}(A)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ βρίσκεται στην παραπάνω λίστα)

4. Το 3. μας λέει ότι η $\mathbb{E}(g)$ για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη g μας δίνει κάποια πληροφορία για κάποιες της $\mathbb{P}$.

5. Γνωρίζουμε ότι "πολλές" g που μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς δεδομένη κατανομή $\mathbb{P}$ προσεγγίζονται (π.χ. μέσω αναπτυγμάτων Taylor) από πολυώνυμα.

Οπότε προκύπτει το ερώτημα:

Αναρωτιόμαστε για την $\mathbb{P}$ όταν ολοκληρώνουμε ως προς αυτή πολυωνυμικές συναρτήσεις της μορφής $g(z)=z^k$, για $k=0,1,2,\dots$;
(ή $g(z)=|z|^k$)

Ορισμός: Έστω $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, και $X\sim\mathbb{P}$ (τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $\mathbb{P}$). Για $k=0,1,2,\dots$

Ροπή k-τάξης της $\mathbb{P}$ ονομάζεται το ολοκλήρωμα της $g(z)=z^k$ ως προς την $\mathbb{P}$, δηλ.

$$\mathbb{E}(X^k)=\begin{cases}\sum\limits_{i\in supp} i^k\, \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} z^k f(z)\,dz, & \text{η } \mathbb{P} \text{ έχει την } f \text{ ως συνάρτηση πυκνότητας}\end{cases}$$

Απόλυτη ροπή k-τάξης ονομάζεται το ολοκλήρωμα της $g(z)=|z|^k$ ως προς την $\mathbb{P}$, δηλ.

$$\mathbb{E}(|X|^k)=\begin{cases}\sum\limits_{i\in supp} |i|^k\, \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |z|^k f(z)\,dz, & \text{η } \mathbb{P} \text{ έχει την } f \text{ ως συνάρτηση πυκνότητας.}\end{cases}$$

Σχόλια:

→ Ανισότητα Markov

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι οι ροπές είναι δυνατόν να μας δίνουν πληροφορία για το πώς η $\mathbb{P}$ αποδίδει πιθανότητες. Σε κάποιες περιπτώσεις (όχι πάντα) το να γνωρίζουμε τις ροπές ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ (δεν προλαβαίνουμε να το δούμε)
* Ισχύουν για τα παραπάνω τα γενικά σχόλια που έχουμε κάνει (περί ύπαρξης, κ.ο.κ.) για την ολοκλήρωση.

* Για $k=0$, $2^0 = |2|^0 = 1$, οπότε $\mathbb{E}(X^0) = \mathbb{E}(|X|^0) = 1$ για κάθε $\mathbb{P}$.

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(X^k) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$.
Επίσης ότι αν $\mathbb{E}(X^k) \in \mathbb{R}$ τότε $\mathbb{E}(X^\ell) \in \mathbb{R}$ για κάθε $0 \leq \ell \leq k$.
Αντίστοιχως αν η $\mathbb{E}(X^k)$ δεν υπάρχει τότε δεν υπάρχει η $\mathbb{E}(X^\ell)$, $\forall\, \ell \geq k$.

* Γνωρίζετε από το μάθημα της Στατιστικής I την έννοια της ροπής k-τάξης περί του μέσο (όταν $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$), της διακύμανσης, κ.ο.κ. που βασίζεται στα παραπάνω.
Θυμηθείτε π.χ. η ροπή k-τάξης περί του μέσο είναι η $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^k$

Παραδείγματα [Υπολογισμού Ροπών]

1. $\mathbb{P}=$ Εκφυλισμένη κατανομή στο 0

- $supp = \{0\}$
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Επειδή το στήριγμα αποτελείται μόνο από ένα αρνητικό αριθμό θα έχουμε ότι $\forall k=0,1,\dots$ $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(|X|^k)$

$$\mathbb{E}(X^k) = 0^k = \begin{cases} 0^0, & k=0 \\ 0^k, & k>0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$$

π.χ. Ο μέσος της $\mathbb{P}$ είναι ο $\mathbb{E}(X)=0$

Η διακύμανση της $\mathbb{P}$ είναι $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$
$= 0 - 0^2 = 0$.

(Εδώ οι υπολογισμοί είναι απλοί).

2. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $q \in (0,1)$ (Bernoulli με παράμετρο q)

– $supp = \{0,1\}$

– $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-q$, $\mathbb{P}(\{1\}) = q$

Επειδή το στήριγμα δεν έχει αρνητικά στοιχεία ούτε εδώ υπάρχει διάκριση μεταξύ ροπής κ τάξης κ' απόλυτης ροπής κ-τάξης (*)

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{i \in \{0,1\}} i^k P(\{i\}) = 0^k \mathbb{P}(\{0\}) + 1^k \mathbb{P}(\{1\})$$

$$= 0^k(1-q) + 1 \cdot q =$$

$$= \begin{cases} 0^0(1-q) + 1 \cdot q, & k=0 \\ 1 \cdot q, & k>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & k=0 \\ q, & k>0. \end{cases}$$

Π.χ. Ο μέσος της $\mathbb{P}$, είναι $\mathbb{E}(X) = q$

Η διακύμανση της $\mathbb{P}$ είναι $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$= q - q^2 = q(1-q).$$

(Και εδώ οι υπολογισμοί είναι απλοί).

4. $\mathbb{P} = Poiss(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Poisson με παράμετρο λ).

– $supp = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

– $\mathbb{P}(\{i\}) = e^{-\lambda} \lambda^i / i!$, $i \in \mathbb{N}$

Και εδώ ισχύει το (*). Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η $\mathbb{E}(X^k)$ υπάρχει $\forall k = 0,1,\dots$. Ενδεικτικά έχουμε:

Για $k=1$ (μέσος της κατανομής) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i \mathbb{P}(\{i\}) =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\left(\frac{0\cdot\lambda^0}{0!} + \frac{1\cdot\lambda^1}{1!} + \frac{2\cdot\lambda^2}{2!} + \dots \right)$$

ανεξάρτητο του i, κοινός παράγοντας

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} =$$

Υπενθύμιση: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ Ανάπτυγμα McLaurin της εκθετικής συνάρτησης

Έχουμε στο παρονομαστή τους όρους $i/i!$, $i \geq 1$: $\frac{i}{i!} = \frac{i}{(i-1)!\,i} = \frac{1}{(i-1)!}$

$\lambda^i = \lambda \cdot \lambda^{i-1}$, $i \geq 1$

$$\underset{\text{κοινός παράγοντας το } \lambda}{=} e^{-\lambda}\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{i-1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \underset{j=i-1}{=}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} =$$

Ανάπτυγμα McLaurin της e^x για $x=\lambda$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^{-\lambda+\lambda} = \lambda e^0 = \lambda.$$

Συνεπώς ο μέσος της Poiss(λ) είναι το λ (εδώ παίρνουμε για μια φορά μόνο του πόσο υπολογιστικά περίπλοκες μπορούν να είναι οι ολοκληρώσεις που οδηγούν στις ροπές)

6. $\mathbb{P} = \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$ (Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ)

- $\text{supp} = [0, +\infty)$
- $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

Ισχύει το (*). Εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε σχετικά εύκολα την $\mathbb{E}(X^k)$ για κάθε $k=0,1,\dots$. Έχουμε ότι $\mathbb{E}(X^0)=1$.

Για $k\geq 1$ έχουμε

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^k f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{0} z^k\cdot 0\,dz + \int_0^{+\infty} z^k \lambda e^{-\lambda z}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dz + \int_0^{+\infty} z^k \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \int_0^{+\infty} z^k \lambda e^{-\lambda z}\,dz =$$

ισούται με μηδέν επειδή πρόκειται για ορισμένο ολοκλήρωμα

αν είχε κ' το θα ήταν το $(e^{-\lambda z})'$

$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$ Παραγοντική ολοκλήρωση

$(e^{-\lambda z})' = -\lambda e^{-\lambda z}$

$$= -\int_0^{+\infty} z^k \left(-\lambda e^{-\lambda z}\right) dz = -\int_0^{+\infty} \underset{f}{z^k}\, \underset{g}{\left(e^{-\lambda z}\right)'}\,dz =$$

$$= -\left[z^k\cdot e^{-\lambda z}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (z^k)'\, e^{-\lambda z}\,dz \right]$$

$k>0$ $\quad z^k e^{-\lambda z}\Big|_{z=0} = 0$

$(z^k)' = k z^{k-1}$

$\lim_{z\to+\infty} z^k e^{-\lambda z} = 0$

$$= -\left[- \int_0^{+\infty} k z^{k-1} e^{-\lambda z} dz \right] = k \int_0^{+\infty} z^{k-1} e^{-\lambda z} dz$$

$$= \frac{k}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} z^{k-1} \lambda e^{-\lambda z} dz}_{\mathbb{E}(X^{k-1})} = \frac{k}{\lambda} \mathbb{E}(X^{k-1})$$

Οπότε ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X^0) = 1, & k = 0 \\ \mathbb{E}(X^k) = \frac{k}{\lambda} \mathbb{E}(X^{k-1}), & k \geq 1 \end{cases}$$

Οι ροπές διαφορετικής τάξης συνδέονται αναδρομικά!

Το παραπάνω αποτελεί σημαντικό χαρακτηριστικό της $Exp(\lambda)$, αλλά επίσης μας βοηθάει να υπολογίσουμε τις ροπές χρησιμοποιώντας αυτή την αναδρομική σχέση. Οπότε έχουμε:

$k=0 \quad \mathbb{E}(X^0) = 1$ ✓

$k=1 \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X^0) = \frac{1}{\lambda}$

$k=2 \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1 \cdot 2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

$k=3 \quad \mathbb{E}(X^3) = \frac{3}{\lambda} \mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{\lambda} \cdot \frac{1 \cdot 2}{\lambda^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$

$\vdots$

Γενικά θα έχουμε ότι $\mathbb{E}(X^k) = \dfrac{k!}{\lambda^k}$

Έτσι π.χ. ο μέσος της $Exp(\lambda)$, είναι το $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

ενώ η διασπορά της $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

8. Τυπική κατανομή Cauchy (Standard Cauchy distribution)

- $supp = \mathbb{R}$
- έχει ως συνάρτηση πυκνότητας την $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1$ ενώ $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ οπότε η f καλώς ορισμένη. (άσκηση! χρησιμοποιήστε την τοξεφ)

Για την κατανομή αυτή ισχύει ότι $\mathbb{E}(X^k)$ υπάρχει μόνο για $k=0$, δηλ. δεν υπάρχει ούτε ο μέσος αυτής. Έχουμε:

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\, f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}\,dz =$$

$$|z| = \begin{cases} -z, & z<0 \\ z, & z \geq 0 \end{cases}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} (-z)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}\,dz}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} z\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}\,dz}_{B}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} (-z)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+z^2}\,dz \underset{\substack{dp=-dz \\ \Leftrightarrow -dp=dz}}{\overset{p=-z}{=}} \int_{+\infty}^{0} p\,\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(-p)^2}\,(-dp) =$$

$$= -\int_{+\infty}^{0} p\cdot\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+p^2}\,dp = \int_{0}^{+\infty} p\cdot\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+p^2}\,dp = B$$

Οπότε $A+B = 2B = 2\int_{0}^{+\infty} z\cdot\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} 2z\,\frac{1}{1+z^2}\,dz$

Θέτουμε $u = 1+z^2$

$du = 2z\,dz$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln u\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\lim_{u\to+\infty}\ln u - \ln 1\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}(+\infty - 0) = +\infty$$

Δηλ. η απόλυτη ροπή $1^{ης}$ τάξης δεν υπάρχει. Οπότε δεν υπάρχει ούτε ο μέσος της κατανομής ($E(X)$). Οπότε δεν υπάρχει ούτε η $E(X^k)$ για κάθε $k \geq 1$. Δηλ. η μόνη ροπή που υπάρχει είναι η ροπή μηδενικής τάξης.

Περαιτέρω Υπολογισμοί:

$(\mathrm{Bin}(n,q))$

3. Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n\in\mathbb{N}^*, q\in(0,1)$

- $\mathrm{supp} = \{0,1,2,\dots,n\}$
- $\mathbb{P}(\{i\}) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}, \quad i\in \mathrm{supp}$

$\left[\binom{n}{i} := \dfrac{n!}{i!(n-i)!} \text{ ορισμός}\right]$

* Το supp πεπερασμένο $\Rightarrow \mathbb{E}(X^k)\in\mathbb{R}, \ \forall k=0,1,\dots$

* Το supp μη αρνητικό $\Rightarrow \mathbb{E}(X^k)=\mathbb{E}(|X|^k), \ \forall k=0,1,\dots$

* Οι υπολογισμοί δεν είναι απλοί:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in\{0,1,\dots,n\}} i\,\mathbb{P}(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$$

$$= \underbrace{0\binom{n}{0}q^0(1-q)^{n-0}}_{0} + 1\cdot\binom{n}{1}q^1(1-q)^{n-1} + \dots + n\binom{n}{n}q^n(1-q)^0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}q^i(1-q)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{n!}{i!(n-i)!}\,q^i(1-q)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\,q^i(1-q)^{n-i} \quad (*)$$

$$\frac{i}{i!} = \frac{\cancel{i}}{1\cdot 2\cdots(i-1)\cdot\cancel{i}} = \frac{1}{(i-1)!}$$

Για τον υπολογισμό του (*) θα προσπαθήσουμε (ξανά) να χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\left(a,b\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{N},\ (a+b)^{\mu} = \sum_{j=0}^{\mu} \binom{\mu}{j} a^{j} b^{\mu-j} \right)$$

- Δεν είναι άμεσοι εμφανές το πώς αλλά παρατηρούμε:

- $n! = n\cdot(n-1)!$
- $q^{i} = q\cdot q^{i-1}$
- $n-i = n\pm1-i = (n-1)-(i-1)$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i-1=0}^{n-1}$

Επομένως

$$* = \sum_{i-1=0}^{n-1} \frac{n\,(n-1)!}{(i-1)!\,((n-1)-(i-1))!}\, q\, q^{i-1} (1-q)^{(n-1)-(i-1)}$$

$$\underset{j=i-1}{\overset{\mu:=n-1}{=\!=}} \sum_{j=0}^{\mu} nq \frac{\mu!}{j!\,(\mu-j)!} q^{j} (1-q)^{\mu-j} =$$

Αντικαταστάσεις παρεμφερείς με αυτές στα θεωρήματα

ανεξάρτητο του j - κοινός παράγοντας εκτός του Σ

$$nq \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{j} (1-q)^{n-j} = nq\,[q+1-q]^{n}$$

$$= n \cdot q \cdot 1 = nq$$

↳ εφαρμόσιμο το διωνυμικό ανάπτ. για $a=q$, $b=1-q$

(I)

* Ο μέσος της $Bin(n,q)$ είναι ο $n \cdot q$
[$Bin(1,q) = Ber(q)$ που έχει μέσο q]

* μέσω του (I) έχουμε ότι $\mathbb{E}(X^1) = n \cdot q \cdot 1$

$$= n \cdot q\, \mathbb{E}(X^0)$$

Επομένως η ροπή πρώτης τάξης συνδέεται αναδρομικά με την αμέσως προηγούμενη.

Άσκηση: να ... η $\mathbb{E}(X^2)$ κ' η διακύμανση της $Bin(n,q)$
(Ακολουθήστε παρεμφερείς συλλογισμούς και βρείτε τις αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις)

κ' εδώ οι υπολογισμοί δεν είναι περιορισμένοι

7. Τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$

$-$ $\text{supp} = \mathbb{R}$

$-$ $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι για την $N(0,1)$, $\mathbb{E}(X^k) \in \mathbb{R} \ \forall \ k = 0, 1, 2, \dots$

* Επειδή το supp περιλαμβάνει κ' την αρνητική ημιευθεία είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(X^k) \neq \mathbb{E}(|X|^k)$ όταν $k = 1, 3, 5, \dots$

* Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα $\mathbb{E}(X)$ κ' $\mathbb{E}(|X|)$ για την εν λόγω κατανομή:

$-$ Θα μας είναι χρήσιμη η παρακάτω εξίσωση:

$$I := \int_0^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz \quad u = -\frac{z^2}{2} \quad = \int_0^{-\infty} e^u(-du)$$

e^u, $-du$

$du = -z dz$

$\Leftrightarrow -du = z dz$

Στοιχεία της αντικατάστασης

$z = 0 \Rightarrow u = -\frac{0^2}{2} = 0$

$z \to +\infty \Rightarrow u = -\frac{z^2}{2} \to -\infty$

$$= (-1)\int_0^{-\infty} e^u du = \int_{-\infty}^{0} e^u du =$$

$$= e^u \Big|_{-\infty}^{0} = \left[e^0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \right] = 1$$

Επομένως έχουμε ότι $I = 1$.

Προχωρούμε στην εξαγωγή της ασύμπτωτης ροπής πρώτης τάξης για την $N(0,1)$.

$$\mathbb{E}(|X|) \overset{\int_{-\infty}^{+\infty} |z|\varphi(z)dz}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} -z e^{-z^2/2} dz}_{I^*} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz}_{I} \Big]$$

$$|z| = \begin{cases} -z, & z < 0 \\ z, & z \geq 0 \end{cases}$$

$$I^* = \int_{-\infty}^{0} -z e^{-z^2/2} dz = \int_{+\infty}^{0} p e^{-p^2/2} (-dp) =$$

$p = -z$

$-dp = dz$

$p^2 = z^2$

$z = 0 \Rightarrow p = 0$

$z \to -\infty \Rightarrow p \to +\infty$

$$= \int_{0}^{+\infty} p e^{-p^2/2} dp = I$$

$$\boxed{I = 1}$$

Επομένως $\mathbb{E}(|X|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [2I] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Άρα τέλος για την ροπή 1ης τάξης (μέσος) της $N(0,1)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{0} z e^{-z^2/2}\,dz}_{=-I^*} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} z e^{-z^2/2}\,dz}_{=I}\Big]$$

Αλλά από προηγουμένως έχουμε ότι $I^* = I \Rightarrow -I^* = -I$,

Άρα επομένως: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-I+I\right] = 0$

(όπως αναμενόταν!)

Άσκηση: Για την $\mathbb{P} = N(0,1)$ να βρεθούν οι $\mathbb{E}(X^2)$, $Var(X)$, $\mathbb{E}(X^3)$ κ' $\mathbb{E}(X^4)$.

Απλή Εφαρμογή στην Οικονομική Θεωρία:

Έστω το εξής πρόβλημα βέλτιστης επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας: Επενδυτής έχει στην διάθεση του προς επιλογή έναν από τους εξής τρεις χρηματοοικονομικούς τίτλους [καθένας από αυτούς αγοράζεται στο παρόν κ αποδίδει αβέβαια απόδοση στην επόμενη χρονική περίοδο]

X που αποδίδει $\begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } 1/2 \\ 1 & \text{με πιθ. } 1/2 \end{cases}$

Y που αποδίδει $\begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } 2/3 \\ 1 & \text{με πιθ. } 1/3 \end{cases}$

Z που αποδίδει $\begin{cases} -1 & \text{με πιθ. } 1/2 \\ 10 & \text{με πιθ. } 1/2 \end{cases}$

* Οι X, Y, Z είναι τυχαίες μεταβλητές.
Έχουμε ότι $X \sim Ber(1/2)$, $Y \sim Ber(1/3)$, ενώ η Z ακολουθεί κατανομή με $supp = \{-1, 10\}$ κ' $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1/2 = \mathbb{P}(\{10\})$.

* Επομένως το παράδειγμα μας δείχνει το πως οι κατανομές π.π. επί του $\mathbb{R}$ είναι δυνατόν να χρησιμοποιούνται προκειμένου να περιγράφουν την αβεβαιότητα ως προς οικονομικά φαινόμενα.

* Ο επενδυτής καλείται επί της ουσίας να επιλέξει βέλτιστα του έναν από τους τρείς, βάσει των προτιμήσεων που έχει για την αβεβαιότητα των στοχαστικών αποδόσεων: Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής αποστρέφεται με τέτοιο τρόπο την αβεβαιότητα ώστε επιλέγει εκείνο του τύπου του οποίου η αναμενό-

μέση απόδοση (μέσος-ροπή 1ης τάξης) είναι μεγαλύτερη ή ίση του $1/2$ κ' την μικρότερη δυνατή διακύμανση (είναι δυνατόν να υπάρχουν συναρτήσεις ωφέλειας που θα οδηγούσαν σε τέτοιου είδους επιλογή)

* Για να ελέγξουμε τι θα επιλέξει τελικά θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ροπές για την κατανομή του κάθε τύπου:

- $X \sim Ber(1/2)$, $\mathbb{E}(X) = 1/2$, $Var(X) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
- $Y \sim Ber(1/3)$, $\mathbb{E}(Y) = 1/3$, $Var(Y) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
- για την Z έχουμε:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i \in \{-1,10\}} i\, \mathbb{P}(\{i\}) = (-1)\tfrac{1}{2} + 10 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{i \in \{-1,10\}} i^2\, \mathbb{P}(\{i\}) = (-1)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 10^2 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$= \frac{101}{2} = 50.5$

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 50.5 - (4.5)^2$$
$$= 50.5 - 20.25 = 30.25$$

* Βάση των προτιμήσεων του επενδυτή:
  - ο Y απορρίπτεται αφού $\mathbb{E}(Y) = 1/3 < 1/2$
  - μεταξύ των X, Z [$\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Z) \geq 1/2$]

  επιλέγεται ο X αφού $Var(X) < Var(Z)$

  * Ο εν λόγω αποστρέφεται τόσο πολύ την αβεβαιότητα που είναι διατεθειμένος να ανέχεται αρκετά μικρότερη αναμενόμενη απόδοση για να αποφύγει την μεγάλη διακύμανση. [Προφανώς είναι δυνατόν να υπάρχουν διαφορετικές προτιμήσεις που θα οδηγούσαν σε τελείως διαφορετική επιλογή - τέτοιες έννοιες θα μελετηθούν στην οικονομική θεωρία]

* Βλέπουμε το πώς οι ροπές μπορεί να είναι χρήσιμες σε προβλήματα βέλτιστης επιλογής.