Διαλέξεις 15-16

Παραδείγματα για διακριτών κατανομών πιθανότητας

Υπενθύμιση 1:

Δεδομένου του ορισμού της αθροιστικής συνάρτησης ασχοληθήκαμε με το θεώρημα χαρακτηρισμού:

$\boxed{\text{Αν } \mathbb{P} \text{ κατανομή πιθανότητας στο } \mathbb{R} \text{ και } F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ η αθροιστική της τότε: α. η } F \text{ αύξουσα; β. } \lim_{x\to+\infty} F(x)=1,\ \lim_{x\to-\infty} F(x)=0; \text{ γ. η } F \text{ από δεξιά συνεχής. Αντίστροφα, αν η } F:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ ικανοποιεί τις α,β,γ τότε υπάρχει μοναδική } \mathbb{P} \text{ της οποίας η } F \text{ αθροιστική.}}$

⇓

η F αναπαριστά τέλεια την $\mathbb{P}$

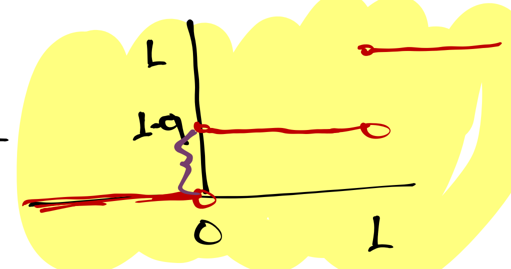
α. αν γνωρίζουμε την F μπορούμε να βρούμε το $\mathbb{P}(A), \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

β. οι ιδιότητες της $\mathbb{P}$ αντανακλώνται στην F (π.χ. $\mathbb{P}(\{x\})>0 \Leftrightarrow$ η F ασυνεχής στο x (θηλιακή ασυνέχεια))

[redacted]

Υπενθύμιση: Ασχοληθήκαμε με το πως είναι δυνατόν να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$ χρησιμοποιώντας την F. Έτσι ξεκινήσαμε να εκφράζουμε το $\mathbb{P}(A)$ ως προς την F για διάφορα A μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Π.χ., αν $A=\{\alpha\}$, είδαμε ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$ κ' ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\})>0$ ανν η F ασυνεχής στο α, ενώ η $\mathbb{P}(\{\alpha\})$ ταυτίζεται με το "μέγεθος του άλματος" του γραφήματος της F στο α (όταν έχουμε συνέχεια στο α αυτό είναι 0).

Π.χ. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$



i. $\mathbb{P}(\{0\}) = F(0) - \lim_{y\to 0^-} F(y)$
$= 1-q - \lim_{y\to 0^-} 0 = 1-q$

ii. $\mathbb{P}(\{1/2\}) = F(1/2) - \lim_{y\to 1/2^-} F(y) = 1-q - \lim_{y\to 1/2^-}(1-q) = 1-q-(1-q) = 0$

iii. $\mathbb{P}(\{1\}) = F(1) - \lim_{y\to 1^-} F(y) = 1 - \lim_{y\to 1^-}(1-q) = 1-1+q = q$

Επιστρέφουμε στην γενική περίπτωση: Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

− $A = (\alpha,\beta]$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha,\beta]) = (*)$

$(\alpha,\beta] = (-\infty,\beta] \overset{\supseteq}{-} (-\infty,\alpha]$ {οι πραγματικοί $\le \beta$ εξαιρούμε αυτούς που είναι $\le \alpha$

$(*) = \mathbb{P}\left((-\infty,\beta] \underset{\supseteq}{-} (-\infty,\alpha]\right) = \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha]) =$

$(A\supseteq B,\ \mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B))$

$= F(b) - F(a) = \mathbb{P}((a,b])$ ΘΘλ ;;;

(* ο τύπος αυτός θυμίζει το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Ίσως αυτό να σας πληροφορεί για κάποια σχέση που φτιάχνει να έχει η $\mathbb{P}$ με διαδικασίες ολοκλήρωσης – θα το δούμε αργότερα)

– $A = (a,b)$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((a,b)) = (*)$

$(a,b) = (-\infty,b) - (-\infty,a]$ {οι πραγματικοί $<b$ εξαιρουμένων αυτών που είναι $\leq a$

$(*) = \mathbb{P}((-\infty,b) - (-\infty,a]) = \mathbb{P}((-\infty,b)) - \mathbb{P}((-\infty,a])$

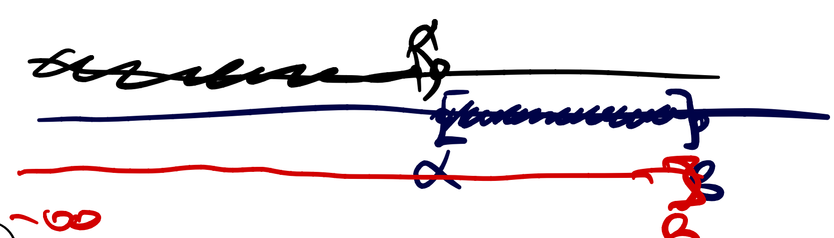
$= \lim_{y \to b^-} F(y) - F(a)$

– $A = [a,b)$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([a,b)) = (*)$

$\ast$ $[a,b) = (-\infty,b) - (-\infty,a)$, με $a \leq x < b$, $x < b$, $x < a$ {οι πραγματικοί $<b$ εξαιρουμένων αυτών που είναι $<a$

$(*) = \mathbb{P}((-\infty,b) - (-\infty,a)) = \mathbb{P}((-\infty,b)) - \mathbb{P}((-\infty,a))$

$= \lim_{y \to b^-} F(y) - \lim_{y \to a^-} F(y)$



– $A = [a,b]$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([a,b]) = (*)$

$[a,b] = (-\infty,b] - (-\infty,a)$, με $a \leq x \leq b$, $x \leq b$, $x < a$ {οι πραγματικοί $\leq b$ εξαιρουμένων αυτών που είναι $<a$

$(*) = \mathbb{P}((-\infty,b] - (-\infty,a)) = \mathbb{P}((-\infty,b]) - \mathbb{P}((-\infty,a))$

$= F(b) - \lim_{y \to a^-} F(y)$

Τέλος Διάλεξης 15

Παρατήρηση: Αν $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = 0 \Leftrightarrow$ η F συνεχής στα a και b τότε
$\mathbb{P}((a,b)) = \mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}((a,b]) = \mathbb{P}([a,b)) = F(b) - F(a)$

Συνεπώς τα παραπάνω μας λένε το πώς μπορούμε να εκφράζουμε μέσω της αθροιστικής την πιθανότητα που αποδίδει η κατανομή σε όποιο διάστημα έχει περιγραφεί αυτή.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τα χθεσινά είναι δυνατόν να εκφράζουμε ως προς την F την πιθανότητα που αποδίδεται από την $\mathbb{P}$ και σε πιο "περίπλοκα" A.

Π.χ. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\mathbb{P}((\alpha, \beta] \cup \{\gamma\}) = (*)$

Επειδή $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \{\gamma\} \cap (\alpha, \beta] = \emptyset$

οπότε εξαιτίας της προσθετικότητας $(*) = \mathbb{P}((\alpha,\beta]) + \mathbb{P}(\{\gamma\})$

$$= F(\beta) - F(\alpha) + F(\gamma) - \lim_{y \to \gamma^-} F(y)$$

Οπότε αν γνωρίζουμε την F μπορούμε να βρούμε το $\mathbb{P}(A)$ όποιο κ' αν είναι το A!

Στην συνέχεια θα δούμε περαιτέρω παραδείγματα κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Σε αυτά θα περιγράφουμε την $\mathbb{P}$ χρησιμοποιώντας την αθροιστική της. (Δηλ. στα παραδείγματα θα δίνουμε την F. Θα ελέγχουμε αν αυτή είναι καλώς ορισμένη αθροιστική, δηλαδή το αν ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Εφόσον ισχύει αυτό βάσει του θεωρήματος χαρακτηρισμού θα είμαστε βέβαιοι ότι η F αναπαριστά μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$

που θα είναι και η κατανομή που θέλουμε να περιγρά-φουμε.) (στα παρακάτω παραδείγματα θα έχουμε υπογραμμίσει το supp)

Σημείωση: Μεθοδολογία Εξέτασης Παραδειγμάτων

Εξετάζουμε παραδείγματα κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ μέσω των αθροιστικών τους. Σε κάθε παράδειγμα δίνεται η αθροιστική (και χωρίς να είναι απαραίτητο και το supp), ελέγχεται το αν αυτή ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες (οπότε κ' είναι πράγματι η αθροιστική μοναδικής κατανομής), και στην συνέχεια εξετάζονται ιδιότητες της κατανομής μέσω της αθροιστικής.

Δηλ.

1. Δίνεται η F
2. Εξετάζεται το αν η F είναι καλώς ορισμένη (δηλ. ικανοποιεί τις α,β,γ)
3. Εφόσον είναι, το θεώρημα χαρακτηρισμού $\Rightarrow$ ότι η F αναπαριστά μοναδική $\mathbb{P}$
4. Βρίσκουμε μέσω της F ιδιότητες της $\mathbb{P}$ κ' (συνήθως ενδεικτικοί) πιθανότητες που η $\mathbb{P}$ αποδίδει

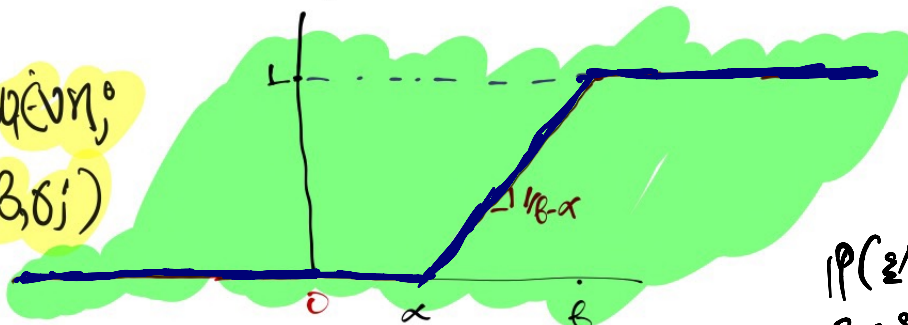
Παράδειγμα 5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$

($\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$) (Uniform Distribution – $\mathrm{Unif}[\alpha,\beta]$)

Έχουμε ότι − $\mathrm{supp} = [\alpha,\beta]$ (δηλ. είναι συνεχής κατανομή)

$$- F(x) = \begin{cases} 0 &, x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} &, \alpha \le x < \beta \\ 1 &, \beta \le x \end{cases}$$

Είναι καλώς ορισμένη;
(δηλ. ικανοποιεί τις α,β,γ;)



$\mathbb{P}(\{1/2\}) = 0$
επειδή η F παντού συνεχής
⇒ συνεχής στο $1/2$

* η F προφανώς ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Συνεπώς βάσει του Θεωρήματος χαρακτηρισμού αναπαρίσταται μοναδική $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ την $\mathrm{Unif}[\alpha,\beta]$.

— Η $\mathrm{Unif}[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής επειδή το στήριγμά της είναι διάστημα.

— Η F είναι συνεχής συνάρτηση οπότε για την $\mathrm{Unif}[\alpha,\beta]$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{x\})=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή αυτή κ' σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της η $\mathrm{Unif}[\alpha,\beta]$ αποδίδει μηδενική πιθανότητα.

Ενδιαμέσως Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\mathbb{P}([\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}])$

Επειδή η F συνεχής, οπότε κ συνεχής στα α, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ θα έχουμε

* $\mathbb{P}([\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]) = \mathbb{P}((\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})) = \mathbb{P}([\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})) = \mathbb{P}((\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]) =$

$$= F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}}{\beta-\alpha} - 0 = \frac{1}{2}\,\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = 1/2.$$

η F συνεχής στα α κ' $\frac{\alpha+\beta}{2}$ αφού είναι παντού συνεχής

Ομοι. να Δ $\mathbb{P}([\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta])$

– Για κάθε διαφορετική τιμή των $\alpha<\beta$ έχουμε μια διαφορετική ομοιόμορφη κατανομή (αφού έχουμε διαφορετικό supp κ' διαφορετική F). Συνεπώς το παράδειγμα περιγράφει την οικογένεια των ομοιόμορφων κατανομών. Όταν $\alpha=0$, $\beta=1$ αποκτούμε την $\text{Unif}[0,1]$ που ονομάζεται τυπική ομοιόμορφη (standard uniform)

με – $\text{supp}=[0,1]$

– $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$.

Τέλος Διάλεξης 16

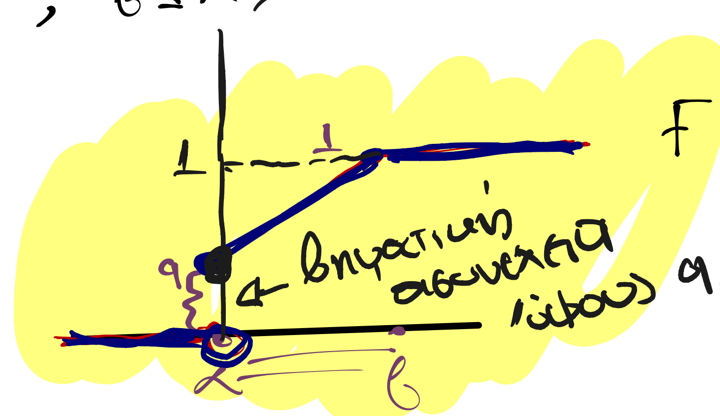
5'. Έστω όπως κ' προηγουμένως το $[\alpha,\beta]$, κ' $q\in(0,1)$ με

– $\text{supp}=[\alpha,\beta]$

– $F(x) = \begin{cases} 0, & x<\alpha \\ q+\left[(1-q)\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right], & \alpha\le x<\beta \\ 1, & \beta\le x \end{cases}$

ο κάθετος άξονας έχει τοποθετηθεί στο α.

Είναι η F καλώς ορισμένη;



* Από το γράφημα φαίνεται ότι η F ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Είναι προφανώς αύξουσα κ' έχουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$, είναι παντού συνεχής εκτός του α

και στο α έχουμε $\lim\limits_{x\to\alpha^+} F(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} \left(q + (1-q)\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) =$

$$= q + (1-q)\frac{1}{\beta-\alpha} \lim_{x\to\alpha} (x-\alpha) = q + (1-q)\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot(\alpha-\alpha)$$

$= q = F(\alpha)$ επομένως είναι από δεξιά συνεχής στο α, οπότε είναι από δεξιά συνεχής παντού.

- Επομένως η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική κ άρα αντιστοιχίζεται μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$.
- Η $\mathbb{P}$ έχει ως στήριγμα διάστημα (το $[\alpha,\beta]$) συνεπώς είναι συνεχής. Παρόλαυτα η αθροιστική της συνάρτηση είναι ασυνεχής.
- Για την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim\limits_{x\to\alpha^-} F(x)$
$= q + (1-q)\underbrace{\frac{\alpha-\alpha}{\beta-\alpha}}_{=0} - \lim\limits_{x\to\alpha^-} 0 = q$, ενώ $\mathbb{P}(\{x\}) = 0 \ \forall x\neq\alpha$
επειδή η F είναι συνεχής σε κάθε άλλο x.

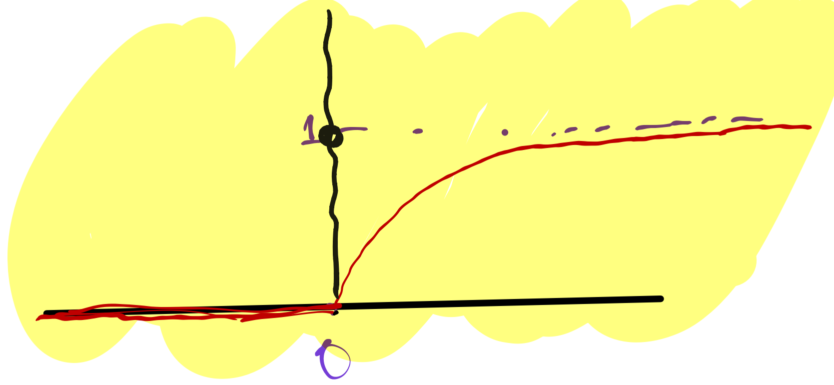
Άσκηση. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε κατανομή π.π. με στήριγμα το $[\alpha,\beta]$ για την οποία όμως η αθροιστική να είναι ασυνεχής στα α, β.

6. Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ (Exponential Distribution, $Exp(\lambda)$).

διάστημα με μη πεπερασμένη ακτίνα

- $supp = [0,+\infty) = \mathbb{R}^+$

- $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & 0\leq x \end{cases}$



* Προφανώς από το γράφημα η F είναι αύξουσα, είναι παντού συνεχής (συνεχής είναι κ' παντού από δεξιά συνεχής) ενώ έχουμε $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}0=0$, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-\lambda x})$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}\overset{\lambda>0}{=}1-e^{-\infty}=1-0=1.$$

– Επομένως η F καλώς ορισμένη αθροιστική, επομένως αναπαριστά μοναδική $\mathbb{P}$ που ονομάζουμε $Exp(\lambda)$.

– Αφού $supp=[0,+\infty)$ (δηλ. είναι διάστημα), η $Exp(\lambda)$ είναι συνεχής.

– Η F είναι παντού συνεχής, επομένως $\mathbb{P}(\{x\})=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

– Ενδεικτικά έχουμε $\mathbb{P}([0,1])=\mathbb{P}((0,1))=\mathbb{P}([0,1))=$
$=\mathbb{P}((0,1])$ αφού η F συνεχής στα $0,1$, και υπολογίζοντας έχουμε $\mathbb{P}([0,1])=F(1)-F(0)=1-e^{-\lambda\cdot 1}-(1-e^{-\lambda\cdot 0})$

$$=1-e^{-\lambda}-(1-e^{0})=1-e^{-\lambda}-(1-1)=1-e^{-\lambda}$$

– Για κάθε διαφορετική τιμή του λ έχουμε μια διαφορετική εκθετική κατανομή αφού έχουμε μια διαφορετική F. Οπότε έχουμε τόσες εκθετικές κατανομές όσες κ' οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει το λ. Συνεπώς στα παραπάνω εξετάζουμε επί της ουσίας την οικογένεια των εκθετικών κατανομών.

Μάλιστα ως προς το τελευταίο παρατηρούμε το εξής: Πως αλλάζει η $\mathbb{P}([0,1])$ όταν αλλάζει το λ; Έχουμε ότι $\mathbb{P}([0,1]) = 1-e^{-\lambda}$ που είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του λ και

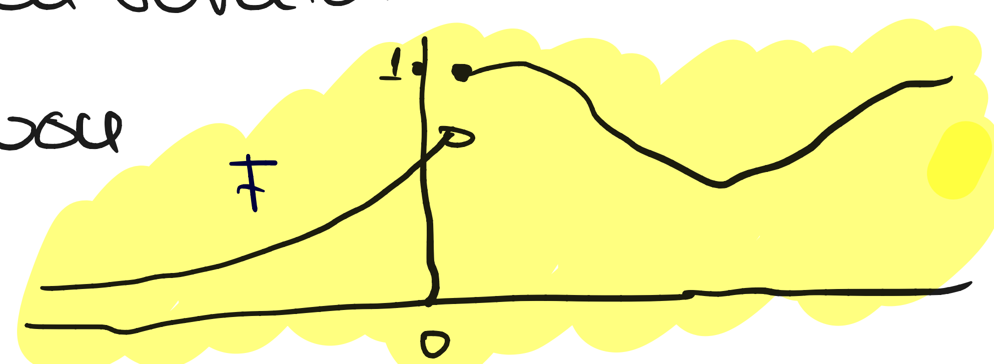
$$\frac{d\mathbb{P}([0,1])}{d\lambda} = \frac{d(1-e^{-\lambda})}{d\lambda} = -\frac{de^{-\lambda}}{d\lambda} = -\frac{de^{-\lambda}}{d(-\lambda)}\frac{d(-\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= -e^{-\lambda}(-1) = e^{-\lambda} > 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Επομένως για $0<\lambda_1<\lambda_2$ η $Exp(\lambda_2)$ αποδίδει μεγαλύτερη πιθανότητα στο $[0,1]$ από τη πιθανότητα που αποδίδει στο ίδιο διάστημα η $Exp(\lambda_1)$.

[Δηλ. η $\mathbb{P}([0,1])$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του λ.]

Αντιπαράδειγμα: Είναι δυνατόν η F της οποίας το γράφημα είναι



να είναι αθροιστική κάποιας $\mathbb{P}$;

Όχι! Είναι προφανές ότι η F δεν είναι αύξουσα

[redacted]

Παράδειγμα 7. Κανονική κατανομή με παραμέτρους

$\mu \in \mathbb{R}$ (μέσος) και $v>0$ (διακύμανση) (Normal or Gaussian distribution) – $N(\mu, v)$

– $supp = \mathbb{R}$ (η πρώτη από αυτές που έχουμε δει που στηρίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$)

– $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$ όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με (*) → καταχρηστικό

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right)}$$

(η αθροιστική έχει την μορφή ορισμένου ολοκληρώματος ως προς την f)

– Καταρχάς επειδή το ολοκλήρωμα στο (*) είναι καταχρηστικό θα πρέπει να εξασφαλίσουμε $\forall x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{x} f(z)dz \in \mathbb{R}$ (κ' δεν είναι π.χ. κάποια απροσδιοριστία ή κάποιο άπειρο). Έτσι θα εξασφαλίσουμε ότι η F παραπάνω είναι συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

– Παρατηρούμε ότι $f(z)>0$, επομένως το $\int_{-\infty}^{x} f(z)dz$ θα υπάρχει ως πραγματικός αριθμός αν υπάρχει το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$.

Έχουμε $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right)dz \quad (**)$$

Αντικατάσταση: $y = (z-\mu)/\sqrt{2v}$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2v}}dz \to dy$ $\qquad \left(\frac{z-\mu}{\sqrt{2v}}\right)^2 \to y^2$

Μας δίνεται το ολοκλήρωμα (εξωγενώς) Gauss $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,dy = \sqrt{\pi}}$

Θέτουμε $y = \frac{z-\mu}{\sqrt{2v}}$, $dy = \frac{1}{\sqrt{2v}}dz$, επομένως στο (**) έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\,dy}_{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Όταν $z \to -\infty$, $y = \frac{z-\mu}{\sqrt{2v}} \to -\infty$ $\quad \sqrt{2v} > 0$

$z \to +\infty$, $y = \frac{z-\mu}{\sqrt{2v}} \to +\infty$

Επομένως $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ (επειδή $f > 0$)

Επομένως η F είναι πράγματι συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Είναι όμως αθροιστική συνάρτηση;

Παρατηρούμε: * η F παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ αφού

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz}{dx} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}$$

οπότε είναι συνεχής.

* η F είναι γνησίως αύξουσα αφού

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η F είναι συνεχής (επομένως κ' από δεξιά συνεχής) κ' είναι κ' γνησίως αύξουσα (άρα αύξουσα)

Συνεπώς οι ιδιότητες (α) και (γ). ικανοποιούνται.

Τι συμβαίνει με την (β);

Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 1$

από τον παραπάνω υπολογισμό.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \ldots = 0.$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί (αν θέλετε κάντε το ως άσκηση)

[Ισχύει ότι $\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{x} f(z)dz = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$;]

Επομένως ικανοποιείται και η (β). Άρα παράγματι η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική συνάρτηση που βάσει του θεωρήματος χαρακτηρισμού θα αντιστοιχεί μοναδική $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$, την $N(\mu,v)$.

- Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η F μπορεί να εκφρασθεί μόνο με μορφή ολοκληρώματος.

- Η $N(\mu,v)$ είναι συνεχής αφού το στήριγμά της είναι διάστημα ($supp = \mathbb{R}$)

- Η αθροιστική της είναι συνεχής οπότε η $\mathbb{P}(\{x\})=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

- $\underbrace{\mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \mathbb{P}((\alpha,\beta)) = \mathbb{P}([\alpha,\beta)) = \mathbb{P}((\alpha,\beta])}_{\text{συνέχεια της } F} =$

$$= F(b)-F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(z)\,dz - \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f(z)\,dz =$$

Εδώ η ισχύς του ΘΘΛ 4- είναι προφανής

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{a}^{b} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right) dz$$ επομένως

για την $N(\mu,v)$ οι πιθανότητες που αποδίδονται σε διαστήματα πεπερασμένης ακτίνας προκύπτουν ως ολοκληρώματα σε αυτά της f.

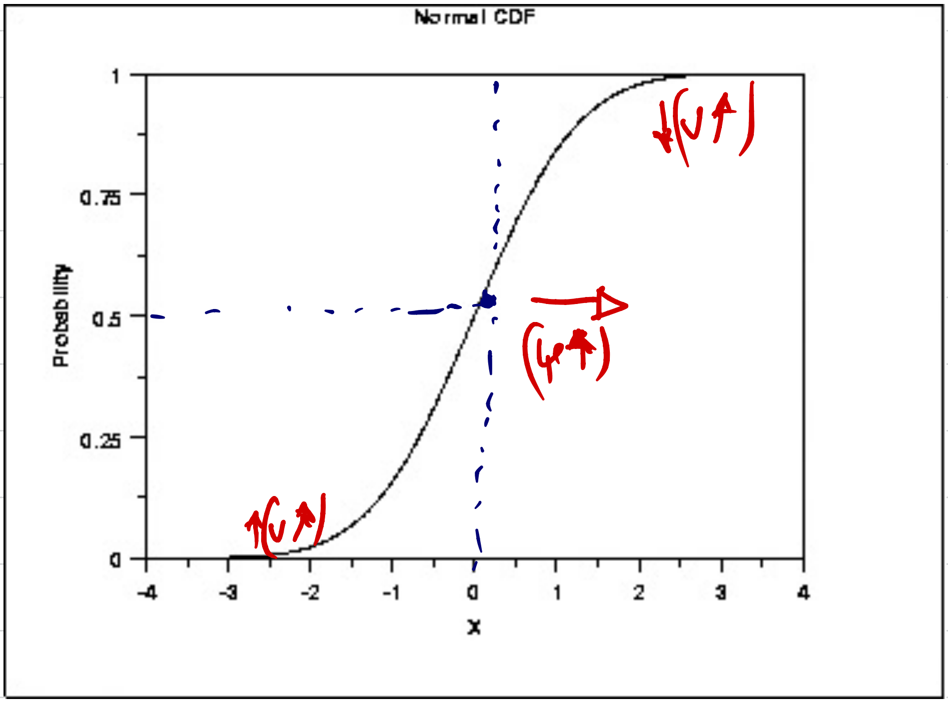
— Επειδή η F μέσω της f εξαρτάται μονοσήμαντα από το $\binom{\mu}{v}$ σε κάθε τιμή του $\binom{\mu}{v}$ αντιστοιχεί κ μία και μοναδική $N(\mu,v)$. Συνεπώς στα παραπάνω μελετάμε την οικογένεια των κανονικών κατανομών. Ιδιαίτερο παράδειγμα αυτής της οικογένειας είναι η τυπική κανονική κατανομή (Standard Normal) που προκύπτει για $\mu=0$ κ' $v=1$ $N(0,1)$. Συνήθως για αυτή έχουμε τους συμβολισμούς:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)\,dz, \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

□

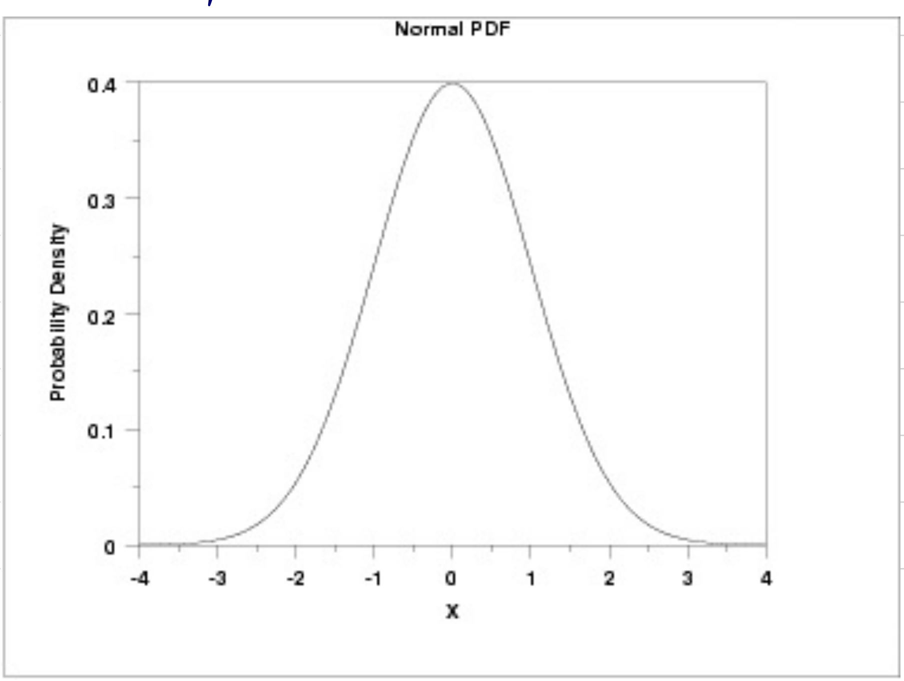
Σε αυτή την παράγραφο είδαμε ότι η αθροιστική συνάρτηση υπάρχει και είναι μοναδική για κάθε κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και την αναπαριστά.

Η Φ έχει την μορφή σιγμοειδούς καμπύλης



Ενώ γενικά η F προκύπτει από την Φ με μετατοπίσεις (ως προς μ) και πλατύνσεις (ως προς ν)

Η φ έχει την μορφή κωδωνοειδούς καμπύλης



Διάλεξη 15

Παραδείγματα υπολογισμού του $\mathbb{P}(A)$ μέσω της F για διάφορα A κ' την $\mathbb{P}=Ber(q)$

$$- \ \mathbb{P}(\{2\}) = F(2) - \lim_{y\to 2^-} F(y) = 1 - \lim_{y\to 2^-} 1 = 1-1=0$$

γνωρίζουμε $2 \notin supp$ $\Rightarrow \mathbb{P}(\{2\})=0$

η μορφή της F στον 3° κλάδο

$$- \ \mathbb{P}((-\infty,0)) = \lim_{y\to 0^-} F(y) = \lim_{y\to 0^-} 0 = 0$$

γνωρίζουμε ότι $(-\infty,0)\cap supp=\emptyset$ $\Rightarrow \mathbb{P}((-\infty,0))=0$

η μορφή της F στον 1° κλάδο

$$- \ \mathbb{P}((-\infty,1/3]) = F(1/3) = 1-q$$

γνωρίζουμε ότι $(-\infty,1/3]\cap supp = \{0\}$

$\mathbb{P}((-\infty,1/3])=\mathbb{P}(\{0\})=1-q$

χρησιμοποιώντας τον 2° κλάδο

Διάλεξη 16

$- \mathbb{P}((1/2,+\infty)) = 1 - F(1/2) = 1-(1-q) = 1-1+q = q$

γνωρίζουμε ότι $(1/2,+\infty) \cap supp = \{1\}$
$\mathbb{P}((1/2,+\infty)) = \mathbb{P}(\{1\}) = q$

εξουσίας της μορφής της F στον 2ο κλάδο

$- \mathbb{P}((0,1]) = F(1) - F(0) = 1-(1-q) = 1-1+q = q$

γνωρίζουμε ότι $(0,1] \cap supp = \{1\} \Rightarrow$
$\mathbb{P}((0,1]) = \mathbb{P}(\{1\}) = q$

$- \mathbb{P}((2,4)) = \mathbb{P}([2,4]) = \mathbb{P}((2,4]) = \mathbb{P}([2,4)) = F(4) - F(2)$
$= 1-1 = 0$

$\hookrightarrow$ η F συνεχής στο 2 κ' στο 4

η τομή καθε ενός από αυτά τα διαστήματα με το στήριγμα είναι το $\emptyset$
$\Rightarrow$ η πιθανότητα που αποδίδεται σε καθε ένα από αυτά από την Ber(q) ισούται με 0.