Διαλέξεις 13-14

Ιδιότητες της F κ' θεώρημα χαρακτηρισμού

Περαιτέρω ιδιότητες της F

Υπολογισμός πιθανοτήτων μέσω της F

Παραδείγματα κατανομών που περιγράφονται μέσω του προσδιορισμού της F.

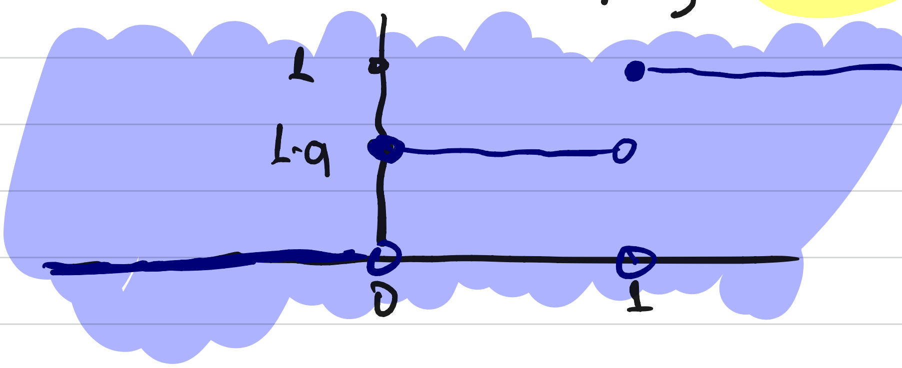
Είδαμε τα εξής:

* αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ τότε η αθροιστική αυτής $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ορίζεται από: $x\in\mathbb{R}$, $F(x) := \mathbb{P}((-\infty,x])$.

↳ ως εκ τούτου αναμένεται να είναι πιο εύχρηστα διαχειρίσιμη από την $\mathbb{P}$

* η F πάντοτε καλώς ορισμένη

* π.χ. αν $\mathbb{P} = Ber(q)$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$



άρα θα πρέπει να μπορούμε να βρίσκουμε τις πιθανότητες μέσω της F

* Θα δούμε ότι:
  * η F αναπαριστά πλήρως την $\mathbb{P}$
  * οι ιδιότητες της $\mathbb{P}$ θα αντανακλώνται μέσω της F

* Αν ισχύει το παραπάνω: θα μπορούμε να περιγράψουμε την $\mathbb{P}$ δίνοντας την F αυτής

Χαρακτηριστικές ιδιότητες της F (θα μας οδηγήσουν σε ένα θεώρημα που θα επιβεβαιώνει τα παραπάνω)

1. Η F είναι αύξουσα $\left(x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2) \right)$
(όχι αναγκαστικά γν. αύξουσα)

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $F(x_1) - F(x_2) \geq 0$. Έχουμε

$$F(x_1) - F(x_2) = \mathbb{P}\left((-\infty, x_1]\right) - \mathbb{P}\left((-\infty, x_2]\right) \geq 0$$

Επίσης $x_1 > x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \xrightarrow{} \mathbb{P}$ μονοτονία της $\mathbb{P}$

$A \supseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}\left((-\infty, x_1]\right) \geq \mathbb{P}\left((-\infty, x_2]\right) \Leftrightarrow \mathbb{P}\left((-\infty, x_1]\right) - \mathbb{P}\left((-\infty, x_2]\right) \geq 0$$

Επομένως η F είναι αύξουσα επειδή η $\mathbb{P}$ μονότονη.

(παράδειγμα του πως ιδιότητα της $\mathbb{P}$ αντανακλάται σε ιδιότητα της F) $\square$

2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ κ' $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(ασυμπτωτική συμπεριφορά της F)

Επιφύλαξη: η ιδιότητα αυτή βασίζεται σε μια ιδιότητα συνέχειας της $\mathbb{P}$ που δεν έχουμε μελετήσει και οφείλεται στην "άπειρου πλήθους" προσθετικότητα. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της & θεωρώντας αυτή την ιδιότητα δεδομένη

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} P((-\infty,x]) = \dots = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n]\Big)$$

$$= \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

γίνεται χρήση της συνέχειας που αποσιωπάται ← αν χρειάζεται θα δίνεται

Έχουμε ότι $\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n] = (-\infty,0] \cup (-\infty,1] \cup (-\infty,2] \cup \dots \cup (-\infty,n] \cup \dots = ;$ [λύσουμε]

Η ένωση αυτή θα ισούται με το $\mathbb{R}$· αρκεί να δείξουμε ότι αν $x\in\mathbb{R}$ τότε το x θα βρίσκεται στην ένωση. Αλλά για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$x \in (-\infty,n]$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$.

Αλλά ξέρω ότι αν $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει φυσικός n^* με $x \le n^* \Rightarrow x \in (-\infty,n^*]$ συνεπώς το x θα βρίσκεται σε αυτό το στοιχείο της ένωσης που αντιστοιχεί στο $n=n^*$.

Οπότε το x θα ανήκει στην ένωση. Αφού το x αυθαίρετο, κάθε πραγματικός θα βρίσκεται στην ένωση.

Οπότε $\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n] = \mathbb{R}$. Άρα $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n]\Big) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

Αντίστοιχως,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}(-\infty,x] = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]\right)$$

θα χρειάζεται να δείξουμε

συνέχεια της $\mathbb{P}$ που αποδείξαμε $= \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

Έχουμε $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n] = (-\infty,0] \cap (-\infty,-1] \cap (-\infty,-2] \cap \ldots$
$\ldots \cap (-\infty,-n] \cap \ldots$

Στην τομή δεν βρίσκεται κανένας πραγματικός αριθμός (δηλ. η τομή ισούται με το $\emptyset$). Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: Έστω ότι $x\in\mathbb{R}$ κ' το x βρίσκεται στην τομή. Αυτό σημαίνει ότι $x\in(-\infty,-n]$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Αυτό όμως δεν γίνεται αφού αν $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $n^*\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-n^*<x \Leftrightarrow x\notin(-\infty,-n^*]$ άρα το x δεν βρίσκεται τουλάχιστον στον παράγοντα της τομής που αντιστοιχεί στο $n=n^*$. Άρα το $x\notin\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]$. Αφού το x αυθαίρετο, κανένας πραγματικός δεν βρίσκεται στην τομή. Επομένως $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]=\emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]\right)$
$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

3. Η F είναι από δεξιά συνεχής.

Προετοιμασία: [υπενθύμιση] Αν έχουμε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

i. η g θα είναι από δεξιά συνεχής στο x αν $\lim_{y\to x^+} g(y) = g(x)$ $\left(y\to x^+ \Leftrightarrow y\to x \text{ κ' } y\geq x\right)$

η g θα είναι από δεξιά συνεχής αν είναι από δεξιά συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. η g θα είναι από αριστερά συνεχής στο x αν $\lim_{y \to x^-} g(y) = g(x)$ $\left(y \to x^- \Leftrightarrow \begin{matrix} y \to x \\ \text{κ' } y \leq x \end{matrix} \right)$

η g θα είναι από αριστερά συνεχής αν είναι από αριστερά συνεχής σε κάθε x.

iii. η g συνεχής στο x αν είναι ταυτόχρονα από δεξιά κ' από αριστερά συνεχής στο x, δηλ.

$$\lim_{y \to x^-} g(y) = g(x) = \lim_{y \to x^+} g(y).$$

Η g συνεχής αν συνεχής σε κάθε x. $\square$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η F είναι από δεξιά στο x όπου το x αυθαίρετο.

Τέλος Διάλεξης 13

$$\lim_{y \to x^+} F(y) = \lim_{y \to x^+} \mathbb{P}((-\infty, y]) = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x + \tfrac{1}{n}] \right)$$

προκύπτει από την ιδιότητα της συνέχειας της $\mathbb{P}$ κ' αποδεικνύεται

θα χρειάζεται θα δείνεται

$$= \mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x).$$

Έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x + \tfrac{1}{n}] = (-\infty, x+1] \cap (-\infty, x + \tfrac{1}{2}] \cap (-\infty, x + \tfrac{1}{3}]$
$\cap \ldots \cap (-\infty, x + \tfrac{1}{n}] \cap \ldots$

Έχουμε ότι καθώς $n \to +\infty$, $x + \frac{1}{n} \to x$ (από δεξιά).

Η τομή θα ισούται με το $(-\infty, x]$ αφού:

αν $z \leq x$ έχουμε ότι $z \in (-\infty, x + \frac{1}{n}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$.

αν $z > x$ και αφού $x+\frac{1}{n} \to x$ θα υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x+\frac{1}{n^*} < z \Rightarrow z \notin (-\infty, x+\frac{1}{n^*}]$ και αφού αυτό το διάστημα είναι στοιχείο της τομής (αντιστοιχεί στο $n=n^*$), το z δεν μπορεί να ανήκει στην τομή.

Άρα κάθε αριθμός $\leq x$ θα βρίσκεται στην τομή κ' κάθε αριθμός $> x$ δεν θα βρίσκεται στην τομή. Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$

$= (-\infty, x] \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$.

∎.

Άρα γνωρίζουμε ότι αν η F αθροιστική της κατανομής $\mathbb{P}$ τότε:

1. η F αύξουσα (μονοτονία)
2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (ασυμπτωτική συμπεριφορά)
3. η F από δεξιά συνεχής. ∎

Ερώτημα: Ισχύει το αντίστροφο; (δηλ. αν $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις 1,2,3, είναι αθροιστική κάποιας $\mathbb{P}$;)

Θεώρημα Χαρακτηρισμού: Αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, και $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η αθροιστική συνάρτηση της $\mathbb{P}$, τότε η F ικανοποιεί τις:

α. αύξουσα,

β. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, και

γ. είναι από δεξιά συνεχής.

Αντίστροφα, αν η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις α, β, και γ, τότε υπάρχει μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ της οποίας η F είναι η αθροιστική. [ΣΧΟΛΙΟ: Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΕΙΝΑΙ ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΚΑΠΟΙΑ ΓΝΩΣΗ ΤΟΥ $\Sigma_{\mathbb{R}}$]

Σχόλιο: Το θεώρημα επί της ουσίας περιγράφει αμφιμονοσήμαντη σχέση μεταξύ του συνόλου των κατανομών πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ και των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις α, β, γ. Δηλ. σε κάθε κατανομή $\mathbb{P}$ αντιστοιχεί μοναδική τέτοια F και σε κάθε τέτοια F αντιστοιχεί μοναδική $\mathbb{P}$. Δηλαδή το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$ ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την αθροιστική αυτής.

Το παραπάνω σημαίνει:

α. μέσω της F μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$.

β. οι ιδιότητες της $\mathbb{P}$ θα πρέπει να αντανακλώνται σε σχετικές ιδιότητες της F.

Ας δούμε λίγο καλύτερα το τι σημαίνουν τα α, β.

Ξεκινώντας από το β έχουμε ενδεικτικά τα εξής:

Π.χ. ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε το τι σημαίνει για την P το να είναι η F ασυνεχής (ή συνεχής) σε κάποιο x.

Το να είναι η F ασυνεχής στο x σημαίνει το εξής:

$$\lim_{\substack{y\to x^- \\ \left(\substack{y\to x \\ y\leq x}\right)}} F(y) \neq F(x) \underset{\delta.}{=} \lim_{y\to x^+} F(y)$$

Επειδή η F αύξουσα, όταν $\lim_{y\to x^-} F(y) \neq F(x) \iff \lim_{y\to x^-} F(y) < F(x)$ (η F συνεχής στο x αν $\lim_{y\to x^-} F(y) = F(x)$)

Ας εξετάσουμε το $\lim_{y\to x^-} F(y) = \lim_{y\to x^-} P((-\infty, y]) =$

$$\ldots = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]\right)$$

Προκύπτει από την συνέχεια της P και οπωσδήποτε

$x-1/n \to x$ καθώς $n\to+\infty$ από αριστερά

Έχουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n] = (-\infty, x-1] \overset{\subset}{\cup} (-\infty, x-1/2] \overset{\subset}{\cup}$
$(-\infty, x-1/3] \overset{\subset}{\cup} \ldots \overset{\subset}{\cup} (-\infty, x-1/n] \cup \ldots$

Έστω $z > x$. Θα ισχύει ότι $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$;

Επειδή $\underline{x-1/n} < x < z \ \forall n \in \mathbb{N}$ το z δεν θα βρίσκεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(-\infty, x-1/n]$ οπότε $z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$.

Το $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$; Και πάλι, $x - 1/n < x \ \forall n \in \mathbb{N}$ οπότε και το x δεν βρίσκεται σε κανένα διάστημα της μορφής $(-\infty, x-1/n]$ οπότε $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$.

Έστω $z < x$. Θα ισχύει ότι $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$;

Επειδή $x - 1/n \to x$ καθώς $n \to +\infty$, θα έχουμε ότι αν $z < x$, θα υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$: $z < x - 1/n^* \Leftrightarrow z \in (-\infty, x-1/n^*]$ και επειδή το $(-\infty, x-1/n^*]$ θα είναι παράγοντας της $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$ (για $n = n^*$) $\Rightarrow z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n]$.

Άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x-1/n] = (-\infty, x)$.

Επομένως έχουμε δείξει $\lim_{y \to x^-} F(y) = \mathbb{P}((-\infty, x))$

Επιστρέφουμε στο ζήτημα της ασυνέχειας:

Είδαμε ότι η F ασυνεχής στο x αν

$$F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y) > 0 \iff \mathbb{P}((-\infty, x]) - \mathbb{P}((-\infty, x)) > 0$$

(Θυμόμαστε ότι αν $A \supset B$, $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A - B)$,

$A = (-\infty, x]$, $B = (-\infty, x)$)

$$\iff \mathbb{P}((-\infty, x] - (-\infty, x)) > 0 \iff \mathbb{P}(\{x\}) > 0$$

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$$

Δηλαδή έχουμε αποδείξει ότι:

Η F ασυνεχής στο x αν $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$

(ισοδύναμα η F συνεχής στο x αν $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$).

Παρατήρηση. Αν το $x \notin \mathrm{supp}$ τότε η F συνεχής στο x.

(δηλ. η F συνεχής εκτός του στηρίγματος)

Παρατήρηση. Αν η $\mathbb{P}$ διακριτή η F θα είναι ασυνεχής σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος.

Επομένως βάσει του προηγούμενου έχει συσχετισθεί το αν η $\mathbb{P}$ αποδίδει μηδενική ή μη πιθανότητα σε κάποιο μεμονωμένο σημείο με το αν η F είναι σε αυτό συνεχής ή μη.

Αντιστοίχως είναι δυνατόν να αποδειχθούν και άλλα όπως π.χ.

- σε διαστήματα εκτός του στηρίγματος η F σταθερή.
- η F γνησίως αύξουσα εντός του στηρίγματος

κ.ο.κ.

α. Πως γνωρίζοντας την F μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$;

Π.χ. έστω ότι θέλουμε να εκφράσουμε μέσω της F την πιθανότητα που αποδίδει η $\mathbb{P}$ στο A:

- $A = (-\infty, \alpha]$ Έχουμε ότι $\mathbb{P}((-\infty,\alpha]) = F(\alpha)$
- $A = (-\infty, \alpha)$ » » $\mathbb{P}((-\infty,\alpha)) = \lim_{y \to x^-} F(y)$
- $A = \{\alpha\}$ » » $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim_{y \to x^-} F(y)$
- $A = (\alpha, +\infty)$ » » $\mathbb{P}((\alpha,+\infty))$

$= 1 - \mathbb{P}((-\infty,\alpha]) = 1 - F(\alpha)$

- $A = [\alpha, +\infty)$ Έχουμε ότι $\mathbb{P}([\alpha,+\infty)) =$

$$= 1 - \mathbb{P}((-\infty, \alpha)) = 1 - \lim_{y \to \alpha^-} F(y)$$

$$- \quad A = \{\alpha, \beta\}, \quad \mathbb{P}(\{\alpha, \beta\}) = \mathbb{P}(\{\alpha\}) + \mathbb{P}(\{\beta\})$$

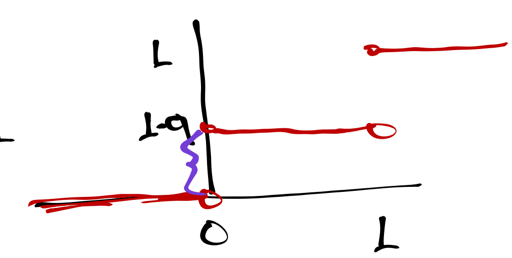
$$= F(\alpha) - \lim_{y \to \alpha^-} F(y) + F(\beta) - \lim_{y \to \beta^-} F(y)$$

Τέλος Διάλεξης 14.

[redacted]

– Υπενθύμιση: Ασχοληθήκαμε με το πως είναι δυνατόν να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$ χρησιμοποιώντας την F. Έτσι ξεκινήσαμε να εκφράζουμε το $\mathbb{P}(A)$ ως προς την F για διάφορα A μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Π.χ., αν $A=\{\alpha\}$, είδαμε ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$ κ' ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\})>0$ ανν η F ασυνεχής στο α, ενώ η $\mathbb{P}(\{\alpha\})$ ταυτίζεται με το "μέγεθος του άλματος" του γραφήματος της F στο α (όταν έχουμε συνέχεια στο α αυτό είναι 0).

Π.χ. $\mathbb{P}=Ber(q)$, $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-q, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$



$$\mathbb{P}(\{0\}) = F(0) - \lim_{y\to 0^-} F(y) = 1-q - \lim_{y\to 0^-} 0 = 1-q$$

$$\mathbb{P}(\{1/2\}) = F(1/2) - \lim_{y\to 1/2^-} F(y) = 1-q - \lim_{y\to 1/2^-}(1-q) = 1-q-(1-q) = 0$$

Επιστρέφουμε στην γενική περίπτωση: έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

– $A=(\alpha,\beta]$, $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}((\alpha,\beta]) = (*)$

$$(\alpha,\beta] = (-\infty,\beta] \overset{\supset}{-} (-\infty,\alpha]$$

$$(*) = \mathbb{P}\big((-\infty,\beta] \underset{\supset}{-} (-\infty,\alpha]\big) = \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha]) =$$

$(A\supseteq B,\ \mathbb{P}(A-B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B))$

$$= F(b) - F(a) = \mathbb{P}((a,\underline{b}])$$

(* ο τύπος αυτός θυμίζει το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Ίσως αυτό να σας πληροφορεί για κάποια σχέση που μπορεί να έχει η $\mathbb{P}$ με διαδικασίες ολοκλήρωσης – θα το δούμε αργότερα)

– $A = (a,b)$, $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((a,b)) = (*)$

$$(a,b) = (-\infty,b) - (-\infty,a]$$

$$(*) = \mathbb{P}((-\infty,b) - (-\infty,a]) = \mathbb{P}((-\infty,b)) - \mathbb{P}((-\infty,a])$$

$$= \lim_{y\to b^-} F(y) - F(a)$$

– $A = [a,b)$, $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([a,b)) = (*)$

$$* \quad \underset{a\le x<b}{[a,b)} = \underset{x<b}{(-\infty,b)} - \underset{x<a}{(-\infty,a)}$$

$$(*) = \mathbb{P}((-\infty,b) - (-\infty,a)) = \mathbb{P}((-\infty,b)) - \mathbb{P}((-\infty,a))$$

$$= \lim_{y\to b^-} F(y) - \lim_{y\to a^-} F(y)$$

– $A = [a,b]$, $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([a,b]) = (*)$

$$\underset{a\le x\le b}{[a,b]} = \underset{x\le b}{(-\infty,b]} - \underset{x<a}{(-\infty,a)}$$

$$(*) = \mathbb{P}((-\infty,b] - (-\infty,a)) = \mathbb{P}((-\infty,b]) - \mathbb{P}((-\infty,a))$$

$$= F(b) - \lim_{y\to a^-} F(y)$$

Συνεπώς τα παραπάνω μας λένε το πως μπορούμε να εκφράζουμε μέσω της αθροιστικής την πιθανότητα που απο-δίδει η κατανομή σε όποιο διάστημα έχει πεπερασμένα άκρα.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τα χθεσινά είναι δυνατόν να εκφράζουμε ως προς την F την πιθανότητα που αποδίδε-ται από την $\mathbb{P}$ και σε πιο "περίπλοκα" A.

Π.χ. $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha<\beta<\gamma$, $\mathbb{P}((\alpha,\beta] \cup \{\gamma\}) = (*)$

Επειδή $\alpha<\beta<\gamma \Rightarrow \{\gamma\} \cap (\alpha,\beta] = \emptyset$

οπότε εξαιτίας της προσθετικότητας $(*) = \mathbb{P}((\alpha,\beta]) + \mathbb{P}(\{\gamma\})$

$$= F(\beta) - F(\alpha) + F(\gamma) - \lim_{y \to \gamma^-} F(y)$$

Οπότε αν γνωρίζουμε την F μπορούμε να βρούμε το $\mathbb{P}(A)$ όποιο κι αν είναι το A!

Στην συνέχεια θα δούμε περαιτέρω παραδείγματα κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Σε αυτά θα περιγράφουμε την $\mathbb{P}$ χρησιμο-ποιώντας την αθροιστική της. (Δηλ. στα παραδείγματα θα δίνουμε την F. Θα ελέγχουμε αν αυτή είναι καλώς ορισμένη αθροιστι-κή, δηλαδή το αν ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Εφόσον ισχύει αυτό βάσει του θεωρήματος χαρακτηρισμού θα είμαστε βέβαιοι ότι η F αναπαριστά μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$

που θα είναι και η κατανομή που θέλουμε να περιγράψουμε.) (στα παρακάτω παραδείγματα θα έχουμε υπολογίσει το supp)

Παράδειγμα 5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$

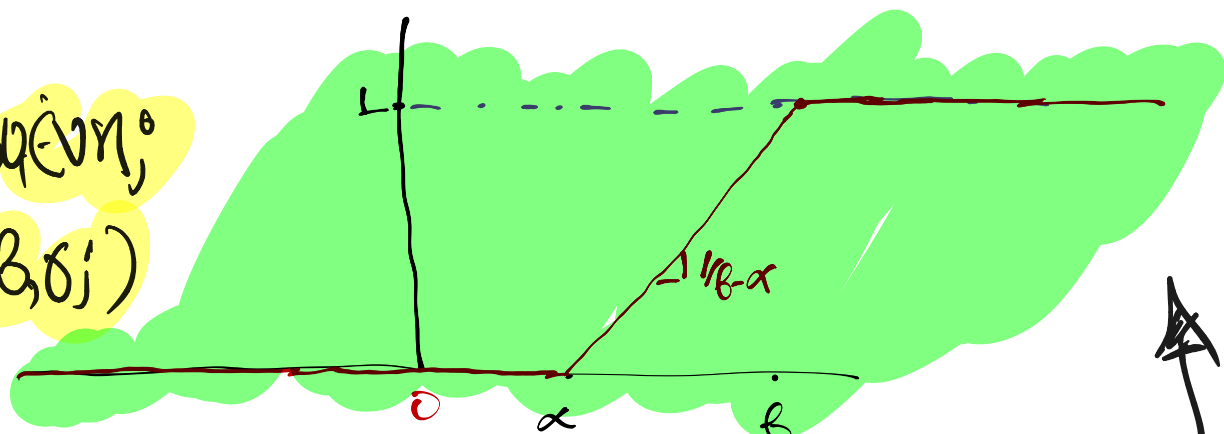
($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$) (Uniform Distribution – $\mathrm{Unif}[\alpha,\beta]$)

Έχουμε ότι

– $\mathrm{supp}=[\alpha,\beta]$ (δηλ. είναι συνεχής κατανομή)

– $$F(x)=\begin{cases}0, & x<\alpha\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\le x<\beta\\ 1, & \beta\le x\end{cases}$$

Είναι καλώς ορισμένη; (δηλ. ικανοποιεί τις α,β,γ;)



Υπενθύμιση: Μεθοδολογία εξέτασης παραδειγμάτων:

Εξετάζουμε παραδείγματα κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ μέσω των αθροιστικών τους. Σε κάθε παράδειγμα δίνεται η αθροιστική (και χωρίς να είναι απαραίτητο και το supp), ελέγχεται το αν αυτή ικανοποιεί τις τρείς χαρακτηριστικές ιδιότητες (οπότε κ' είναι πράγματι η αθροιστική μοναδικής κατανομής), και στην συνέχεια εξετάζονται ιδιότητες της κατανομής μέσω της αθροιστικής.