

Στατιστική II-Ακαδημαϊκό Έτος 2020-21

Τα παρακάτω αποτελούν περιληπτική επισκόπηση εννοιών που πραγματευτήκαμε στο μάθημα. Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτές τις έννοιες βρίσκονται στις περιλήψεις των διαλέξεων και των φροντιστηρίων που έχουν αναρτηθεί στο [ιστολόγιο του μαθήματος](#), στις σημειώσεις διαλέξεων και φροντιστηρίων όπως και στους πίνακες των εξ' αποστάσεως διαλέξεων, που είναι αναρτημένες στο σχετικό [πεδίο εγγράφων](#) του e-class, αλλά και στα αντίστοιχα πεδία του Microsoft Teams, και προφανώς στις προσωπικές σας σημειώσεις από τις διαλέξεις και τα φροντιστήρια.

(Α) Γενική Θεωρία Πιθανοτήτων:

- (I) Σύνολα αναφοράς, δυναμοσύνολα αυτών, πράξεις στο δυναμοσύνολο, ένωση, τομή, συμπλήρωμα, διαφορά, πραγματικές συνολο-συναρτήσεις, μονοτονία, προσθετικότητα, συλλογές από μετρήσιμα υποσύνολα αυτών και παραδείγματα, μετρήσιμοι χώροι, κατανομές (μέτρα) πιθανότητας, ορισμός και ιδιότητες θετικότητας, τυποποίηση, προσθετικότητα ("μικρού πλήθους" ή αριθμήσιμη)-περαιτέρω ιδιότητες όπως η μονοτονία, η μετρησιμότητα, κοκ, η υποπροσθετικότητα ("μικρού πλήθους" ή αριθμήσιμη), αμελητέα και σύνολα πλήρους πιθανότητας, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, η δυσκολία περιγραφής κατανομής πιθανότητας σε περίπλοκα σύνολα αναφοράς όπως το σύνολο των πραγματικών αριθμών, χώροι πιθανότητας, πλήθος κατανομών πιθανότητας που είναι δυνατόν να ορίζονται σε δεδομένο σύνολο αναφοράς και σύνδεση με το στατιστικό πρόβλημα.
- (II) Μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις-τυχαίες μεταβλητές, αντίστροφες εικόνες μετρήσιμων υποσυνόλων, ορισμός, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς από μεταφορά μέσω τυχαίων μεταβλητών, παραδείγματα, κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς που περιγράφονται "εύκολα" (Παρατήρηση: οι εν λόγω έννοιες αναπτύχθηκαν στα πλαίσια των φροντιστηρίων του μαθήματος αλλά χρησιμοποιήθηκαν γενικότερα. Πέραν των σχετικών φροντιστηριακών σημειώσεων, ενδεικτικά πρόχειρες σημειώσεις μπορείτε να βρείτε και [εδώ](#), ενώ δείτε και [εδώ](#) για σχετικό πανόραμα).
- (B) Κατανομές Πιθανότητας στους Πραγματικούς-Ιδιότητες και Αναπαραστάσεις:
- (I) Κλειστά, υποσύνολά των πραγματικών, διακριτά-συνεχή-μεικτά υποσύνολα των πραγματικών, η έννοια του στηρίγματος κατανομής στους πραγματικούς, το καλώς ορισμένο και η μοναδικότητα αυτού, έκφραση των πιθανοτήτων που αποδίδει η κατανομή βάσει του στηρίγματος, ταξινόμηση των κατανομών που μπορούν να οριστούν στους πραγματικούς βάσει ιδιοτήτων των στηριγμάτων

τους-διακριτές (το στήριγμα είναι διακριτό), συνεχείς (το στήριγμα έχει την μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων), μεικτές (το στήριγμα έχει κλειστό συνεχές και διακριτό μέρος-που είναι ξένα μεταξύ τους), ιδιάζουσες (το στήριγμα δεν έχει καμία από τις παραπάνω μορφές), οι διακριτές κατανομές είναι εύκολα περιγράψιμες αφού η εύρεση των πιθανοτήτων που αποδίδουν ανάγεται στην γνώση της αυστηρά θετικής (γιατί;) πιθανότητας που αποδίδουν σε όποιο στοιχείο του στηρίγματος, παραδείγματα (οικογενειών) διακριτών κατανομών, εκφυλισμένες, Bernoulli, Διωνυμικές, Poisson, πλήθος κατανομών σε κάθε οικογένεια από αυτές, περαιτέρω παραδείγματα διακριτών που κατασκευάζονται από μεταφορά από αυτές μέσω τυχαίων μεταβλητών.

- (II) **Αναπαραστάσεις A:** η έννοια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, ορισμός και καλώς ορισμένο, παραδείγματα-οι αθροιστικές συναρτήσεις των παραπάνω διακριτών κατανομών-θεώρημα χαρακτηρισισμού-χαρακτηριστικές ιδιότητες, ασυμπτωτική συμπεριφορά, μονοτονία και από δεξιά συνέχεια -σε κάθε κατανομή αντιστοιχεί μοναδική αθροιστική και σε κάθε συνάρτηση με τις χαρακτηριστικές ιδιότητες αντιστοιχεί μοναδική κατανομή, περαιτέρω ιδιότητες όπως η συμπεριφορά της αθροιστικής εντός και εκτός του στηρίγματος, τι σημαίνει για την κατανομή ότι η αθροιστική της είναι συνεχής ή ασυνεχής σε σημείο και η μορφή των αθροιστικών των διακριτών κατανομών, κ.ο.κ., χρήση της αθροιστικής για την έκφραση και τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που αποδίδει η κατανομή-υπόνοια από αυτό ότι οι κατανομές σχετίζονται με ολοκληρώματα, παραδείγματα τέτοιων υπολογισμών, παραδείγματα (οικογενειών) κατανομών που τα ορίζουμε μέσω των αθροιστικών τους, ομοιόμορφες, παράδειγμα κατανομής με συνεχές στήριγμα αλλά με ασυνεχή αθροιστική, παράδειγμα μεικτής κατανομής, εκθετικές, κανονικές κατανομές, κατανομές Gamma, κ.ο.κ., πλήθη κατανομών στις εν λόγω οικογένειες.
- (III) **Αναπαραστάσεις B:** η έννοια της συνάρτησης πυκνότητας, κίνητρο για την μελέτη της από τον ορισμό των κανονικών κατανομών, ορισμός, ύπαρξη αν και μόνο αν η αθροιστική έχει ως ιδιότητα κάποια ισχυρότερη έννοια συνέχειας της συνηθισμένης οπότε υπάρχουν κατανομές (π.χ. οι διακριτές) που δεν έχουν συνάρτηση πυκνότητας, σύνδεση της συνάρτησης πυκνότητας με την σχεδόν παντού παράγωγο της αθροιστικής και δυνατότητα μη μοναδικότητας, περαιτέρω ιδιότητες-ολοκλήρωση της συνάρτησης πυκνότητας σε όλη την πραγματική ευθεία, συμπεριφορά της συνάρτησης πυκνότητας εκτός του στηρίγματος, δυνατότητα επιλογής της συνάρτησης πυκνότητας ως θετικής συνάρτησης, ικανές ιδιότητες για τον χαρακτηρισμό συνάρτησης ως συνάρτηση πυκνότητας μοναδικής κατανομής, έκφραση των πιθανοτήτων που αποδίδει η κατανομή ως ολοκληρωμάτων ως προς την συνάρτηση πυκνότητας, και αναπαράσταση της κατανομής από την συνάρτηση πυκνότητας (όταν υπάρχει), και παραδείγματα τέτοιων υπολογισμών. Παραδείγματα ύπαρξης και εύρεσης (της συμβατικής εκδοχής) της συνάρτησης πυκνότητας σε προαναφερθείσες κατανομές όπως οι ομοιόμορφες, οι εκθετικές και οι κανονικές, αναλυτικά χαρακτηριστικά συναρτήσεων πυκνότητας που αντανακλούν ιδιότητες των κατανομών τους-παράδειγμα: η αρτιότητα της συνάρτησης πυκνότητας εκφράζει ιδιότητα συμμετρίας της τυπικής κανονικής κατανομής, παράδειγμα ορισμού κατανομής πιθανότητας μέσω της συνάρτησης πυκνότητας της-τυπική κατανομή Cauchy.

- (IV) **Αναπαραστάσεις Γ:** Οι κατανομές πιθανότητας ως διαδικασίες (ορισμένης) ολοκλήρωσης κατάλληλων πραγματικών συναρτήσεων (τυχαίων μεταβλητών), περιορισμένος ορισμός του ολοκληρώματος τέτοιας συνάρτησης ως προς κατανομή πιθανότητας στις περιπτώσεις διακριτών κατανομών και κατανομών που έχουν συναρτήσεις πυκνότητας, σχόλια και ιδιότητες, συμβολισμοί, ζητήματα ύπαρξης των ολοκληρωμάτων (ως πραγματικών αριθμών), ολοκλήρωση σταθερών συναρτήσεων, γραμμικότητα, μονοτονία, κ.ο.κ., παραδείγματα υπολογισμών στις προαναφερθείσες κατανομές, αναπαράσταση κατανομής πιθανότητας ως διαδικασίας ολοκλήρωσης-το να γνωρίζουμε το πως ολοκληρώνεται κάθε τέτοια συνάρτηση ως προς κατανομή πιθανότητας ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την κατανομή. Ολοκλήρωση συναρτήσεων που δεν ορίζονται σε όλη την πραγματική ευθεία ως προς κατανομές πιθανότητας-είναι επαρκές το πεδίο ορισμού να περιλαμβάνεται στο στήριγμα και το υποσύνολο του στηρίγματος στο οποίο η συνάρτηση ενδεχομένως δεν είναι καλώς ορισμένη, να είναι αμελητέο.
- (V) **Αναπαραστάσεις Δ:** Ροπές κατανομής πιθανότητας, ολοκλήρωση πολυωνυμικών συναρτήσεων ως προς κατανομή-είναι επαρκές το να γνωρίζουμε αυτά τα ολοκληρώματα για να γνωρίζουμε την κατανομή;-ορισμός ροπών και διάκριση μεταξύ ροπής κ-τάξης και απόλυτης ροπής κ-τάξης όπου το κ φυσικός, σχόλια και ιδιότητες, συμβολισμοί, ζητήματα ύπαρξης, ζητήματα σχέσεων μεταξύ ροπής κ-τάξης και απόλυτης ροπής κ-τάξης, σε κάποιες περιπτώσεις οι ροπές αναπαριστούν την κατανομή αλλά ακόμη και όταν δεν συμβαίνει αυτό είναι δυνατόν να μας δίνουν πληροφορία για την κατανομή, περαιτέρω εκφάνσεις της έννοιας των ροπών-ροπές περί τον μέσο και διακύμανση κατανομής, ιδιότητες και υπολογισμοί ροπών σε προαναφερθέντα παραδείγματα κατανομών, σε αυτά βλέπουμε επίσης ότι οι ροπές είναι δυνατόν να ικανοποιούν αναδρομικές σχέσεις (π.χ. εκθετική κατανομή), ενώ ο υπολογισμός τους είναι δυνατόν να είναι περίπλοκος επειδή προκύπτουν από διαδικασίες ολοκλήρωσης, παράδειγμα κατανομής για την οποία δεν υπάρχει η ροπή κ-τάξης για κάθε κ μεγαλύτερο του μηδενός-η τυπική κατανομή Cauchy. Απλό παράδειγμα εμφάνισης της έννοιας των ροπών σε προβλήματα βέλτιστης επιλογής υπό συνθήκες αβεβαιότητας. (Εκτός ύλης: οι ανισότητες Markov και Chebychev και τα περί ροπογεννήτριας συνάρτησης που αναφέρονται [εδώ](#)).