No. Date

Κατανομές από Μεταφορά

Οι τυχαίες μεταβλητές μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς. Αν θέλουμε να προσάψουμε πιθανότητα σε ένα μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών, βρίσκουμε την την αντίστροφη εικόνα αυτού μέσω της τυχαίας μεταβλητής X και αποδίδουμε σε αυτή πιθανότητα μέσω της κατανομής $\mathbb{P}$ που υπάρχει ήδη στον Ω.

Ορισμός

Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$ και τυχαία μεταβλητή X. Το ζεύγος $\mathbb{P}, X$ προσδιορίζει μονοσήμαντα κατανομή στο $\mathbb{R}$, έστω $\mathbb{P}^*$ που ορίζεται ως εξής:

$$\text{Αν } A \in \Sigma_{\mathbb{R}} \text{ τότε } \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)$$

Παρατηρήσεις

1. Η $\mathbb{P}^*$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο $\mathbb{R}$ εξαιτίας του ότι η $\mathbb{P}$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή στο Ω. Ονομάζεται κατανομή από μεταφορά της $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ μέσω της X

2. Συνήθως, η $\mathbb{P}^*$ ονομάζεται ως η κατανομή που ακολουθεί η X $(X \sim \mathbb{P}^*)$, αγνοώντας την υφιστάμενη $\mathbb{P}$.

3. Εφόσον μπορούμε να μεταφέρουμε κατανομές στους πραγματικούς μέσω τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε καταρχάς να μελετούμε κατανομές πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ όπου υπάρχει πλούσια μαθηματική δομή.

No. Date

Παράδειγμα

Να βρεθεί η $\mathbb{P}^*$ όταν: $\underline{\Omega} = \{K, \Gamma\}$, $\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{3}$,

$X(K) = 3$, $X(\Gamma) = 4$

Βήμα 1: Βρίσκουμε $\Sigma_{\underline{\Omega}}$, $\mathbb{P}(\Gamma)$

$$\Sigma_{\underline{\Omega}} = \{\emptyset, \underline{\Omega}, \{K\}, \{\Gamma\}\}$$

$$\mathbb{P}(\underline{\Omega}) = \mathbb{P}(\{K, \Gamma\}) = \mathbb{P}(\{K\} \cup \{\Gamma\}) = \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\})$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \mathbb{P}(\{\Gamma\}) + \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{2}{3}$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε τις αντίστροφες εικόνες

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset \in \Sigma_{\underline{\Omega}}, & \text{αν } 3, 4 \notin A \\ \underline{\Omega} \quad \text{—''—}, & \text{αν } 3, 4 \in A \\ \{K\} \quad \text{—''—}, & \text{αν } 3 \in A,\ 4 \notin A \\ \{\Gamma\} \quad \text{—''—}, & \text{αν } 3 \notin A,\ 4 \in A \end{cases}$$

Βήμα 3: Υπολογίζουμε την $\mathbb{P}^*(A)$

όπου $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{P}^*(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0, & \text{αν } 3, 4 \notin A \\ \mathbb{P}(\underline{\Omega}) = 1, & \text{αν } 3, 4 \in A \\ \mathbb{P}(\{K\}) = 1/3, & \text{αν } 3 \in A,\ 4 \notin A \\ \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = 2/3, & \text{αν } 3 \notin A,\ 4 \in A \end{cases}$$

No. Date

Στήριγμα Κατανομής

Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$. Το στήριγμα (supp) αυτής είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $\mathbb{P}$ αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα.

Το στήριγμα διευκολύνει τη διαδικασία περιγραφής μιας κατανομής πιθανότητας στον $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$

Πόρισμα

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$

Απόδειξη

$$A = (A \cap supp) \cup (A \cap supp')$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}[(A \cap supp) \cup (A \cap supp')]$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp) + \mathbb{P}(A \cap supp') \quad (1)$$

Γενικά ισχύει ότι $supp' \supseteq A \cap supp'$

$(\pi.\chi.\ \{1,2,3\} \supseteq \{2,3\} \cap \{1,2,3\})$

Από ιδιότητα μονοτονίας θα ισχύει $\mathbb{P}(supp') \geq \mathbb{P}(A \cap supp') \quad (2)$

Επίσης $\mathbb{P}(supp) = 1$ και ακολούθως $\mathbb{P}(supp') = 0 \quad (3)$

$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(A \cap supp') \leq 0$, επειδή δεν υφίσταται αρνητική πιθανότητα τότε αναγκαστικά θα ισχύει

$$\mathbb{P}(A \cap supp') = 0 \quad (4)$$

Συνεπώς, $(1) \overset{(4)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap supp)$ που είναι το ζητούμενο

No. Date

Για $supp = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$$

(ξένα ενδεχόμενα) $= \mathbb{P}\left[(A\cap\{x_1\}) \cup (A \cap x_2) \cup \ldots \cup (A \cap x_n)\right]$

(προσθετικότητα) $= \mathbb{P}(A \cap \{x_1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{x_2\}) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap \{x_n\})$

Ανάλογα με τη μορφή που μπορεί να πάρει, το στήριγμα μας παρέχει την παρακάτω κατηγοριοποίηση των κατανομών στο $\mathbb{R}$.

α. Η κατανομή $\mathbb{P}$ ονομάζεται διακριτή αν το στήριγμά της είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (π.χ. πεπερασμένο, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$)

β. Η κατανομή $\mathbb{P}$ θα ονομάζεται συνεχής αν το στήριγμά της είναι διάστημα

γ. Σε κάθε άλλη περίπτωση η $\mathbb{P}$ θα ονομάζεται μικτή.

Σχετικά με τις διακριτές κατανομές, ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να τις περιγράψουμε "εύκολα" (χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό) ακριβώς επειδή έχουν διακριτό στήριγμα. της μορφής $supp = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Είναι δυνατόν μια κατανομή να αποδίδει μηδενική πιθανότητα σε κάποιο σημείο του στηρίγματός της;

Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό διότι αυτό το $x_i \in supp$, $\mathbb{P}(x_i) = 0$ θα μπορούσαμε να το αφαιρέσουμε από το supp. Συνεπώς, το supp δεν θα ήταν το μικρότερο, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mathbb{P}(supp) = 1$

Πόρισμα
Μια διακριτή κατανομή αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της, $supp = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Απόδειξη
Εστω $\mathbb{P}(\{x_1\}) = 0$. Συνεπώς, $\mathbb{P}(\{x_2, \ldots, x_n\}) = 1$. Το $\{x_2, \ldots, x_n\}$ είναι διακριτό και άρα κλειστό, οπότε το $supp = \{x_1, \ldots, x_n\}$ δεν είναι το μικρότερο, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο αποδίδεται μοναδιαία πιθανότητα. Ατοπο διότι μας έχει δοθεί ότι $supp = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Προηγουμένως δείξαμε ότι

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{x_1\}) + \mathbb{P}(A \cap \{x_2\}) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap \{x_n\})$$

Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:

- $x_i \in A \Rightarrow A \cap \{x_i\} = \{x_i\}$
- $x_i \notin A \Rightarrow A \cap \{x_i\} = \emptyset$

Συνεπώς, $A \cap \{x_i\} = \begin{cases} \{x_i\}, & \text{αν } x_i \in A \\ \emptyset, & \text{αν } x_i \notin A \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap \{x_i\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{x_i\}) > 0, & \text{αν } x_i \in A \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0, & \text{αν } x_i \notin A \end{cases}$$

Συνοψίζοντας, για να περιγράψουμε μια διακριτή κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει

1. να ορίσουμε το στήριγμά της
2. να ορίσουμε τι πιθανότητα αποδίδει η κάθε κατανομή σε κάθε στοιχείο του στηρίγματος

No. Date

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα που αποδίδει η εκάστοτε κατανομή σε κάθε ενδεχόμενο A της συλλογής μετρήσιμων υποσυνόλων (Σ_{Ω}) του Ω.

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τα 1., 2., τότε για να επιβεβαιώσουμε ότι η κατανομή είναι διακριτή και καλώς ορισμένη θα πρέπει:

1. Το στήριγμά της να είναι διακριτό
2. $\forall x_i \in supp$ θα πρέπει να ισχύει $\mathbb{P}(\{x_i\}) > 0$
3. $\mathbb{P}(supp) = 1$

Άσκηση

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$, μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$ και συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ όπου:

$\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = p$, $\mathbb{P}(\{b\}) = q$, όπου $p, q \in (0, \frac{1}{2})$

$$X(w) = \begin{cases} 1, & \text{αν } w = a \\ 2, & \text{αν } w = b \\ 3, & \text{αν } w = c \end{cases}$$

1. Βρείτε το Σ_Ω
2. Αν τα a, b, c είναι ξένα μεταξύ τους, βρείτε το $\mathbb{P}(\{c\})$ έτσι ώστε η $\mathbb{P}$ να είναι μέτρο πιθανότητας
3. Δείξτε ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή
4. Βρείτε την $\mathbb{P}^*$ που προκύπτει από μεταφορά της $\mathbb{P}$ μέσω της X.
5. Βρείτε το στήριγμα της $\mathbb{P}^*$. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

No. Date

1. Αφού το Ω είναι πεπερασμένο, τότε κάθε υποσύνολό του θα είναι μετρήσιμο, άρα και το δυναμοσύνολό του Σ_Ω

$$\Sigma_\Omega = 2^n = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$$

2. Από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας, για να είναι η $\mathbb{P}$ συνάρτηση πιθανότητας θα πρέπει να ισχύει $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Όμως $\Omega = \{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$
Από τον ορισμό θα ισχύει

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{c\}) = 1 - p - q > 0$$

3. Σύμφωνα με τον ορισμό η $X: \Omega \to \mathbb{R}$ θα είναι τυχαία μεταβλητή ανν $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$

Επομένως, για κάθε $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ έχουμε:

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } 1,2,3 \notin A \\ \Omega, & \text{αν } 1,2,3 \in A \\ \{a\}, & \text{αν } 1 \in A,\ 2,3 \notin A \\ \{b\}, & \text{αν } 2 \in A,\ 1,3 \notin A \\ \{c\}, & \text{αν } 3 \in A,\ 1,2 \notin A \\ \{a,b\}, & \text{αν } 1,2 \in A,\ 3 \notin A \\ \{a,c\}, & \text{αν } 1,3 \in A,\ 2 \notin A \\ \{b,c\}, & \text{αν } 2,3 \in A,\ 1 \notin A \end{cases}$$

4. Η συνάρτηση από μεταφορά $\mathbb{P}^*$ ορίζεται ως

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right), \quad \forall \; A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

Επομένως

$$\mathbb{P}^*(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 & , \; 1,2,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1 & , \; 1,2,3 \in A \\ \mathbb{P}(\{a\}) = p & , \; 1 \in A, \; 2,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b\}) = q & , \; 2 \in A, \; 1,3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{c\}) = 1-p-q & , \; 3 \in A, \; 1,2 \in A \\ \mathbb{P}(\{a,b\}) = p+q & , \; 1,2 \in A, \; 3 \notin A \\ \mathbb{P}(\{a,c\}) = 1-q & , \; 1,3 \in A, \; 2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b,c\}) = 1-p & , \; 2,3 \in A, \; 1 \notin A \end{cases}$$

5. Από το προηγούμενο ερώτημα σε $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ για το οποίο ισχύει $A \cap 1,2,3$, αποδίδεται μοναδιαία πιθανότητα. Επομένως, το μικρότερο τέτοιο σύνολο είναι το $\{1,2,3\}$ το οποίο είναι κλειστό. Άρα $\operatorname{supp} \mathbb{P}^* = \{1,2,3\}$

No. Date

Άσκηση

Τώρα ορίστε την πραγματική συνάρτηση $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ όπου

$$Y(w) = \begin{cases} 1, & \text{αν } w = a \\ 2, & \text{αν } w = b \\ 2, & \text{αν } w = c \end{cases}$$

Να απαντήσετε στα ερωτήματα 1, 3, 4, 5 της προηγούμενης άσκησης.

Σύμφωνα με τον ορισμό η $Y: \Omega \to \mathbb{R}$ θα είναι τυχαία μεταβλητή ανν $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ $\quad Y^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$

Για $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ έχουμε: $Y^{-1}(A) = \{w : Y(w) \in A\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } 1,2 \notin A \\ \{a\}, & \text{αν } 1 \in A, 2 \notin A \\ \{b,c\}, & \text{αν } 1 \notin A, 2 \in A \\ \Omega, & \text{αν } 1,2 \in A \end{cases}$

όπου $\Sigma_\Omega = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\}$

και $\Omega = \{a, \{b,c\}\}$, $\mathbb{P}(\{a\}) = p$, $\mathbb{P}(\{b,c\}) = 1-p$

Συνάρτηση πιθανότητας που προκύπτει από μεταφορά της $\mathbb{P}$ μέσω της Y

$$\mathbb{P}^*(A) := \mathbb{P}(Y^{-1}(A)) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0, & \text{αν } 1,2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{a\}) = p, & \text{αν } 1 \in A,\ 2 \notin A \\ \mathbb{P}(\{b,c\}) = 1-p, & \text{αν } 1 \notin A,\ 2 \in A \\ \mathbb{P}(\Omega) = 1, & \text{αν } 1,2 \in A \end{cases}$$

$\text{supp } \mathbb{P}^* = \{1,2\}$