Κατασκευή Συναρτήσεων Πιθανότητας

Έστω ότι έχουμε έναν πεπερασμένο δειγματικό χώρο Ω που περιέχει n στοιχεία : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

Έστω επίσης ο χώρος ενδεχομένων Σ_Ω

Με ποιον τρόπο μπορούμε να προσάψουμε πιθανότητες σε κάθε ενδεχόμενο $A \in \Sigma_\Omega$; Εναλλακτικά, πως μπορούμε να κατασκευάσουμε συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P} : \Sigma_\Omega \to [0, 1]$;

Βήμα 1: Θεωρούμε όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Σ_Ω, δηλαδή $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$

Βήμα 2: ορίζουμε σε κάθε ένα από αυτά μια πιθανότητα $\mathbb{P}(\{\omega_j\})$, $j = 1, 2, \dots, n$ με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_j\}) = 1$$

Αυτός ο ορισμός πιθανοτήτων για καθένα από τα ενδεχόμενα είναι επαρκής για να ορίσει τη συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P} : \Sigma_\Omega \to [0, 1]$ σε όλο τον χώρο ενδεχομένων Σ_Ω.

Συνεπώς, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in \Sigma_\Omega$ (π.χ. $A = \{\omega_1, \omega_2\}$) αρκεί να βρούμε πόσα και ποια ω_j περιέχει και να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων $\mathbb{P}(\{\omega_j\})$, δηλαδή

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega_j\})$$

Παράδειγμα Συνάρτησης Πιθανότητας

Ρίψη Νομίσματος

Σε αυτή την περίπτωση ο δειγματικός χώρος $\underline{\Omega}$ είναι πεπερασμένος γιατί περιέχει δύο στοιχεία: $\underline{\Omega} = \{K, \Gamma\}$

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε ως χώρο ενδεχομένων το δυναμοσύνολο του $\underline{\Omega}$, $\Sigma_{\underline{\Omega}} = \{\{K\}, \{\Gamma\}, \underline{\Omega}, \emptyset\}$ (βλ. φρ. 1)

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον χώρο ενδεχομένων

Βήμα 1: Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του $\Sigma_{\underline{\Omega}}$ είναι τα $\{K\}$ και $\{\Gamma\}$

Βήμα 2: Προσάπτουμε έναν αριθμό $\mathbb{P}(\{K\})$, $\mathbb{P}(\{\Gamma\})$, όπου $0 \leq P(\{K\}), P(\{\Gamma\}) \leq 1$ σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\mathbb{P}(\underline{\Omega}) = \mathbb{P}(\{K\}) + \mathbb{P}(\{\Gamma\}) = 1$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \in \Sigma_{\underline{\Omega}}$ το άθροισμα των πιθανοτήτων των στοιχειωδών ενδεχομένων που ανήκουν στο A:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in A} \mathbb{P}(\{j\})$$

Εχουμε $\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\underline{\Omega}) = 1$

Επίσης, για οποιαδήποτε ενδεχόμενα του $\Sigma_{\underline{\Omega}}$, τα οποία είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους.

Συνεπώς, η συνάρτηση $\mathbb{P}: \Sigma_{\underline{\Omega}} \to [0, 1]$ ορισμένη ως

$\mathbb{P}(\{K\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\underline{\Omega}) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

είναι συνάρτηση πιθανότητας

Ορισμός: Αντίστροφη Εικόνα

Έστω συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη εικόνα του A (μέσω της f), ως το σύνολο των σημείων του Ω τα οποία απεικονίζονται μέσω της f στο A.

$$f^{-1}(A) = \{ \omega \in \Omega : f(\omega) \in A \}$$

Παραδείγματα

Έστω $\Omega = \mathbb{R}$ και $f(\omega) = \omega^2$

- Όταν $A = \{0\}$ η αντίστροφη εικόνα είναι:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{ \omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 0 \}$$

$$\{ \omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 0 \}$$

$$= \{0\}$$

- Όταν $A = \{1\}$: $f^{-1}(\{1\}) = \{ \omega \in \mathbb{R} : f(\omega) = 1 \}$

$$= \{ \omega \in \mathbb{R} : \omega^2 = 1 \}$$

$$= \{-1, 1\}$$

© NEXT Co, GREECE

- Όταν $A=[1,4]$: $f^{-1}([1,4]) = \{w \in \mathbb{R} : f(w) \in [1,4]\}$

$= \{w \in \mathbb{R} : w^2 \in [1,4]$

$= [-2,-1] \cup [1,2]$

- Όταν $A=(-\infty,0)$: $f^{-1}((-\infty,0)) = \{w \in \mathbb{R} : f(w) \in (-\infty,0)\}$

$= \{w \in \mathbb{R} : w^2 \in (-\infty,0)\}$

$= \emptyset$ διότι $w^2 \not< 0$

- Όταν $A=\mathbb{R}$: $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{w \in \mathbb{R} : f(w) \in \mathbb{R}\}$

$= \{w \in \mathbb{R} : w^2 \in [0,+\infty)\}$

$= \mathbb{R}$

- Όταν $A=\emptyset$: $f^{-1}(\emptyset) = \{w \in \mathbb{R} : f(w) = \emptyset\}$

$= \{w \in \mathbb{R} : w^2 = \emptyset\}$

$= \emptyset$

Τυχαίες Μεταβλητές

Η στατιστική ασχολείται με τη μελέτη φαινομένων που υπόκεινται σε αβεβαιότητα, π.χ. το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού ή η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής δεν μπορούν να προβλεφθούν.

Τέτοιες μεταβλητές ονομάζονται τυχαίες ή στοχαστικές.

Η τυχαία μεταβλητή X ορίζεται σε κάποιο σύνολο Ω (δειγματικός χώρος). Στην περίπτωση του ζαριού έχουμε $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και στην περίπτωση της μετοχής έχουμε $\Omega = [-0.10,\ 0.10]$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου αντιστοιχούμε μια πιθανότητα p_i και συμβολίζουμε ως εξής:

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

p_i είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει την τιμή x_i.

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή X είναι μια πραγματική συνάρτηση η οποία δημιουργεί αντιστοιχία μεταξύ των μετρήσιμων υποσυνόλων ($\mathcal{F}$ ή Σ_Ω) του Ω (πεδίο ορισμού της) και των πραγματικών αριθμών (πεδίο τιμών της). Πρόκειται για μία έννοια πολλαπλά χρήσιμη διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομών στους πραγματικούς, επειδή συνδέεται με την έννοια του δείγματος στη στατιστική επαγωγή κ.ο.κ.

Ορισμός

Έστω οι μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ_Ω) και $(\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$. Τυχαία μεταβλητή θα ονομάζεται όποια συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$ τότε $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$. Δηλαδή, οτιδήποτε μπορεί να μετρηθεί στο $\mathbb{R}$ έχει προκύψει ως (συνάρτηση) εικόνα μέσω της X από κάτι που μπορεί να μετρηθεί στον Ω. Ουσιαστικά, η τυχαία μεταβλητή μετασχηματίζει ένα μετρήσιμο χώρο σε ένα άλλο μετρήσιμο χώρο και μας επιτρέπει να ορίσουμε νέες πιθανότητες.

Παραδείγματα

1. $\underline{\Omega} = \{a, b\}$, $\Sigma_{\underline{\Omega}} = \{\{a\}, \{b\}, \emptyset, \underline{\Omega}\}$
και τ.μ. $X : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$

όπου $X(a) = 0$ και $X(b) = 1$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } 0, 1 \notin A \\ \{a\}, & \text{αν } 0 \in A, 1 \notin A \\ \{b\}, & \text{αν } 0 \notin A, 1 \in A \\ \underline{\Omega}, & \text{αν } 0, 1 \in A \end{cases}$

Συνεπώς, αφού $\emptyset, \underline{\Omega}, \{a\}, \{b\} \in \Sigma_{\underline{\Omega}}$ η X είναι τυχαία μεταβλητή

2. $\underline{\Omega} = \{K\}$, $\Sigma_{\underline{\Omega}} = \{\emptyset, \underline{\Omega}\}$
και τ.μ. $X : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$

όπου $X(K) = C$

Αν $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε $X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } C \notin A \\ \underline{\Omega}, & \text{αν } C \in A \end{cases}$

Έστω $C = 6$. Να βρεθεί η $X^{-1}(A)$

για $A = (-4, -2) \cup (0, 3) \Rightarrow X^{-1}(A) = \emptyset$, $6 \notin A$
$B = (4, 5) \cap \{6\} \Rightarrow X^{-1}(B) = \emptyset$, $6 \notin B$
$\Gamma = (0, 6] \Rightarrow X^{-1}(\Gamma) = \underline{\Omega}$, $6 \in \Gamma$

Παρατηρήσεις

1. Όταν το Ω είναι πεπερασμένο, οπότε το Σ_Ω μπορεί να επιλεγεί ώστε να εμπεριέχει όλα τα υποσύνολα του Ω, τότε κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή αφού αν $A \in \Sigma_\mathbb{R}$ το $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ οπότε και ανήκει στο Σ_Ω.

2. Υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις που δεν είναι τυχαίες μεταβλητές. π.χ. όταν $(\Omega, \Sigma_\Omega) = (\mathbb{R}, \Sigma_\mathbb{R})$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A \notin \Sigma_\mathbb{R}$ (είναι μη μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών).

3. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε συνεχής, παραγωγίσιμη κ.ο.κ. πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, οι "οικείες" στην μαθηματική ανάλυση που έχουμε συναντήσει συναρτήσεις, έχουν την παραπάνω ιδιότητα.