Διάλεξη 01/04/20

Στο φροντιστήριο θα κατασκευαστούν παραδείγματα κατανομών πιθανότητας σε άλλες περιπτώσεις όπου το Ω πεπερασμένο.

Βάσει των όσων έχουμε πει μέχρι στιγμής είναι εύκολο να μελετήσουμε κατανομές πιθ. επί του $\mathbb{R}$;

Δεν έχουμε μελετήσει με ακρίβεια το $\Sigma_{\mathbb{R}}$. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται να αναπτυχθούν "οικείες" έννοιες βάσει των οποίων θα μπορούμε να περιγράφουμε τέτοιες κατανομές αποφεύγοντας τον ορισμό ("οικείες" π.χ. συναρτήσεις $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

Μήπως υπάρχουν κάποιες κατανομές πιθ. επί του $\mathbb{R}$ που μπορούμε να περιγράψουμε "εύκολα" χωρίς να χρειάζονται τέτοιες έννοιες; Μήπως έχουμε ήδη δει παράδειγμα χωρίς να το έχουμε επισημάνει;

Παράδειγμα που έχουμε ήδη δει. ($\Omega=\mathbb{R}$)

Θυμηθείτε ότι σε προηγούμενη διάλεξη έχουμε μελετήσει την εξής συνολοσυνάρτηση $Q: \Sigma_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$

→ στην προηγούμενη τότε την είχαμε ορίσει στο δυναμοσύνολο δηλ. είναι εύκολο να την περιορίσουμε στο $\Sigma_{\mathbb{R}}$.

Την είχαμε ορίσει ως εξής:

$$A \in \Sigma_{\mathbb{R}} \qquad Q(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A \end{cases}$$

Δηλ. για να την υπολογίσουμε στο A ελέγχουμε αν το $0 \in A$ ή $0 \notin A$. Εφόσον ο έλεγχος αυτός γίνεται εύκολα η Q είναι "εύκολα" υπολογίσιμη.

Μήπως η Q είναι κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$;

Για να είναι θα πρέπει να ικανοποιεί τις i. θετικότητα, ii τυποποίηση και iii την αριθμήσιμη ή "μετρητού πλήθους" προσθετικότητα.

Το i είναι προφανές. Επειδή $0 \in \mathbb{R}$, $Q(\mathbb{R})=1$ άρα ισχύει το ii. Για το iii έχουμε το εξής: έστω $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma_{\mathbb{R}}$
[με $A_i \cap A_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$]
Τι σχέση έχει $Q(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots)$ (α)

με $Q(A_1) + Q(A_2) + \dots + Q(A_n) + \dots$ (β)

A. Έστω ότι το $0 \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ (ε1)

Ο ανήκει σε ένα και μοναδικό από τους παράγοντες αυτής της ένωσης, έστω στο A_i για κάποιο i.

Οπότε $0 \notin A_j \ \forall j \neq i$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$Q(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = 1$$

Ταυτόχρονα έχουμε $Q(A_i) = 1$, ενώ $Q(A_j) = 0 \ \forall j \neq i$

$$1 = Q(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots)$$

$$1 = \underset{0}{Q(A_1)} + \underset{0}{Q(A_2)} + \dots + \underset{1}{Q(A_i)} + \dots + \underset{0}{Q(A_n)} + \dots$$

B. Έστω ότι $0 \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ (ε2)

$0 \notin A_1$ κ' $0 \notin A_2$ κ' $0 \notin A_3$ κ ... $0 \notin A_n$ ...

Οπότε τότε $Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = 0$

$$\underbrace{Q(A_1)}_{0} + \underbrace{Q(A_2)}_{0} + \ldots + \underbrace{Q(A_n)}_{0} + \ldots = 0$$

Επομένως ισχύει η iii αφού σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) =$

$Q(A_1) + Q(A_2) + \ldots + Q(A_n) + \ldots$

Συνεπώς πράγματι η Q είναι μια καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.

Συνεπώς έχουμε παράδειγμα κατανομής πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ (συνεπώς μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχουν τέτοιες κατανομές) και παρατηρούμε ότι κάποιες από αυτές μπορεί να είναι δυνατόν να περιγράφονται "εύκολα" (δηλ. χωρίς την ανάγκη εισαγωγής νέων εννοιών).

Κεφάλαιο Β. Κατανομές Πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$

— Προκειμένου να μελετούμε τέτοιες κατανομές θα χρειαστεί να ορίσουμε έννοιες οικειότερες σε εμάς που μας επιτρέπουν να αναπαριστούμε κατανομές πιθανότητας αποφεύγοντας τα παραπάνω. Έτσι π.χ. θα δούμε τις έννοιες της αθροιστικής συνάρτησης ($\to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), της αναπαράστασης κατανομής ως ολοκλήρωμα, κ.λ.π. Περιμένουμε ότι ιδιότητες των κατανομών που έχουμε ήδη μελετήσει γενικά (π.χ. μονοτονία) θα αντανακλώνται σε "παρεμφερείς" ιδιότητες των αναπαραστάσεων (π.χ. θα δούμε ότι οι αθροιστικές συναρτήσεις είναι αύξουσες).

- Είδαμε ότι υπάρχουν κατανομές πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$ που μπορούν να περιγραφούν χωρίς να χρειάζονται περαιτέρω έννοιες. Γιατί συμβαίνει κάτι τέτοιο; *

Ξεκινάμε την μελέτη μας εισάγοντας την έννοια του στηρίγματος μιας κατανομής πιθανότητας επί του $\mathbb{R}$.

Η έννοια αυτή θα μας βοηθήσει:

α. στο να κατηγοριοποιήσουμε τις κατανομές ώστε να διευκολύνουμε την μελέτη τους.

β. θα διευκολύνει στον υπολογισμό πιθανοτήτων που αποδίδει η εκάστοτε κατανομή σε κάποιες τουλάχιστον περιπτώσεις.

(θα μας βοηθήσει στο να απαντήσουμε στο *)

Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια του στηρίγματος μας χρειάζεται μια μικρή προεργασία που θα αφορά:

α. το πότε το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται κλειστό

β. το πότε το $A \subseteq \mathbb{R}$ θα ονομάζεται διακριτό (κ.ο.κ.);