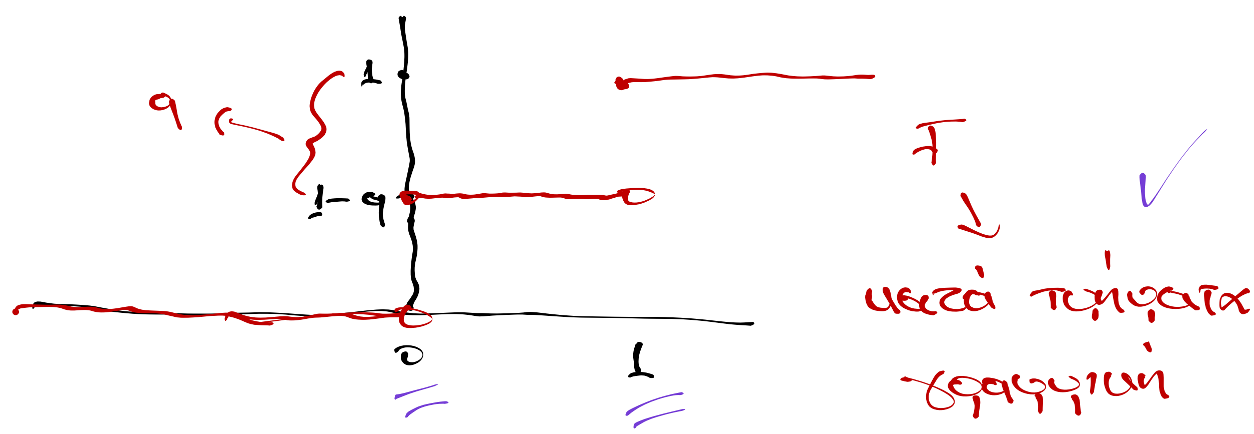
Διάλεξη 29/04/20

- Είδαμε τον ορισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας στο $\mathbb{R}$: αν $\mathbb{P}$ κατανομή τότε η αθροιστική αυτής $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]), \quad x\in\mathbb{R}$$

- η F πάντοτε είναι καλώς ορισμένη πραγματική συνάρτηση
- π.χ. αν $\mathbb{P} = Ber(q)$ τότε

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\leq x<1 \\ 1, & 1\leq x \end{cases}$$



- Θα δούμε ότι η F αναπαριστά την $\mathbb{P}$

δηλ.
- γνώση της F $\iff$ γνώση της $\mathbb{P}$
- οι ιδιότητες που έχει η $\mathbb{P}$ θα πρέπει να αντανακλώνται σε ιδιότητες της F

- Χρησιμότητα: Σε διάφορες περιπτώσεις η F "πιο εύκολη" διαχείριση από την $\mathbb{P}$, αφού είναι συνάρτηση $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Χαρακτηριστικές ιδιότητες της F (θα μας οδηγήσουν σε έναν δείκτη που θα επιβεβαιώνει τα παραπάνω)

1. Η F είναι αύξουσα $\left(x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2) \right)$
(όχι αναγκαστικά γν. αύξουσα)

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $F(x_1) - F(x_2) \geq 0$. Έχουμε

$$F(x_1) - F(x_2) = \mathbb{P}((-\infty, x_1]) - \mathbb{P}((-\infty, x_2]) \geq 0$$

Επίσης $x_1 > x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \xrightarrow{\text{μονοτονία της } \mathbb{P}}$

$A \supseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}((-\infty, x_1]) \geq \mathbb{P}((-\infty, x_2]) \Leftrightarrow \mathbb{P}((-\infty, x_1]) - \mathbb{P}((-\infty, x_2]) \geq 0$$

Επομένως η F είναι αύξουσα επειδή η $\mathbb{P}$ μονότονη.

(παράδειγμα του πως ιδιότητα της $\mathbb{P}$ ανταναλκλάται σε ιδιότητα της F)

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ κ' $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Επιφύλαξη: η ιδιότητα αυτή βασίζεται σε μια ιδιότητα συνέχειας της $\mathbb{P}$ που δεν έχουμε μελετήσει και οφείλεται στην «άπειρου πλήθους» προσθετικότητα. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της & θεωρώντας αυτή την ιδιότητα δεδομένη

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}((-\infty,x]) = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n]\right) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

γίνεται χρήση της συνέχειας που αποσιωπάται

Έχουμε ότι
$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n] = (-\infty,0] \cup (-\infty,1] \cup (-\infty,2] \cup \ldots \cup (-\infty,n] \cup \ldots = \,;$$

Η ένωση αυτή θα ισούται με το $\mathbb{R}$· αρκεί να δείξουμε ότι αν $x\in\mathbb{R}$ τότε το x θα βρίσκεται στην ένωση. Αλλά για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$x\in(-\infty,n]$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$.

Αλλά ξέρω ότι αν $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει φυσικός n^* με $x\le n^* \iff x\in(-\infty,n^*]$ συνεπώς το x θα βρίσκεται σε αυτό το στοιχείο της ένωσης που αντιστοιχεί στο $n=n^*$.

Οπότε το x θα ανήκει στην ένωση. Αφού το x αυθαίρετο, κάθε πραγματικός θα βρίσκεται στην ένωση.

Οπότε $\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n] = \mathbb{R}$. Άρα $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(-\infty,n]\right) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

Αντίστοιχως,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}((-\infty,x]) = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]\right)$$

συνέχεια της $\mathbb{P}$ που αποδείξαμε

$$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Έχουμε $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n] = (-\infty,0]\cap(-\infty,-1]\cap(-\infty,-2]\cap\ldots$
$\ldots\cap(-\infty,-n]\cap\ldots$

Στην τομή δεν βρίσκεται κανένας πραγματικός αριθμός (δηλ. η τομή ισούται με το $\emptyset$). Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: Έστω ότι $x\in\mathbb{R}$ κ' το x βρίσκεται στην τομή. Αυτό σημαίνει ότι $x\in(-\infty,-n]$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Αυτό όμως δεν γίνεται αφού αν $x\in\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $n^*\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-n^*<x \iff x\notin(-\infty,-n^*]$ άρα το x δεν βρίσκεται τουλάχιστον στον παράγοντα της τομής που αντιστοιχεί στο $n=n^*$. Άρα το $x\notin\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]$. Αφού το x αυθαίρετο, κανένας πραγματικός δεν βρίσκεται στην τομή. Επομένως $\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]=\emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(-\infty,-n]\right)$
$=\mathbb{P}(\emptyset)=0.$

3. Η F είναι από δεξιά συνεχής.

Προεργασία: Αν έχουμε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

i. η g θα είναι από δεξιά συνεχής στο x

ανν $\lim_{y\to x^+} g(y) = g(x)$ $\quad \left(y\to x^+ \iff y\to x \text{ κ' } y\geq x\right)$

η g θα είναι από δεξιά συνεχής αν είναι από δεξιά συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. η g θα είναι από αριστερά συνεχής στο x αν $\lim\limits_{y\to x^-} g(y)=g(x)$ $\left(y\to x^- \Leftrightarrow \begin{matrix} y\to x \\ \text{κ' } y\le x\end{matrix}\right)$

η g θα είναι από αριστερά συνεχής αν είναι από αριστερά συνεχής σε κάθε x.

iii. η g συνεχής στο x αν είναι ταυτόχρονα από δεξιά κ' από αριστερά συνεχής στο x, δηλ.

$$\lim_{y\to x^-} g(y) = g(x) = \lim_{y\to x^+} g(y)$$

Η g συνεχής αν συνεχής σε κάθε x. $\square$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η F είναι από δεξιά στο x όπου το x αυθαίρετο.

$$\lim_{y\to x^+} F(y) = \lim_{y\to x^+} \mathbb{P}((-\infty,y]) = \ldots = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,x+\tfrac{1}{n}]\right)$$

προκύπτει από την ιδιότητα της συνέχειας της $\mathbb{P}$ κ' αποδεικνύεται

$$= \mathbb{P}((-\infty,x]) = F(x).$$

Έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,x+\frac{1}{n}] = (-\infty,x+1] \cap (-\infty,x+\frac{1}{2}] \cap (-\infty,x+\frac{1}{3}] \cap \ldots \cap (-\infty,x+\frac{1}{n}] \cap \ldots$

Έχουμε ότι καθώς $n\to+\infty$, $\underline{x+\frac{1}{n}\to x}$ (από δεξιά).

Η τομή θα ισούται με το $(-\infty,x]$ αφού:

αν $z\le x$ έχουμε ότι $z\in(-\infty,x+\frac{1}{n}]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$.

αν $z > x$ και αφού $x+\frac{1}{n} \to x$ θα υπάρχει $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο

ώστε $x+\frac{1}{n^*} < z \Rightarrow z \notin (-\infty, x+\frac{1}{n^*}]$ και αφού αυτό

το διάστημα είναι στοιχείο της τομής (αντιστοιχεί στο

$n=n^*$), το z δεν μπορεί να ανήκει στην τομή.

Άρα κάθε αριθμός $\leq x$ θα βρίσκεται στην τομή κ' κάθε

αριθμός $> x$ <u>δεν</u> θα βρίσκεται στην τομή. Άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]$

$= (-\infty, x] \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x+\frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$.

□.