Διάλεξη 20/05/20

## Συνέχεια Παραδειγμάτων:

**Παράδειγμα 7.** $N(\mu, v)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $v > 0$

- $\text{supp} = \mathbb{R}$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$, $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2v}\right)$

Προφανώς η $f$ υπάρχει και εξ' ορισμού είναι η

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z-\mu)^2}{v}\right).$$

Για την τυπική κανονική κατανομή ($\mu=0$, $v=1$ - $N(0,1)$) η συνάρτηση πυκνότητας παίρνει την μορφή:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

$\varphi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(-z)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) = \varphi(z)$ οπότε η

$\varphi$ είναι άρτια συνάρτηση.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([\alpha, +\infty)) = \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi(z)\,dz =$ κάνουμε την αντικατάσταση $y = -z \Leftrightarrow z = -y$, $dz = -dy$

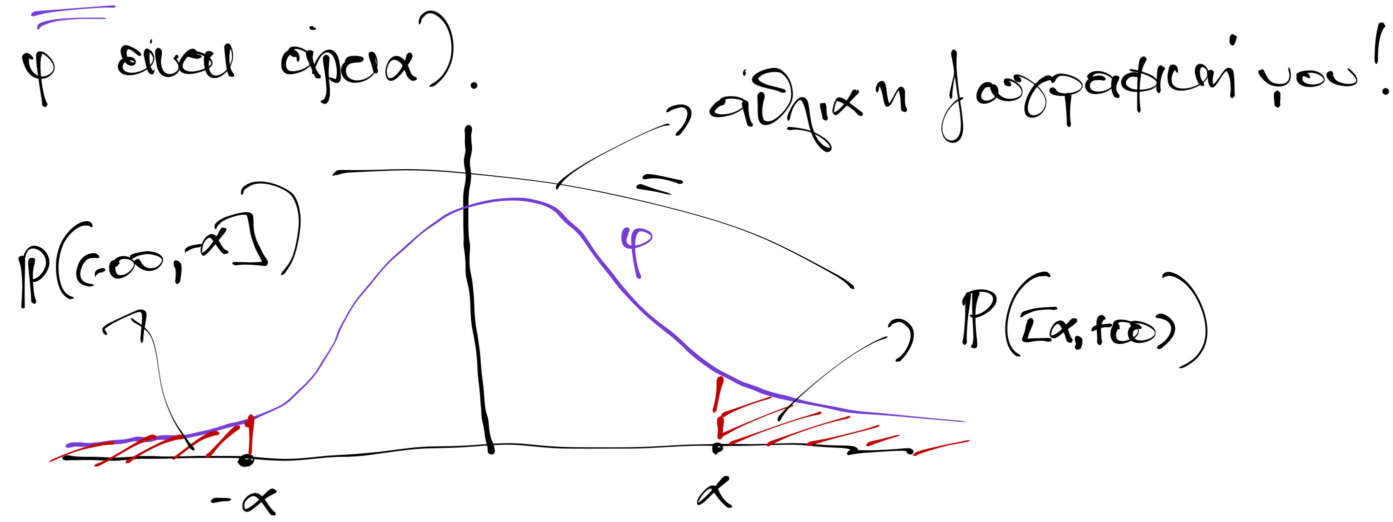
$= \int_{-\alpha}^{-\infty} \varphi(-y)(-dy) = -\int_{-\alpha}^{-\infty} \varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi(y)\,dy = \mathbb{P}((-\infty, -\alpha])$

↳ αρτιότητα της $\varphi$

Οπότε $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ εξαιτίας της αρτιότητας της $\varphi$, για την $N(0,1)$

$$\mathbb{P}([\alpha,+\infty)) = \mathbb{P}((-\infty,-\alpha])$$ (συμμετρία που σχετίζεται

με το ότι η $\varphi$ είναι άρτια).




Επομένως το παραπάνω είναι παράδειγμα του πως ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας (εδώ η αρτιότητα της $\varphi$) είναι δυνατόν να αντανακλούν ιδιότητες της κατανομής (εδώ η συμμετρία της $\mathbb{P}$)

Άσκηση. Να δείξετε ότι η ιδιότητα της συμμετρίας ισχύει γενικά για την $N(0,v)$, $v>0$.

3. Οι κατανομές πιθανότητας πάνω στους πραγματικούς ως διαδικασίες ολοκλήρωσης.

* Παίρνοντας αφορμή από την συνάρτηση πυκνότητας για την οποία είδαμε ότι μέσω αυτής είναι δυνατόν να υπολογίζουμε πιθανότητες ως ολοκληρώματα, η από την αθροιστική συνάρτηση όπου κάποιοι υπολογισμοί πιθανοτήτων μέσω αυτής μας θύμισαν το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού, αν $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κατάλληλη συνάρτηση, έχει νόημα το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g\, d\mathbb{P} \;;$$

Το παραπάνω είναι δυνατόν να οριστεί για όποια $\mathbb{P}$ και εφόσον η $g$ έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής (φροντιστήριο). Για να το ορίσουμε στην πληρότητά του το παραπάνω μας χρειάζονται έννοιες ολοκληρωμάτων που ξεφεύγουν του εύρους του μαθήματος. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε έναν περιορισμένο κ' αναγκαστικά ελλιπή ορισμό του $\int_{-\infty}^{+\infty} g\,d\mathbb{P}$ που θα είναι προσαρμοσμένος στα όσα ξέρουμε.

**Ορισμός.** Έστω $\mathbb{P}$ είναι κατανομή πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, κ' η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Τότε το ολοκλήρωμα της $g$ ως προς την $\mathbb{P}$ (ή η αναμενόμενη τιμή της $g$ ως προς την $\mathbb{P}$) ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,d\mathbb{P} := \begin{cases} \sum_{i\in \mathrm{supp}} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) f(z)\,dz, & \text{η } f \text{ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της } \mathbb{P}. \end{cases}$$

## Σχόλια κ' ιδιότητες:

1. Ο ορισμός είναι περιορισμένος. Η $\mathbb{E}(g)$ έχει νόημα όποια κ' αν είναι η $\mathbb{P}$. Ακόμα όμως κ' αυτός ο περιορισμένος ορισμός είναι δυνατόν να περιλαμβάνει περιπτώσεις που δεν μας είναι οικείες, π.χ. $\mathbb{P}$ διακριτή με υπεραριθμήσιμο supp οπότε το άθροισμα είναι απειροπληθές ή περιπτώσεις που το $\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f(z)\,dz$ δεν είναι το ολοκλήρωμα Riemann όπως το ξέρουμε από τον λογισμό μας. Τέτοιες περιπτώσεις είτε θα τις αποφεύγουμε, είτε θα τις προσαρμό-

δούμε στα όσα αναφέραμε.

2. Δεν θα ασχοληθούμε ρητά με το αν η συνάρτηση $g$ έχει την ιδιότητα της τυχαίας μεταβλητής. Όποια $g$ συναντήσουμε παρακάτω θα έχει επιλεγεί ώστε να ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα.

3. Η $\mathbb{E}(g)$ εξαρτάται τόσο από την $g$ όσο κ' από την $\mathbb{P}$. Ο συμβολισμός $\mathbb{E}(g)$ συσκοτίζει την εξάρτηση από την $\mathbb{P}$. Καλό είναι να το θυμόμαστε.

4. Θα λέμε ότι η $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει αν $\mathbb{E}(g)\in\mathbb{R}$. Είναι δυνατόν (θα δούμε σχετικό παράδειγμα) η $\mathbb{E}(g)$ να μην υπάρχει για κάποιες $g$ κ' $\mathbb{P}$ εξαιτίας απειρισμών, απροσδιοριστιών κ.ο.κ. στους υπολογισμούς βάσει του ορισμού.

Στην περίπτωση που η $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει η $g$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη (integrable) ως προς την $\mathbb{P}$. (όταν η $\mathbb{P}$ διακριτή με πεπερασμένο supp τότε η $\mathbb{E}(g)$ υπάρχει $\forall g$ τυχαία μεταβλητή)

5. Έστω ότι η $g$ είναι σταθερή συνάρτηση, δηλ. $g(z)=c\in\mathbb{R}$ $\forall z\in\mathbb{R}$. Έχουμε ότι:

$$\mathbb{E}(g)=\begin{cases}\sum_{i\in supp} g(i)\,\mathbb{P}(\{i\}) & \text{η } \mathbb{P} \text{ διακρ.}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f(z)dz & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P}\end{cases} = \begin{cases}\sum_{i\in supp} c\,\mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακρ}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} c\,f(z)\,dz, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} c \sum_{i \in supp} \mathbb{P}(\{i\}), & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ c \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c\, \mathbb{P}(supp), & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ c \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases} = \begin{cases} c \cdot 1, & \mathbb{P} \text{ διακρ} \\ c \cdot 1, & \text{η } f \text{ pdf της } \mathbb{P} \end{cases}$$

$$= c.$$

Δηλ. όταν ολοκληρώνουμε μια σταθερή συνάρτηση ως προς κατανομή αποκτούμε την τιμή στην οποία είναι σταθερή η συνάρτηση. Επίσης κάθε σταθερή συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ως προς κάθε $\mathbb{P}$.

6. Έστω $g_1, g_2$ ολοκληρώσιμες ως προς την $\mathbb{P}$. Έστω επίσης $g_1(z) \le g_2(z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Τότε είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(g_1) \le \mathbb{E}(g_2)$ (ιδιότητα μονοτονίας της ολοκλήρωσης)

7. Έστω $g_1, g_2$ ολοκληρώσιμες ως προς την $\mathbb{P}$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$G(z) := \lambda_1 g_1(z) + \lambda_2 g_2(z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται ότι κ' η $G$ ολοκληρώσιμη ως προς την $\mathbb{P}$ κ' έχουμε

$$\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \mathbb{E}(g_1) + \lambda_2 \mathbb{E}(g_2)$$ (γραμμικότητα)

## Παραδείγματα:

1. Εκφυλισμένη στο $0$

- $\operatorname{supp} = \{0\}$ (πεπερ. πλήθος στοιχείων)
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1$

Έστω $g$ συνάρτηση όπως παραπάνω. Επειδή $\operatorname{supp}$ πεπερασμένο βάσει του σχολίου 4 η $\mathbb{E}(g)$ θα υπάρχει. (κάθε $g$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς την συγκεκριμένη $\mathbb{P}$). Θα έχουμε

$$\mathbb{E}(g) = \sum_{i \in \{0\}} g(i)\, \mathbb{P}(\{i\}) = g(0)\, \mathbb{P}(\{0\})$$

$$= g(0) \cdot 1 = g(0).$$

Σημ. Το να ολοκληρώσουμε όποια μετρήσιμη συνάρτηση ως προς την εκφυλισμένη κατανομή στο $0$ ισοδυναμεί με το να υπολογίσουμε αυτή την συνάρτηση στο $0$.