# Διάλεξη 19/05/20

## Υπενθύμιση:

* αν $\mathbb{P}$ κατανομή πιθανότητας με αθροιστική $F$ κ' υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall x\in\mathbb{R}$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz$ τότε η $f$ ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας της $\mathbb{P}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τυπικά αυτό μη και για να κατοχυρώσουμε τον ορισμό της $f$ μας χρειάζεται ένας τύπος ολοκληρώματος που διαφέρει από το ολοκλήρωμα Riemann. Δεν ασχολούμαστε με τέτοιες λεπτομέρειες. Ότι συναντήσουμε θα αφορά σε ολοκληρώματα όπως τα ξέρουμε.

* Ύπαρξη: Δεν έχει κάθε $\mathbb{P}$ συνάρτηση πυκνότητας. Π.χ. οι διακριτές κατανομές δεν έχουν αφού οι αθροιστικές τους δεν είναι καν συνεχείς.

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ:

Μοναδικότητα: Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι υπάρχει η $f$ η $F$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in\mathbb{R}$ εκτός ενδεχομένως από μετρήσιμου πλήθους σημεία. Επίσης στα σημεία που είναι παραγωγίσιμη η $F$ έχουμε ότι η $f=\frac{dF}{dx}$. Στα σημεία μη παραγωγισιμότητας της $F$ η $f$ είναι δυνατόν να παίρνει αυθαίρετα τιμές. Οπότε είναι δυνατόν να μην είναι μοναδική. Το παρασιάζω μας λέει και το πώς να υπολογίζουμε την $f$ όταν γνωρίζουμε ότι υπάρχει. Μέσω παραγώγισης στα σημεία παραγωγισιμότητας της $F$, και δίνοντας αυθαίρετα τιμές στα σημεία μη παραγωγισιμότητας. (Στα παραδείγματα που θα δούμε παρακάτω θα μας δίνονται συγκεκριμένες επιλογές της $f$ στις οποίες θα "συμφωνούμε, όχι.)

Περαιτέρω Ιδιότητες: (Έστω λοιπόν ότι η $f$ υπάρχει)

α. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η $f$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

β. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

* Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι έχουμε για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα α, β, τότε η $f$ είναι συνάρτηση πυκνότητας μοναδικής κατανομής $\mathbb{P}$.

Άσκηση: Έστω η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ ce^{x}, & x \in [0,1] \end{cases}$ όπου $c$ σταθερά. Να προσδιοριστεί, αν υπάρχει, τιμή της $c$ για την οποία η $f$ είναι συνάρτηση πυκνότητας για κάποια $\mathbb{P}$.

Βάσει το (*), προκειμένου η $f$ να είναι συνάρτηση πυκνότητας αρκεί να υπάρχει τιμή για το $c$ ώστε να ικανοποιούνται τα α, β. Για να ικανοποιείται το α, αρκεί $c \geq 0$. Για να ικανοποιείται το β θα πρέπει να υπάρχει $c$ τέτοιο ώστε

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1$. Έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{1} f(z)dz$

$+ \int_{1}^{+\infty} f(z)dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dz}_{0} + \int_{0}^{1} ce^{z}dz + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} 0dz}_{0} = c\int_{0}^{1} e^{z}dz = c\, e^{x}\Big|_{0}^{1}$

$= c[e^{1} - e^{0}] = c(e-1)$

ορισμένα ολοκληρώματα

Συνεπώς για να ισχύει η β θα πρέπει $c(e-1) = 1 \Leftrightarrow$

$$c = \frac{1}{e-1} > 0.$$

Για να ισχύουν οι α και β ταυτόχρονα θα πρέπει $c = \frac{1}{e-1}$.

Επομένως η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ \frac{1}{e-1} e^{x}, & x \in [0,1] \end{cases}$ θα είναι συνάρτηση πυκνότητας κάποιας $\mathbb{P}$. □

γ. Επειδή μέσω της $f$ και ολοκλήρωσης μπορούμε να βρίσκουμε την $F$ και επειδή μέσω της $F$ μπορούμε να βρίσκουμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$, έχουμε ότι το να γνωρίζουμε την $f$ ισοδυναμεί με το να γνωρίζουμε την $\mathbb{P}$. (Οπότε και μπορούμε να χρησιμοποιούμε την $f$ για να βρίσκουμε τις πιθανότητες που η $\mathbb{P}$ αποδίδει).

Π.χ. αν $\alpha < \beta$, $\mathbb{P}((\alpha,\beta)) \overset{*}{=} \mathbb{P}((\alpha,\beta]) \overset{*}{=} \mathbb{P}([\alpha,\beta)) \overset{*}{=}$

$\overset{*}{=} \mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \ldots$

Οι ισότητες * προκύπτουν από το ότι: η $f$ υπάρχει $\Rightarrow$ η $F$ είναι αναγκαστικά συνεχής $\Rightarrow$ η $F$ συνεχής στα $\alpha, \beta$.

$$\ldots = \underline{F(\beta) - F(\alpha)} = \int_{-\infty}^{\beta} f(z)\,dz - \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,dz.$$

Π.χ. $\mathbb{P}\big((-\infty,\alpha)\big) = \mathbb{P}\big((-\infty,\alpha]\big) = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz.$

προκύπτει όπως παραπάνω

Π.χ. $\mathbb{P}\big([\alpha,+\infty)\big) = \mathbb{P}\big((\alpha,+\infty)\big) = 1 - F(\alpha) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz}_{\text{από την } \alpha} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz}_{\text{από τον ορισμό της } f}$

προκύπτει όπως παραπάνω

$$= \int_{\alpha}^{+\infty} f(z)\,dz.$$

Δηλαδή σε αυτές περιπτώσεις ολοκληρώνουμε την συνάρτηση πυκνότητας στο διάστημα την πιθανότητα του οποίου μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε.

Π.χ. $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = 0$ επειδή η $f$ υπάρχει $\Rightarrow$ $F$ συνεχής $\Rightarrow$ $F$ συνεχής στο $\alpha$

δ. Έστω $(\alpha,\beta) \subseteq \text{supp}'$ (δηλ. το διάστημα βρίσκεται εφ' ολοκλήρου εκτός του στηρίγματος της $\mathbb{P}$). Επομένως η $F$ σταθερή στο $(\alpha,\beta)$ και άρα παραγωγίσιμη και συνεπώς $\frac{dF(x)}{dx} = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$ οπότε $f(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Δηλαδή

Εκτός του supp η $f$ θα είναι σταθερή στο $0$.

Παραδείγματα.

5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$ $(\mathrm{Unif}[\alpha,\beta])$

$$- \ \mathrm{supp} = [\alpha,\beta]$$

$$- \ F(x) = \begin{cases} 0 & , x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & , \alpha \le x < \beta \\ 1 & , \beta \le x \end{cases}$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η $f$ υπάρχει. Μας δίνεται η συνήθης εκδοχή της $f$, η οποία είναι η εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin [\alpha,\beta] \\ \frac{1}{\beta-\alpha} & , x \in [\alpha,\beta] \end{cases}$$

6. Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ $(\mathrm{Exp}(\lambda))$.

$$- \ \mathrm{supp} = [0,+\infty)$$

$$- \ F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-\exp(-\lambda x), & x \ge 0 \end{cases}$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η $f$ υπάρχει. Η συνήθης εκδοχή της $f$ για την εν λόγω κατανομή είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \end{cases}.$$