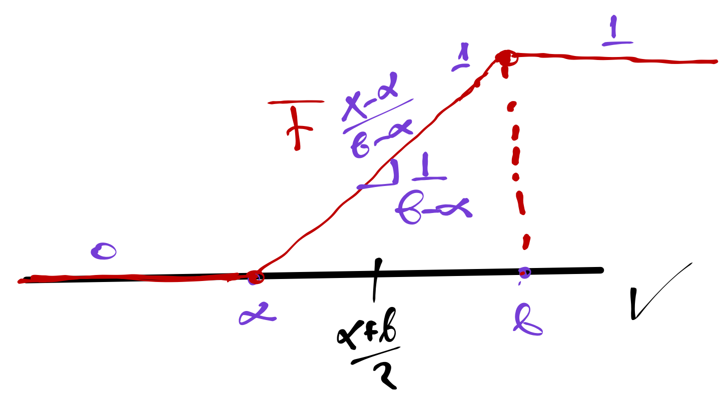
Διάλεξη 12/05/20

Εξετάζουμε παραδείγματα κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ μέσω των αθροιστικών τους. Σε κάθε παράδειγμα δίνεται η αθροιστική (και χάριν να είναι απαραίτητο και το supp), ελέγχεται το αν αυτή ικανοποιεί τις τρείς χαρακτηριστικές ιδιότητες (οπότε κ' είναι σίγουρα η αθροιστική μοναδικής κατανομής), και στην συνέχεια εξετάζονται ιδιότητες της κατανομής μέσω της αθροιστικής.

Παράδειγμα 5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$ $(\alpha<\beta)$ (Unif$[\alpha,\beta]$)

- supp $= [\alpha,\beta]$
- $F(x) = \begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha\le x<\beta \\ 1, & \beta\le x \end{cases}$ ✓



* η F προφανώς ικανοποιεί τις τρείς χαρακτηριστικές ιδιότητες. Συνεπώς βάσει του Θεωρήματος χαρακτηρισμού αναπαριστά μοναδική $\mathbb{P}$ στο $\mathbb{R}$ την Unif$[\alpha,\beta]$.

- Η Unif$[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής επειδή το στήριγμά της είναι διάστημα.
- Η F είναι συνεχής συνάρτηση οπότε για την Unif$[\alpha,\beta]$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(\{x\})=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή αφού κ' σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της η Unif$[\alpha,\beta]$ αποδίδει μηδενική πιθανότητα.

- Θέλουμε να υπολογίσουμε την $\mathbb{P}([\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}])$

Επειδή η F συνεχής, οπότε κ συνεχής στα α, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ θα έχουμε

* $\mathbb{P}([\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]) = \mathbb{P}((\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})) = \mathbb{P}([\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})) = \mathbb{P}((\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]) =$

$$= F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha-\alpha}{\beta-\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}}{\beta-\alpha} - 0 = \frac{1}{2}\,\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = 1/2 .$$

- Για κάθε διαφορετική τιμή των $\alpha<\beta$ έχουμε μια διαφορετική ομοιόμορφη κατανομή (αφού έχουμε διαφορετικό supp κ' διαφορετική F). Συνεπώς το παράδειγμα περιγράφει την οικογένεια των ομοιόμορφων κατανομών. Όταν $\alpha=0$, $\beta=1$ αποκτούμε την $Unif[0,1]$ που ονομάζεται τυπική ομοιόμορφη (standard uniform)

με — $supp = [0,1]$

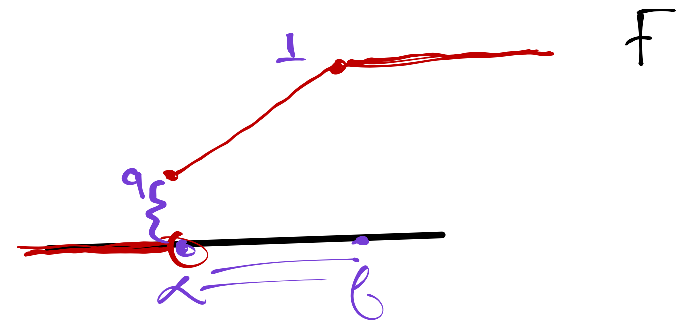
— $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$.

5'. Έστω όπως κ' προηγουμένως το $[\alpha,\beta]$, κ' $q\in(0,1)$ με

— $supp = [\alpha,\beta]$

— $F(x) = \begin{cases} 0, & x<\alpha \\ q+\left[(1-q)\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right], & \alpha\le x<\beta \\ 1, & \beta\le x \end{cases}$

Είναι η F κατανομής συνάρτηση;



* Από το γράφημα φαίνεται ότι η F ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Είναι προφανώς αύξουσα κ' έχουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$, είναι παντού συνεχής εκτός του α

και στο α έχουμε $\lim_{x\to\alpha^+} F(x) = \lim_{x\to\alpha}\left(q+(1-q)\frac{x-\alpha}{b-\alpha}\right) =$

$$= q+(1-q)\frac{1}{b-\alpha}\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha) = q+(1-q)\frac{1}{b-\alpha}\cdot(\alpha-\alpha)$$

$= q = F(\alpha)$ επομένως είναι από δεξιά συνεχής στο α, οπότε είναι από δεξιά συνεχής παντού.

- Επομένως η F είναι καλώς ορισμένη αθροιστική κ άρα αντιστοιχεί μοναδική κατανομή P.
- Η P έχει ως στήριγμα διάστημα (το $[\alpha,b]$) συνεπώς είναι συνεχής. Παρόλα αυτά η αθροιστική της συνάρτηση είναι ασυνεχής.
- Για την συγκεκριμένη P έχουμε ότι $P(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim_{x\to\alpha^-} F(x)$

$$= q+(1-q)\frac{\overbrace{\alpha-\alpha}^{=0}}{b-\alpha} - \lim_{x\to\alpha^-} 0 = q,$$ ενώ $P(\{x\})=0 \ \forall x\neq\alpha$

επειδή η F είναι συνεχής σε κάθε τέτοιο x.

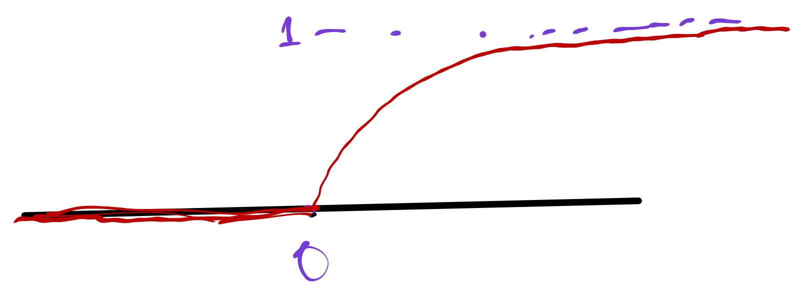
Άσκηση. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε κατανομή πιθ. με στήριγμα το $[\alpha,b]$ για την οποία όμως η αθροιστική να είναι ασυνεχής στα α, b.

6. Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ (Exponential Distribution, Exp(λ)).

διάστημα με την περιγραφόμενη αυτήν

- $supp = [0,+\infty) = \mathbb{R}^+$

- $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & 0\leq x \end{cases}$



* Προφανώς από το γράφημα η F είναι αύξουσα, είναι παντού συνεχής (συνεχής είναι κ' παντού από δεξιά συνεχής) ενώ έχουμε $\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}0=0$, $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-\lambda x})$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}\overset{\lambda>0}{=}1-e^{-\infty}=1-0=1.$$

- Επομένως η F κατά ορισμό αθροιστική, επομένως αναπαριστά μοναδική $\mathbb{P}$ που αναφέρουμε $Exp(\lambda)$.

- Αφού $supp=[0,+\infty)$ (δηλ. είναι διάστημα), η $Exp(\lambda)$ είναι συνεχής.

- Η F είναι παντού συνεχής, επομένως $\mathbb{P}(\{x\})=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

- Ενδεικτικά έχουμε $\mathbb{P}([0,1])=\mathbb{P}((0,1))=\mathbb{P}([0,1))=$ $=\mathbb{P}((0,1])$ αφού η F συνεχής στα $0,1$, και υπολογίζοντας έχουμε $\mathbb{P}([0,1])=F(1)-F(0)=1-e^{-\lambda\cdot1}-(1-e^{-\lambda\cdot0})$

$$=1-e^{-\lambda}-(1-e^{0})=1-e^{-\lambda}-(1-1)=1-e^{-\lambda}$$

- Για κάθε διαφορετική τιμή του λ έχουμε μια διαφορετική εκθετική κατανομή αφού έχουμε μια διαφορετική F. Οπότε έχουμε τόσες εκθετικές κατανομές όσες κ' οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει το λ. Συνεπώς στα παραδείγματα εξετάζουμε έπι της ουσίας την οικογένεια των εκθετικών κατανομών.

Μάλιστα ως προς το τελευταίο παρατηρούμε το εξής: Πως αλλάζει η $\mathbb{P}([0,1])$ όταν αλλάζει το λ; Έχουμε ότι $\mathbb{P}([0,1]) = 1-e^{-\lambda}$ που είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του λ και

$$\frac{d\mathbb{P}([0,1])}{d\lambda} = \frac{d(1-e^{-\lambda})}{d\lambda} = -\frac{de^{-\lambda}}{d\lambda} = -\frac{de^{-\lambda}}{d(-\lambda)}\,\frac{d(-\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= -e^{-\lambda}(-1) = e^{-\lambda} > 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

Επομένως για $0<\lambda_1<\lambda_2$ η $Exp(\lambda_2)$ αποδίδει μεγαλύτερη πιθανότητα στο $[0,1]$ από την πιθανότητα που αποδίδει στο ίδιο διάστημα η $Exp(\lambda_1)$.