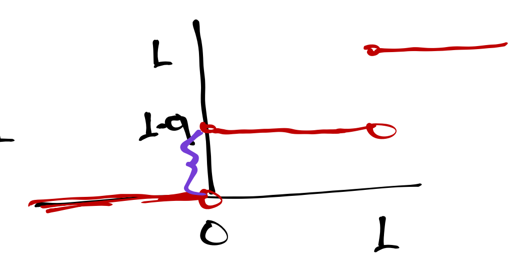
Διάλεξη 06-05-20

- Υπενθύμιση: Ασχοληθήκαμε με το πώς είναι δυνατόν να βρούμε τις πιθανότητες που αποδίδει η $\mathbb{P}$ χρησιμοποιώντας την F. Έτσι ξεκινήσαμε να εκφράζουμε το $\mathbb{P}(A)$ ως προς την F για διάφορα A μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Π.χ., αν $A=\{\alpha\}$, είδαμε ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = F(\alpha) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$ κ' ότι $\mathbb{P}(\{\alpha\})>0$ ανν η F ασυνεχής στο α, ενώ η $\mathbb{P}(\{\alpha\})$ ταυτίζεται με το "μέγεθος του άλματος" του γραφήματος της F στο α (όταν έχουμε συνέχεια στο α αυτό είναι 0).

Π.χ. $\mathbb{P} = Ber(q)$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-q, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$



$$\mathbb{P}(\{0\}) = F(0) - \lim_{y\to 0^-} F(y) = 1-q - \lim_{y\to 0^-} 0 = 1-q$$

$$\mathbb{P}(\{1/2\}) = F(1/2) - \lim_{y\to 1/2^-} F(y) = 1-q - \lim_{y\to 1/2^-}(1-q) = 1-q-(1-q)=0$$

Επιστρέφουμε στην γενική περίπτωση: έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

- $A = (\alpha,\beta]$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha,\beta]) = (*)$

$$(\alpha,\beta] = (-\infty,\beta] \overset{\supset}{-} (-\infty,\alpha]$$

$$(*) = \mathbb{P}\left((-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha]\right) = \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha]) =$$

$(A\supseteq B,\ \mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B))$

$$= F(\beta) - F(\alpha) = \mathbb{P}((\alpha,\beta])$$

(* ο τύπος αυτός θυμίζει το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού. Ίσως αυτό να σας πληροφορεί για κάποια σχέση που μπορεί να έχει η $\mathbb{P}$ με διαδικασίες ολοκλήρωσης – θα το δούμε αργότερα)

– $A = (\alpha,\beta)$, $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((\alpha,\beta)) = (*)$

$$(\alpha,\beta) = (-\infty,\beta) \underset{\supset}{-} (-\infty,\alpha]$$

$$(*) = \mathbb{P}\big((-\infty,\beta) - (-\infty,\alpha]\big) = \mathbb{P}((-\infty,\beta)) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha])$$

$$= \lim_{y\to\beta^-} F(y) - F(\alpha)$$

– $A = [\alpha,\beta)$, $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([\alpha,\beta)) = (*)$

$$* \quad \overset{\alpha\le x<\beta}{[\alpha,\beta)} = \overset{x<\beta}{(-\infty,\beta)} \underset{\supset}{-} \overset{x<\alpha}{(-\infty,\alpha)}$$

$$(*) = \mathbb{P}\big((-\infty,\beta) - (-\infty,\alpha)\big) = \mathbb{P}((-\infty,\beta)) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha))$$

$$= \lim_{y\to\beta^-} F(y) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$$

– $A = [\alpha,\beta]$, $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([\alpha,\beta]) = (*)$

$$\overset{\alpha\le x\le\beta}{[\alpha,\beta]} = \overset{x\le\beta}{(-\infty,\beta]} \underset{\supset}{-} \overset{x<\alpha}{(-\infty,\alpha)}$$

$$(*) = \mathbb{P}\big((-\infty,\beta] - (-\infty,\alpha)\big) = \mathbb{P}((-\infty,\beta]) - \mathbb{P}((-\infty,\alpha))$$

$$= F(\beta) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$$

Συνεπώς τα παραπάνω μας λένε το πως μπορούμε να εκφράζουμε μέσω της αθροιστικής την πιθανότητα που απο-δίδει η κατανομή σε όποιο διάστημα έχει πεπερασμένα άκρα.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και τα χθεσινά είναι δυνατόν να εκφράζουμε ως προς την F την πιθανότητα που αποδίδε-ται από την $\mathbb{P}$ και σε πιο "περίπλοκα" A.

Π.χ. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\mathbb{P}((\alpha, \beta] \cup \{\gamma\}) = (*)$

Επειδή $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \{\gamma\} \cap (\alpha, \beta] = \emptyset$

Οπότε εξαιτίας της προσθετικότητας $(*) = \mathbb{P}((\alpha, \beta]) + \mathbb{P}(\{\gamma\})$

$$= F(\beta) - F(\alpha) + F(\gamma) - \lim_{y \to \gamma^-} F(y)$$

Οπότε αν γνωρίζουμε την F μπορούμε να βρούμε το $\mathbb{P}(A)$ όποιο κ' αν είναι το A!

Στην συνέχεια θα δούμε περισσότερα παραδείγματα κατανομών πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Σε αυτά θα περιγράφουμε την $\mathbb{P}$ χρησιμο-ποιώντας την αθροιστική της. (Δηλ. στα παραδείγματα θα δίνουμε την F. Θα ελέγχουμε αν αυτή είναι καλώς ορισμένη αθροιστι-κή, δηλαδή το αν ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες. Εφόσον ισχύει αυτό βάσει του θεωρήματος χαρακτηρισμού θα είμαστε βέβαιοι ότι η F αναπαριστά μοναδική κατανομή $\mathbb{P}$

που θα είναι και η κατανομή που θέλουμε να περιγράψουμε.) (για παρακάτω παραδείγματα θα έχουμε κλειστό το supp)

Παράδειγμα 5. Ομοιόμορφη κατανομή στο $[\alpha,\beta]$

($\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$) (Uniform Distribution – Unif$[\alpha,\beta]$)

Έχουμε ότι – $supp = [\alpha,\beta]$ (δηλ. είναι συνεχής κατανομή)

$$- F(x) = \begin{cases} 0 , & x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} , & \alpha \leq x < \beta \\ 1 , & \beta \leq x \end{cases}$$