Ομάδα Ασκήσεων 1 ([redacted]) – 2020

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

1. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ με $A \subseteq B$ και $\mathbb{P}(A) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$.
4. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cup B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0$.
5. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A' \cup B') = 1$.
6. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(A' \cap B') = 0$.
7. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(B) = 0$, τότε και $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$.
8. Να δείξετε ότι αν $A, B \in \Sigma_\Omega$ και $\mathbb{P}(B) = 1$, τότε και $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.
9. Να δείξετε ότι αν $A, B, C \in \Sigma_\Omega$ τότε $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$.
10. Έστω ότι $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$ με Σ_Ω την συλλογή από όλα τα υποσύνολα του Ω. Βρείτε την Σ_Ω. Έστω ότι η $\mathbb{P}$ ορίζεται από τις σχέσεις $\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TT\}) = \frac{1}{4}$. Βρείτε την $\mathbb{P}$.
11. Έστω ότι $\Omega = \{\alpha, b\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{\alpha\}, \{b\}\}$. Να βρεθεί συνολοσυνάρτηση $Q: \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί τις ιδιότητες της (i) θετικότητας κ' της (ii) τυποποίησης αλλά όχι την ιδιότητα της (iii) προσθετικότητας.
12. Έστω το υπόβαθρο της άσκησης 11. Να βρεθεί συνολοσυνάρτηση $Q: \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί τις (i) κ' (iii) αλλά όχι την (ii).

13. Έστω $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\Sigma_\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}\}$. Να βρεθούν όλες οι κατανομές πιθανότητας που μπορούν να οριστούν στο Ω.

14. (Δεσμευμένη Πιθανότητα). Έστω $\Omega \neq \emptyset$, Σ_Ω η συλλογή από τα μετρήσιμα υποσύνολα του κ $B \in \Sigma_\Omega$. Έστω κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}$ επί του Ω τέτοια ώστε $\mathbb{P}(B) > 0$. Έστω η συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P}_B : \Sigma_\Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως: αν $A \in \Sigma_\Omega$, $\mathbb{P}_B(A) := \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
Να δειχθεί ότι η $\mathbb{P}_B$ είναι καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας επί του Ω.

14. Ως προς την προηγούμενη άσκηση να δειχθεί ότι αν $A \in \Sigma_\Omega$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ τότε $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ (τότε τα A, B ονομάζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους). Να δειχθεί ότι όταν $B = \Omega$, τότε $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, $\forall A \in \Sigma_\Omega$.

15. Να λυθεί η άσκηση που βρίσκεται στο:

https://eclass.aueb.gr/modules/blog/index.php?course=OIK229&action=showPost&pId=295