φροντιστήριο 9ο.   24/05/2019

Παράδειγμα 4

Έστω τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια νδο $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$. Τέλος, να υπολογίσετε τις ροπές $3^{ης}$ και $4^{ης}$ τάξης.

Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $\quad x, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

Λύση

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t x\right]\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + \mu^2\right)\right] dx$$

προσ αφαιρ $(\mu+\sigma^2 t)^2$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + (\mu+\sigma^2 t)^2\right) + \mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right]\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x - \mu + \sigma^2 t)^2 + \mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right]\right] dx$$

$$= \exp\left[-\frac{\mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu + \sigma^2 t)^2\right] dx$$

$$= \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(\frac{x}{\mu} + \sigma^2 t, \sigma^2\right)^{*} dx = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu+\sigma^2 t}{\sigma}\right)^2\right] dx =$$

θέτω $z = \frac{x-\mu+\sigma^2 t}{\sigma}$

$dz = \frac{1}{\sigma} dx$

$dx = \sigma\, dz$

όρια αμετάβλητα

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} z^2\right] \cdot \sigma\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$\overset{\text{συμμετρία}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \;\underset{\substack{z=\sqrt{2y} \\ dz=\sqrt{2}\cdot\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2}dy}}{\overset{\text{θέτω } y=\frac{z^2}{2}}{=\!=\!=}}\; 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot \sqrt{2}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{2\int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{2} dy}_{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

Συνεπώς, $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Υπολογισμός Ροπών

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t) \cdot \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$M'_X(0) = \mu = E(X)$: μέσος : ροπή 1ης τάξης

$$M''_X(t) = \sigma^2 \cdot \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + (\mu + \sigma^2 t)^2 \cdot \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$M''_X(0) = \mu^2 + \sigma^2 = E(X^2)$: ροπή 2ης τάξης

$$M'''_X(t) = \sigma^2(\mu+\sigma^2 t)\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + 2(\mu+\sigma^2 t)\sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + (\mu+\sigma^2 t)^3 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$M'''_X(0) = \mu^3 + 2\mu\sigma^2 + \mu\sigma^2$: ροπή 3ης τάξης

$$M''''_X(t) = 3\sigma^2\left[\sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) + (\mu+\sigma^2 t)^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)\right] + 3(\mu+\sigma^2 t)^2\sigma^2 \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$
$$+ (\mu + \sigma^2 t)^4 \cdot \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

$M''''_X(0) = 3\sigma^2(\sigma^2 + \mu^2) + 3\mu^2\sigma^2 + \mu^4$: ροπή 4ης τάξης

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$: διακύμανση

Παράδειγμα 5

Έστω $X \sim unif(a,b)$ με $a<b$ και $supp = [a,b]$. Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$ καθώς και οι ροπές 1ης και 2ης τάξης.

Δίνεται: pdf uniform (a,b): $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Λύση

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} e^{tx} \cdot 0\,dx + \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}\,dx + \int_b^{+\infty} e^{tX} \cdot 0\,dx = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{t}\left[e^{tx}\right]_a^b = \frac{1}{(b-a)} \cdot \frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)},\ t \neq 0$$

όταν $t=0$: $M_X(0) = \frac{0}{0}$ έχουμε απροσδιοριστία

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} = \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \overset{DLH}{=} \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{b \cdot e^{bt} - a e^{at}}{1}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1$$

Συνεπώς, $M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$

Υπολογισμός Ροπών

$$M'_X(t) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b e^{bt} - a e^{at})t - (e^{bt} - e^{at})}{t^2}\right]$$

Η ροπογεννήτρια δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αλλά οι ροπές μπορούν να υπολογιστούν παραγωγίζοντας και στη συνέχεια παίρνοντας το $\lim_{t \to 0}$.

$$t=0: \lim_{t \to 0} M'_X(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b e^{bt} - a e^{at})t - (e^{bt} - e^{at})}{t^2}\right] = \frac{1}{b-a} \lim_{t \to 0}\left[\frac{(b e^{bt} - a e^{at})t - (e^{bt} - e^{at})}{t^2}\right]$$

$$\overset{DLH}{=} \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{(b^2 e^{bt} - a^2 e^{at})t + \cancel{(b e^{bt} - a e^{at})} - \cancel{(b e^{bt} - a e^{at})}}{2t} = \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{(b^2 e^{bt} - a^2 e^{at})}{2}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2}$$ ροπή 1ης τάξης

$$M''_X(t) = \frac{1}{(b-a)} \frac{\left[\left((b^2e^{bt} - a^2e^{at})t + (be^{bt} - ae^{at}) - (be^{bt} - ae^{at})\right)\right]t^2}{t^4}$$

$$- \frac{1}{(b-a)} \frac{2t\left[(be^{bt} - ae^{t})t - (e^{bt} - e^{at})\right]}{t^4}$$

$$\overset{\text{DLH}}{=} \ldots = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$