

Φροντιστήριο 7^ο

13.17/05/2019

Ροές Κατανομής Πιθανότητας

ορισμός : Έστω κατανομή P στο \mathbb{R} και $k \in \mathbb{N}$. Τότε η ροή k -τάξης της P είναι το ολοκλήρωμα ως προς την P της $g(x) = x^k$

$$E(g) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dP = \begin{cases} \sum_{i \in \text{supp}} i^k P(\{i\}), & P \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx, & \text{η } f \text{ είναι pdf της } P \end{cases}$$

όπου $g(x) = x^k$

Η απόλυτη ροή k -τάξης ορίζεται ως

$$E(g) := \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dP = \begin{cases} \sum_{i \in \text{supp}} |i|^k \cdot P(\{i\}), & P \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot f(x) dx, & \text{η } f \text{ είναι pdf της } P. \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

i. Είναι δυνατόν η $E(g)$ α. να μην υπάρχει, β. να απειρίζεται, γ. να είναι πραγματικός αριθμός. Μόνο στην περίπτωση γ. θα πούμε ότι η $E(g)$ υπάρχει.

ii. Η $E(g(x))$ εξαρτάται και από τη $g(x)$ αλλά και από την P .

Άσκηση 1

Έστω X τυχαία μεταβλητή που αναπαριστά το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου τριγώνου. Να βρεθεί η ροή 2^{ης} τάξης και η διακύμανση της X .

Λύση

γνωρίζουμε ότι $\text{supp} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $P(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in \text{supp}$

Εξ ορισμού έχουμε για $k=2$: Ροή 2^{ης} τάξης

$$E(X^2) = \sum_{i \in \text{supp}} i^2 \cdot P(\{i\}) = \sum_{i=1}^6 i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$

$$\text{Ροή 1^{ης} τάξης : } E(X) = \sum_{i \in \text{supp}} (i) P(\{i\}) = \sum_{i=1}^6 i \cdot P(\{i\}) = \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6)$$

$$\text{Διακύμανση : } \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2.92 = \frac{31}{6}$$

Άσκηση 2

Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim \exp$ με $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$, όπου $0 < a < e$ ($e \approx 2.71828$). Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή της g ως προς την κατανομή της X . Δίνεται η pdf της εκθετικής κατανομής. Για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι $\lambda = 1$

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{aligned} E(g(x)) &= E(a^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx = \int_{-\infty}^0 a^x \cdot 0 dx + \int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} a^x \cdot (-e^{-x}) dx = - \int_0^{+\infty} a^x \cdot (e^{-x})' dx = - [a^x \cdot e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (a^x)' \cdot e^{-x} dx = \\ &= \left[-\frac{a^x}{e^x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} a^x \cdot \ln a \cdot e^{-x} dx = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{e} \right)^x + \left(\frac{a}{e} \right)^0 + \ln a \int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(a^x) = 1 + \ln a \cdot E(a^x) \Rightarrow E(a^x) = \frac{1}{1 - \ln a}$$

όπου, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{e} \right)^x = 0$, διότι $0 < \frac{a}{e} < 1$

$$\text{και } \int_0^{+\infty} a^x \cdot e^{-x} dx = E(a^x)$$

Ορισμός: Αναμενόμενη τιμή τυχαίας μεταβλητής (Πιττής, βελ. 316)

Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, Σ, P) , η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής, P_X και η μετρήσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η $g(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή ως προς τον χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) . Η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. $g(X)$ δίνεται από:

$$E(gX) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X dx$$

Άσκηση 3

Έστω $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Να βρεθεί η απόλυτη ροπή k -τάξης και ακολούθως, να δείχτει ότι $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Δίνονται :

• pdf της εκθετικής κατανομής : $f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

• συνάρτηση Γάμμα : $\int_0^{+\infty} t^a \cdot e^{-t} dt = \Gamma(a+1) = a!$

• $\text{supp} = [0, +\infty)$ (γιατί?)

Λύση

Από ιδιότητες ροπών γνωρίζουμε ότι εφόσον το βήριγμα της κατανομής είναι $[0, +\infty)$ η ροπή k -τάξης ταυτίζεται με την απόλυτη ροπή k -τάξης, $E(X^k) = E(|X|^k)$.

$$E(X^k) = \int_{\text{supp}} x^k \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$$

ηολ/με
= και
διαίραμα με λ^k

$$= \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} \lambda \cdot \lambda^k \cdot x^k \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} (\lambda \cdot x)^k \cdot e^{-\lambda x} dx$$

αλλαγή μεταβλητής : $t = \lambda x \Rightarrow dt = \lambda dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\lambda} dt$

$\lambda > 0$, λόγια : $t_1 = 0$, $t_2 = +\infty$

$$= \frac{\lambda}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\lambda} dt = \lambda^{-k} \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-t} dt = \lambda^{-k} \cdot \Gamma(k+1) = \lambda^{-k} \cdot k!$$

Υπολογισμός Ροπών

ροπή 1ης τάξης : $k=1 \Rightarrow E(X) = \lambda^{-1} \cdot 1! = \frac{1}{\lambda}$

ροπή 2ης τάξης : $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \lambda^{-2} \cdot 2! = \frac{2}{\lambda^2}$

Διακύμανση : $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Άσκηση 4

Έστω $X \sim \text{Gamma}(a, b)$, όπου $a, b > 0$. Να βρείτε τη ροπή k -τάξης της κατανομής και να δείξετε ότι $\text{Var}(X) = \frac{a}{b^2}$.

Δίνονται:

• pdf της Γάμμα κατανομής $f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

• $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = (a-1)!$

• $\text{supp} = [0, +\infty)$ (γιατί!)

Λύση

Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι η ροπή k -τάξης ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_{\text{supp}} x^k \cdot f(x; a, b) dx = \int_0^{+\infty} x^k \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} dx \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx \quad \begin{array}{l} \text{πολ/ζουμε} \\ \text{κ' απαλοψουμε} \end{array} \frac{b^a}{b^{k+a-1} \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} b^{k+a-1} \cdot x^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx \\ &= \frac{b^a}{b^{k+a-1} \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} (bx)^{k+a-1} \cdot e^{-bx} dx \quad \begin{array}{l} \text{θετουμε} \\ t=bx \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{b} dt \end{array} \frac{b^a}{b^{k+a-1} \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{k+a-1} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{b} dt \\ &= \frac{b^{-k}}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{k+a-1} \cdot e^{-t} \cdot dt = \frac{b^{-k}}{\Gamma(a)} \cdot \Gamma(a+k) \\ &= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \cdot b^{-k} \end{aligned}$$

Ροπή 1^{ης} τάξης: $k=1 \Rightarrow E(X) = \frac{b^{-1} \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \frac{b^{-1} \cdot a!}{(a-1)!}$

$$= \frac{1}{b} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1) \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1)} = \frac{a}{b}$$

Ροπή 2^{ης} τάξης: $k=2 \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1) \cdot a \cdot (a+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (a-1)}$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot a(a+1)$$

Διακύμανση: $\text{Var}(X) = E(X^2) - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b^2}$