Φροντιστήριο 4ο. 12/04/2019

Άσκηση 1

Έστω χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, P)$ με κατανομή πιθανότητας την Poisson, δηλαδή ισχύει $supp(P) = \{0, 1, 2, \dots\}$ με

$$P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad \forall x \in supp(P), \text{ όπου } \lambda \in (0, +\infty).$$

Έστω τυχαία μεταβλητή $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X(z) = -z$.

Να βρεθούν:

α. το στήριγμα

β. η συνάρτηση πιθανότητας

γ. η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής πιθανότητας που προκύπτει, έστω P_X, από τη μεταφορά της P μέσω της συνάρτησης X.

Λύση

α. Για κάθε $x \in supp(P)$ ισχύει $X(x) = -x$

Συνεπώς, $X^{-1}(-x) = x$

Υπολογίζουμε ενδεικτικά κάποιες αντίστροφες εικόνες

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \Rightarrow X^{-1}(0) = 0 \\ X(1) &= -1 \Rightarrow X^{-1}(-1) = 1 \\ X(2) &= -2 \Rightarrow X^{-1}(-2) = 2 \\ X(3) &= -3 \Rightarrow X^{-1}(-3) = 3 \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες των $\{0, -1, -2, \dots\}$ σχηματίζουν το $supp(P) = \{0, 1, 2, \dots\}$

Σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου από μεταφορά

$$\underbrace{P_X(A)}_{\substack{\text{κατανομή} \\ \text{πιθανότητας} \\ \text{από μεταφορά}}} := \underbrace{P(X^{-1}(A))}_{\substack{\text{αρχική} \\ \text{κατανομή} \\ \text{Poisson}}}, \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

* Η καινούρια κατανομή θα απεικονίζει την παλιά στους μη θετικούς ακεραίους

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in supp(P)$

$$P_X(\{-x\}) = P(X^{-1}(\{-x\})) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} > 0$$

Συνεπώς, σε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{0, -1, -2, ..\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. Επιπλέον,

$$P_X(\{0, -1, -2, \dots\}) = P(X^{-1}(\{0, -1, -2, \dots,\}))$$
$$= P(\{0, 1, 2, \dots\})$$
$$= P(supp(P)) = 1$$

Άρα το στήριγμα της κατανομής θα είναι

$supp(P_X) = \{0, -1, -2, \dots\}$.

β. Η συνάρτηση πιθανότητας p θα ορίζεται ως

$$p : supp(P_X) \to [0,1] \text{ με } p(x) = \frac{\lambda^{|x|}}{x!}e^{-\lambda}$$

γ. Η αθροιστική συνάρτηση της P_X θα ορίζεται ως

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}$$

όπου θα ισχύει $P_X((-\infty, x]) = P_X((-\infty, x] \cap supp(P_X))$

Παίρνουμε περιπτώσεις

- $x \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = P_X((-\infty,] \cap supp(P_X)) = P_X(supp(P_X)) = 1$
- $-1 \leq x < 0 \Rightarrow F_X(x) = P_X((-\infty, x] \cap supp(P_X))$

$$= P_X(supp(P_X) - \{0\}) = 1 - p(0)$$

- $-2 \leq x < -1 \Rightarrow F_X(x) = P_X((-\infty, x] \cap supp(P_X))$

$$= P_X(supp(P_X) - \{0\} - \{-1\}) = 1 - P(\{0\}) - P(\{-1\})$$

Επομένως,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 1 - \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} P_X(\{i\}) & , x < 0 \end{cases}$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ ο μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος (ή μηδέν) μικρότερος ή ίσως του x. και $i \in [0, -1, -2, \dots]$

π.χ. $x = -2.75$, $\lfloor -2.75 \rfloor = -3 \Rightarrow F_X(-2.75) = P_X(\{-3\}) + P_X(\{-4\}) + \dots$

Άσκηση 2

Για την ίδια κατανομή (Άσκηση 1), υποθέτουμε την ύπαρξη μιας νέας τυχαίας μεταβλητής έστω $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_2(z) = z^2$. Να υπολογιστούν:

α. το στήριγμα

β. η συνάρτηση πιθανότητας

γ. η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που προκύπτει, έστω P_{X_2}, από τη μεταφορά της P μέσω της X_2.

Λύση

α. Για $\forall x \in supp$ ισχύει ότι $X_2(x) = x^2$. Συνεπώς, θα ισχύει επίσης ότι $X_2^{-1}(x^2) = \pm x$

Υπολογίζουμε, $\forall x \in supp(P)$:

$X_2(0) = 0 \Rightarrow X_2^{-1}(0) = 0$

$X_2(1) = 1^2 \Rightarrow X_2^{-1}(1^2) = \pm 1$

$X_2(2) = 2^2 \Rightarrow X_2^{-1}(2^2) = \pm 2$

$X_2(3) = 3^2 \Rightarrow X_2^{-1}(3^2) = \pm 3$

επειδή όμως $supp(P) = \{0, 1, \dots\}$ κρατάμε τις αντίστροφες εικόνες με το θετικό πρόσημο.

Παρατηρούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες των $\{0, 1^2, 2^2, \dots\}$ σχηματίζουν το $supp(P) = \{0, 1, 2, \dots\}$

Αφού η X_2 είναι τυχαία μεταβλητή θα ισχύει

$$P_{X_2}(A) = P\left(X_2^{-1}(A)\right) \quad \forall\ A \in \Sigma_{\mathbb{R}}.$$

Παρατηρούμε ότι $\forall\ x \in supp(P)$ θα ισχύει

$$P_{X_2}(\{x^2\}) = P\left(X_2^{-1}(\{x_2^2\})\right) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$$

που σημαίνει ότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα.

$$P_{X_2}(\{0,1,4,\dots\}) = P\left(X_2^{-1}(\{0,1^2,2^2,\dots\})\right) = P(\{0,1,2,\dots\})$$

$$= P(supp(P)) = 1$$

Συνεπώς, το στήριγμα της κατανομής από μεταφορά θα είναι $\quad supp(P_{X_2}) = \{0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$

β. Η συνάρτηση πιθανότητας θα ορίζεται ως

$$P_{X_2}(x) = \frac{\lambda^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}!} \qquad supp(P_{X_2}) \to [0,1]$$

γ. αθροιστική συνάρτηση από μεταφορά

$$F_{X_2} = P_{X_2}\left((-\infty, x] \cap supp(P_{X_2})\right)$$
$$= P_{X_2}\left((-\infty, x] \cap \{0^2, 1^2, 2^2, \dots\}\right)$$

$$= \begin{cases} P_{X_2}(\emptyset), & x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{x}\rfloor} P_{X_2}(\{i\}), & x \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση

Έστω χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, P)$ με κατανομή πιθανότητας P τη διωνυμική, δηλαδή ισχύει

$\mathrm{supp}(P) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$$P(\{x\}) = \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x}, \quad x \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

όπου $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!} \in \mathbb{Q}$ (ρητοί)

Να βρεθούν

α. το στήριγμα

β. η συνάρτηση πιθανότητας που προκύπτει, έστω P_X, από τη μεταφορά της P μέσω των τ.μ.

i. $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_1(z) = -z$

ii. $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_2(z) = z^2$

iii. $X_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $X_3(z) = e^z$

Λύση

Για την τυχαία μεταβλητή X_1 ισχύει ότι

α. $P_{X_1}(A) = P(X_1^{-1}(A))$, $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \mathrm{supp}(P)$ ισχύει ότι

$$P_{X_1}(\{-x\}) = P(X_1^{-1}(\{-x\})) = P(\{x\}) = \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} > 0$$

Επομένως, σε κάθε στοιχείο του $\{0, -1, -2, \ldots, -n\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα από την P_{X_1}.

Επίσης, $P_{X_1}(\{0, -1, -2, \ldots, -n\}) = P(X_1^{-1}(\{0, -1, \ldots, -n\}))$

$= P(\{0, 1, \ldots, n\}) = P(\mathrm{supp}(P)) = 1$

Συνεπώς το στήριγμα της P_{X_1} θα είναι $\mathrm{supp}(P_{X_1}) = \{0, -1, \ldots, -n\}$

β. Η συνάρτηση πιθανότητας θα ορίζεται ως:

$$P_{X_1} = \binom{n}{|x|} q^{|x|} (1-q)^{n-|x|}$$

με $P_{X_1} : \operatorname{supp} P_{X_1} \to [0,1]$

Για την τυχαία μεταβλητή X_2 έχουμε ότι

α. $P_{X_2}(A) = P(X_2^{-1}(A)), \ \forall A \in \Sigma_R$

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \operatorname{supp}(P)$ ισχύει ότι

$$P_{X_2}(\{x^2\}) = P(X_2^{-1}(\{x^2\})) = P(\{x\}) = \binom{n}{x} q^{x} (1-q)^{n-x} > 0$$

Άρα σε κάθε στοιχείο του $\{0,1,4,\dots,n^2\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα.

Επίσης,

$$P_{X_2}(\{0,1,4,\dots,n^2\}) = P(X_2^{-1}(\{0,1,4,\dots,n^2\})) = P(\{0,1,2,\dots,n\})$$
$$= P(\operatorname{supp}(P)) = 1$$

Συνεπώς, $\operatorname{supp}(P_{X_2}) = \{0,1,4,\dots,n^2\}$

β. Η συνάρτηση πιθανότητας θα ορίζεται ως:

$$P_{X_2} = \binom{n}{\sqrt{x}} q^{\sqrt{x}} (1-q)^{n-\sqrt{x}}$$ όπου $P_{X_2} : \operatorname{supp} P_{X_2} \to [0,1]$

Παρομοίως εργαζόμαστε για την τυχαία μεταβλητή X_3

Όπως έχουμε πει, αναλόγως με τη μορφή που έχει το στήριγμα, διακρίνουμε τις κατανομές σε διακριτές και μη διακριτές. Συγκεκριμένα, μια κατανομή ονομάζεται διακριτή όταν έχει διακριτό στήριγμα (π.χ. $\{1, 2, 3, \dots\}$)

Στις μη διακριτές κατανομές περιλαμβάνονται οι συνεχείς και οι μικτές κατανομές. Μια κατανομή λέγεται συνεχής όταν το στήριγμά της είναι συνεχές (π.χ. $[0,1]$ ή $[0,1]\cup[2,3]$). Μια μικτή κατανομή είναι μίξη διακριτής και συνεχούς κατανομής, αποτελείται δηλαδή από ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι.

Βάσει των παραπάνω είναι δυνατόν να έχουμε <u>συνεχή</u> κατανομή P και <u>ασυνέχεια</u> στην αθροιστική συνάρτηση F.

π.χ. 1 : $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ q + (1-q)\dfrac{(x-\alpha)}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x < \beta \\ 1, & x \ge \beta \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η F παρουσιάζει ασυνέχεια στο α, ωστόσο η P είναι συνεχής εφόσον $supp(P) = [\alpha, \beta]$