Στατιστική ΙΙ

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης

Επίκουρος Καθηγητής : Αρβανίτης Στυλιανός stelios@aueb.gr
Βοηθός Μαθήματος : Λιόντος Γεώργιος liontosgeo@aueb.gr

Φροντιστήριο 2ο

19/03/2018

Σύνοψη προηγούμενου φροντιστηρίου

Στο **Φροντιστήριο 1** ασχοληθήκαμε με έννοιες όπως:

- **Μετρήσιμος Χώρος** (δυάδα (Ω, Σ_Ω), στην οποία αποδίδουμε κάποια έννοια μεγέθους και μας επιτρέπει να ορίσουμε κατανομή πιθανότητας)
- **Κατανομή Πιθανότητας** $(P : \Sigma_\Omega \to [\,0\,,1\,]$ δεδομένου του (Ω, Σ_Ω) $)$

- Είδαμε επίσης πώς ορίζεται η **Τυχαία Μεταβλητή** $X : \Omega \to \Re$

  τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_\Re$ τότε $X^{-1}(A) \in \Sigma_\Omega$

- και ακολούθως ορίσαμε της αντίστροφη εικόνα της, $X^{-1}(A)$.

- Στη συνέχεια είδαμε τον γενικό ορισμό της **αντίστροφης εικόνας** $f^{-1}(A) = \{\, \omega \in \Omega :\ f(\omega) \in A \,\}$

- και προσδιορίσαμε μονοσήμαντα κατανομή στο $\Re$, έστω P^*

  τέτοια ώστε αν $A \in \Sigma_\Re$, τότε $P^*(A) := P(X^{-1}(A))$

Φροντιστήριο 2ο : Περιεχόμενα

1. **Στήριγμα (support)**
   1. Έννοια
   2. Χρησιμότητα
   3. Πόρισμα και απόδειξη
2. **Διακριτές Κατανομές**
   1. Περιγραφή Διακριτών στους Πραγματικούς
   2. Πότε μία Διακριτή Κατανομή είναι καλώς ορισμένη;
3. **Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών στους Πραγματικούς**
   1. Εκφυλισμένη Κατανομή στο $\Re$
   2. Κατανομή Bernoulli
   3. Διωνυμική Κατανομή (Binomial)
   4. Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda > 0$

1.Στήριγμα (support)

στήριγμα, το (ουσ.) : *αυτό που χρησιμεύει για να στηρίζει/αυτός που βοηθά, συμπαραστέκεται*

1. Στήριγμα (support)

1.Έννοια

<u>Κλειστά σύνολα :</u> όλα τα διακριτά υποσύνολα του $\Re$, τα κλειστά διαστήματα, ενώσεις κλειστών διαστημάτων κ.α. π.χ. φυσικοί, ρητοί, ακέραιοι

<u>Διακριτά σύνολα :</u> οποιοδήποτε σύνολο του $\Re$ αποτελείται από απομονωμένους αριθμούς (δηλαδή από αριθμούς που δεν αποτελούν διάστημα), π.χ. φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί

<u>Μικρότερο σύνολο :</u> προκύπτει αν αρχίσω και αφαιρώ στοιχεία από το αρχικό σύνολο

Ορισμός: *Έστω κατανομή πιθανότητας P στο $\mathscr{R}$. Το στήριγμα αυτής είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathscr{R}$, στο οποίο η P αποδίδει μοναδιαία πιθανότητα.*

1. Στήριγμα (support)

2.Χρησιμότητα

- Η έννοια του στηρίγματος μας είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη επειδή μας διευκολύνει στη διαδικασία περιγραφής μιας κατανομής πιθανότητας στο $\Re$. Επίσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ανάλογα με τη "μορφή" που μπορεί να πάρει το στήριγμα, μας δίνει τη δυνατότητα να κατηγοριοποιήσουμε τις κατανομές στο $\Re$.

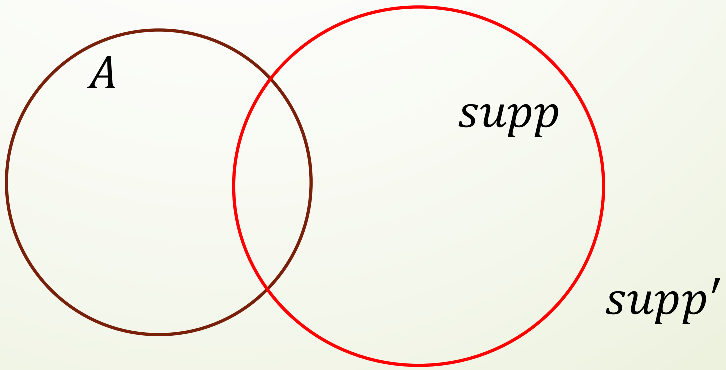
1. Στήριγμα (support)

3.Πόρισμα και απόδειξη

Πόρισμα: Αν $A \in \Re$ τότε $P(A) = P(A \cap supp)$

Απόδειξη: Σημείο εκκίνησης της απόδειξης

$$A = (A \cap supp) \cup (A \cap supp')$$



2. Διακριτές Κατανομές

Ορισμός: Διακριτή ονομάζεται οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας στο $\Re$, της οποίας το ***στήριγμα (supp)*** είναι διακριτό. Π.χ. Bernoulli, Binomial, Poisson, κ.α.

α. Η P ονομάζεται διακριτή αν το στήριγμά της είναι διακριτό υποσύνολο του $\Re$ (π.χ. πεπερασμένο, φυσικοί, ακέραιοι, κ.α.)

β. Η P ονομάζεται συνεχής αν το στήριγμά της είναι διάστημα

γ. Η P ονομάζεται μικτή σε κάθε άλλη περίπτωση

2. Διακριτές Κατανομές
1. Περιγραφή Διακριτών στους Πραγματικούς

Ισχυρισμός: Αυτές τις κατανομές μπορούμε να τις περιγράψουμε «εύκολα» χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό, χωρίς να χρειάζονται καινούριες έννοιες.

Γιατί;

Διακριτή κατανομή σημαίνει διακριτό στήριγμα, της μορφής

$$supp = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Πόρισμα : *Μια διακριτή κατανομή αποδίδει αυστηρά θετική πιθανότητα σε κάθε στοιχείο του στηρίγματός της*

2. Διακριτές Κατανομές
1. Περιγραφή Διακριτών στους Πραγματικούς

Προσοχή! : Το παραπάνω πόρισμα ισχύει **μόνο** για τις διακριτές κατανομές

Δείξαμε ότι για μια διακριτή κατανομή ισχύουν τα παρακάτω:

- $P(A) = P(A \cap supp)$
- $P(A) = P(A \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\})$
- $P(A) = P((A \cap \{x_1\}) \cup (A \cap \{x_2\}) \cup \dots \cup (A \cap \{x_n\}) \cup \dots)$ επειδή τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους
- $P(A) = P(A \cap \{x_1\}) + P(A \cap \{x_2\}) + \dots + P(A \cap \{x_n\}) + \dots$ από αριθμημένη προσθετικότητα

2. Διακριτές Κατανομές

1. Περιγραφή Διακριτών στους Πραγματικούς

Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:

$$\mathrm{A}\cap\{x_i\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{αν } x_i \notin A \\ \{x_i\}, & \text{αν } x_i \in A \end{cases}$$

Όπου x_i είναι οποιοδήποτε στοιχείο του $supp$

$$\Rightarrow P(\mathrm{A}\cap\{x_i\}) = \begin{cases} P(\varnothing) = 0, & \text{αν } x_i \notin A \\ P(\{x_i\}) > 0, & \text{αν } x_i \in A \end{cases}$$

2. Διακριτές Κατανομές

2. Πότε μία Διακριτή Κατανομή είναι καλώς ορισμένη;

Συνοψίζοντας, για να περιγράψουμε μια διακριτή κατανομή στους πραγματικούς πρέπει:

a. Να ορίσουμε το στήριγμά της

b. Να ορίσουμε τι πιθανότητα παίρνει το κάθε στοιχείο του στηρίγματος ($supp$)(τι πιθανότητα αποδίδει η κάθε κατανομή σε κάθε στοιχείο του $supp$)

Αντίστροφα : Αν έχω τα a. και b., τι χρειάζεται να ελέγξω για να επιβεβαιώσω την ύπαρξη μιας διακριτής κατανομής στο $\Re$;

3. Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών στους Πραγματικούς

Σε κάθε ένα από τα παρακάτω παραδείγματα δίνονται το $supp$ και η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε στοιχείο του $supp$ και εμείς ελέγχουμε αν:

1. Το $supp$ είναι διακριτό

2. Η πιθανότητα κάθε στοιχείου του $supp$ να είναι αυστηρά θετική

3. Και αν $P(supp) = 1$

3. Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών στους Πραγματικούς

1. Εκφυλισμένη Κατανομή στο $\Re$

Δίνονται:

$$supp = \{1\}$$
$$P(\{1\}) = 1$$

3. Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών στους Πραγματικούς

2. Κατανομή Bernoulli

Έστω $q \in (0,1)$. Η κατανομή Bernoulli στο $\{0,1\}$ ως προς q ορίζεται ως:

A. $supp = \{0,1\}$

B. $P(\{0\}) = 1 - q$ και $P(\{1\}) = q$

3. Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών στους Πραγματικούς

3. Διωνυμική Κατανομή (Binomial)

Στο $\{0,1,\ldots,n\}$ ως προς $q \in (0,1)$.

$$P(\{i\}) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$$

Όπου $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

3. Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών στους Πραγματικούς

4. Κατανομή Poisson ως προς παράμετρο $\lambda > 0$

Δίνονται:

$$supp = \{0,1,2,\ldots\}$$

$$P(\{i\}) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$