ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 8

Ροπογεννήτριες

Η ροπογεννήτρια είναι μία συνάρτηση που χρησιμεύει για τον υπολογισμό όλων των ροπών k-τάξεως μ_k, $k=1,2,\ldots$, μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Ορισμός:

Η ροπογεννήτρια (moment generating function) $M_X(t)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X, είναι η πραγματική συνάρτηση με τύπο $M_X(t)=E(e^{tX})$, για κάθε t που ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)$ η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται από τον τύπο:

$$M_X(t)=\sum_{x\in \text{supp}P_X} e^{tx}\cdot P(X=x) \quad |t|<\delta$$

Ενώ αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, η ροπογεννήτρια της X θα δίνεται από τον τύπο

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\cdot f_X(x)\,dx, \quad |t|<\delta$$

Όπως φαίνεται από τον ορισμό, η ροπογεννήτρια δεν υπάρχει για κάθε $t\in\mathbb{R}$, αλλά περιοριζόμαστε σε εκείνες τις τιμές του $t\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει σύγκλιση.

Σημείωση: η ποσότητα $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f_X(x)\,dx$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f_X(x)$.

Έχουμε $M'_X(t) = \frac{d}{dt} E(e^{tX}) = E\left[\frac{d}{dt} e^{tX}\right] = E(Xe^{tX})$

όπου έχουμε υποθέσει ότι μπορούμε να εναλλάξουμε την θέση των $\frac{d}{dt}$ και E. Αυτή η εναλλαγή των θέσεων είναι εν γένει επιτρεπτή. Έχουμε ότι

$M'_X(0) = EX$.

Παραγωγίζοντας δύο φορές την $M_X(t)$ έχουμε

$M''_X(t) = \frac{d^2}{dt^2} E(e^{tX}) = \frac{d}{dt} E(Xe^{tX}) = E\left[\frac{d}{dt} Xe^{tX}\right] =$

$E(X^2 e^{tX})$. Άρα, $M''_X(0) = EX^2$

Στη γενική περίπτωση, η k-οστή παράγωγος της ροπογεννήτριας της X δίνεται από τον τύπο $M^{(k)}_X(t) = E(X^k e^{tX})$, από τον οποίο συνεπάγεται ότι $\mu_k = EX^k = M^{(k)}_X(0)$. Συνεπώς, η ροπή k-τάξεως μ_k της X είναι ίση με την τιμή της k-οστής παραγώγου της $M_X(t)$ στο σημείο $t=0$.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής χαρακτηρίζει μονοσήμαντα την κατανομή της. Αν X, Y είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με ροπογεννήτριες $M_X(t)$, $M_Y(t)$, αντίστοιχα και αν για κάποιο $\delta>0$, ισχύει ότι $M_X(t) = M_Y(t)$, για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια κατανομή.

Παράδειγμα 1

Η ροπογεννήτρια της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο: $M_X(t) = \exp(e^t - 1)$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X.

Λύση

$$M'_X(t) = e^t \cdot e^{e^t - 1} \quad \text{και} \quad M''_X(t) = e^t \cdot e^{e^t-1} + e^t \cdot e^{e^t-1} \cdot e^t$$

$$= e^t \cdot e^{e^t-1}(1+e^t)$$

Οι παραπάνω παράγωγοι υπολογισμένες στο σημείο $t=0$, θα μας δώσουν τις αντίστοιχες ροπές $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης.

$$M'_X(0) = e^0 \cdot e^{e^0-1} = 1 = EX$$

$$M''_X(0) = e^0 + e^{e^0-1}(1+e^0) = 2 = EX^2$$

Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X θα είναι

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 2 - 1 = 1$$

Παράδειγμα 2

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x) = C^x$, $x = 1, 2, \ldots$, όπου C είναι μία πραγματική σταθερά.

α. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X.

β. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς C.

γ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση της X.

α. $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} (ce^t)^x =$

* άπειρο άθροισμα
↓ γεωμετρικής σειράς

$\overset{*}{=} \dfrac{ce^t}{1-ce^t}, \ |ce^t|<1$

$* \sum_{x=1}^{\infty} a^x = a + a^2 + \dots \mid \sum_{x=1}^{\infty} a^x = S_\infty = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu$

όπου $S_\nu = a \cdot \dfrac{a^\nu - 1}{a-1}$ τότε $S_\infty = \lim_{\nu\to\infty} a \dfrac{a^\nu-1}{a-1} = \dfrac{a}{a-1} \lim_{\nu\to\infty}(a^\nu - 1) \overset{0<a<1}{=} \dfrac{a}{a-1}(-1) = \dfrac{a}{1-a}$

β. $M_X(0) = 1 \iff \dfrac{c}{1-c} = 1 \iff c = \dfrac{1}{2}$

Άρα, $M_X(t) = \dfrac{e^t}{2-e^t}, \quad t < \ln 2$

γ. Παραγωγίζοντας δύο φορές την ροπογεννήτρια βρίσκουμε

$$M'_X(t) = \frac{e^t(2-e^t) + e^t e^t}{(2-e^t)^2} = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}$$

$$M''_X(t) = \frac{2 e^t (2-e^t)^2 + 2(2-e^t)2e^t}{(2-e^t)^4}$$

$$= \frac{2 e^t(4 + e^{2t} - 4e^t) + 8e^t - 4e^{2t}}{(2-e^t)^4}$$

$$= \frac{8 e^t + 2 e^{3t} - 8e^{2t} + 8e^t - 4e^{2t}}{(2-e^t)^4}$$

$$= \frac{16 e^t - 12e^{2t} + 2 e^{3t}}{(2-e^t)^4}$$

$\underset{EX}{M'_X(0)} = \dfrac{2 e^0}{(2-e^0)^2} = 2, \quad \underset{EX^2}{M''_X(0)} = \dfrac{16 e^0 - 12 e^0 + 2 e^0}{(2-e^0)^4} = 6$

$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = 6 - 2^2 = 4$

Είναι εμφανές ότι αναγκαία προϋπόθεση για την ύπαρξη της ροπογεννήτριας συνάρτησης, είναι η ύπαρξη όλων των ροπών $\mu_k = E X^k$ της X εφόσον

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mu_k$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει για όλες τις κατανομές ροπογεννήτρια συνάρτηση.

Παράδειγμα 3

Έστω $X \sim Gamma(a,b)$, όπου $a,b>0$. Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X και οι ροπές 1ης, 2ης, 3ης και 4ης τάξης αντίστοιχα.

Δίνονται: pdf Gamma: $f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-bx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

· Συνάρτηση Gamma: $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt = (a-1)!$

Λύση

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot e^{-bx} dx$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-(b-t)x} dx$$. Θέτω $u = (b-t)x$

$\Rightarrow du = (b-t)dx$

$u_1 = 0,\ u_2 = \infty$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{u}{b-t}\right)^{a-1} \cdot \frac{1}{b-t} e^{-u} du$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)(b-t)^a} \int_0^\infty u^{a-1} \cdot \frac{(b-t)}{b-t} \cdot e^{-u} du = \frac{b^a}{\Gamma(a)(b-t)^a} \int_0^\infty u^{a-1} \cdot e^{-u} du$$

$$= \frac{b^a \cdot \Gamma(a)}{\Gamma(a)(b-t)^a} = \frac{b^a}{(b-t)^a}$$

<u>Υπολογισμός ροπών</u>

$$M'_X(t) = (+a)\, b^a (b-t)^{-a-1}$$

$$M''_X(t) = (-a)(-a-1)\, b^a (b-t)^{-a-2}$$

$$M'''_X(t) = (+a)(-a-1)(-a-2)\, b^a (b-t)^{-a-3}$$

$$M''''_X(t) = (-a)(-a-1)(-a-2)(-a-3)\, b^a (b-t)^{-a-4}$$

Σε όλα τα παραπάνω υποθέτω ότι $t < b$

Παράδειγμα 4

Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτρια συνάρτηση δείξτε ότι $EX = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$. Επίσης να υπολογίσετε τις ροπές $3^{ης}$ και $4^{ης}$ τάξης.

Δίνονται:

· η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Λύση

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t x\right]} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + \mu^2\right\}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + (\mu+\sigma^2 t)^2\right) + \mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right]} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-\mu+\sigma^2 t)^2 + \mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right\}} dx$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{\mu^2-(\mu+\sigma^2 t)^2\}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2\}}\, dx}_{//\ *}$$

$$= e^{\{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} N(x/\mu+\sigma^2 t, \sigma^2)\, dx = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Συνεπώς, $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu+\sigma^2 t}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \text{ όπου}$$

$z = \frac{x-\mu+\sigma^2 t}{\sigma}$

$dz = dx\frac{1}{\sigma}$

συμμετρία

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2}\, dy, \text{ όπου}$$

$y = \frac{z^2}{2}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2 \cdot y}$

$dz = \sqrt{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \underbrace{e^{-y} \cdot y^{-\frac{1}{2}} dy}_{\text{Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Υπολογισμός Ροπών

$$M'_X(t) = EX = (\mu+\sigma^2 t) \cdot e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Rightarrow M'_X(0) = \mu$$

$$M''_X(t) = \sigma^2 \cdot e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\mu+\sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Rightarrow M''_X(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$M'''_X(t) = \sigma^2(\mu+\sigma^2 t) \cdot e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$
$$+ 2(\mu+\sigma^2 t) \cdot \sigma^2 \cdot e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$
$$+ (\mu+\sigma^2 t)^3 \cdot e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Rightarrow M'''_X(0) = \sigma^2\mu + 2\cdot\mu\sigma^2 + \mu^3$$

$$M''''_X(t)\ 3\sigma^2 \{\sigma^2 \cdot e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\mu+\sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} (\mu+\sigma^2 t) \cdot \cancel{2}\} +$$

$$+ \; 3(\mu+\sigma^2 t)^2 \cdot \sigma^2 \cdot e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (\mu+\sigma^2 t)\cdot e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot (\mu+\sigma^2 t)^3$$ ⑤

$M''''_X(0)$

$$= 3\sigma^2\{\sigma^2+\mu^2\} + 3\mu^2\sigma^2 + \mu^4$$

Παράδειγμα 5

Έστω $X \sim unif(a,b)$ με $a<b$ και $supp P = [a,b]$.
Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_X(t)$
καθώς και ροπές $1^{ης}, 2^{ης}$.
Δίνεται: pdf $unif(a,b)$: $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & , x\in[a,b] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$

Λύση:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} e^{tx}\cdot 0\cdot dx$$

$$+ \int_a^b e^{tx}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx + \int_b^{+\infty} e^{tx}\cdot 0\,dx = \int_a^b e^{tx}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}\cdot dx = \frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{1}{t}\left[e^{tx}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, \quad t\neq 0$$

Όταν $t=0$: $M_X(0) = \frac{0}{0}$, απροσδιοριστία

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)} = \frac{1}{b-a}\lim_{t\to 0}\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \overset{DLH}{=} \frac{1}{b-a}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{b\cdot e^{bt}-a\cdot e^{at}}{1}$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot(b-a) = 1$$

Συνεπώς, η ροπογεννήτρια συνάρτηση θα είναι

$$M_X(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ \dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, & t\neq 0 \end{cases}$$

(ορίζεται) και υπάρχει σε κάποια γειτονιά του $t=0$

Υπολογισμός Ροπών

$$M'_X(t) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \left\{ \frac{(b\cdot e^{bt} - a\cdot e^{at})\, t(b-a) - (b-a)(e^{bt}-e^{at})}{[t(b-a)]^2} \right\}$$

Η $M_X(t)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{t\to 0} M'_X(t) = \frac{1}{b-a}\cdot \lim_{t\to 0} \frac{(b-a)\{[b\cdot e^{bt} - a\cdot e^{at}] + (b^2\cdot e^{bt} - a^2\cdot e^{at})t\} - (b-a)[b\cdot e^{bt} - a\cdot e^{at}]}{2t(b-a)}$$

$$\overset{DLH}{=} \frac{1}{b-a}\lim_{t\to 0} \frac{\cancel{(b-a)}[b^2\cdot e^{bt} - a^2\cdot e^{at} + b^2\cdot e^{bt} - a^2\cdot e^{at} + (b^3\cdot e^{bt} - a^3\cdot e^{at})t]}{2\cancel{(b-a)}}$$

$$- \frac{1}{b-a}\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)}[b^2\cdot e^{bt} - a^2\cdot e^{at}]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2+b^2-a^2-b^2}{2}\right] = \frac{1}{\cancel{(b-a)}}\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$M''_X(t) = \frac{1}{(b-a)}\left\{ \frac{\{(b-a)[b\cdot e^{bt} - a\cdot e^{at} + (b^2\cdot e^{bt} - a^2\cdot e^{at})\cdot t] - (b-a)(b\cdot e^{bt} - a\cdot e^{at})\}[t(b-a)]^2}{[t(b-a)]^4} \right.$$

$$\left. - \frac{2t(b-a)\{(b\cdot e^{bt} - a\cdot e^{at})t(b-a) - (b-a)(e^{bt} - e^{at})\}}{[t(b-a)]^4} \right\}$$

$$= \ldots = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

Παράδειγμα 6

Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in (0,1)$

Έχουμε ότι $supp = \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(\{i\}) = \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$

αν $i \in supp$. και αν $t \in \mathbb{R}$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i \in \{0,1,\ldots,n\}} e^{ti} \cdot P(\{i\}) = \sum_{i=0}^{n} e^{ti} q^i (1-q)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (e^t q)^i (1-q)^{n-i} \underset{\substack{\text{διων.} \\ \text{ανάπτυγμα}}}{\overset{\times\times}{=}} (1-q+e^t q)^n = (1+q(e^t-1))^n$$

επομένως η M είναι καλώς ορισμένη (το t μπορεί να επιλεγεί ως $+\infty$).

$$k=1: E X = M_X'(0) = \left.\frac{\partial M_X}{\partial t}\right|_{t=0} = \left. n(1+q(e^t-1))^{n-1} \cdot q \cdot e^t \right|_{t=0} = nq$$

$$k=2: E X^2 = M_X''(0) = \left.\frac{\partial M_X^2}{\partial t^2}\right|_{t=0} = n(n-1)(1+q(e^t-1))^{n-2} q^2 e^t + \left. M_X'(t)\right|_{t=0} =$$

$$n(n-1)q^2 + nq = n^2q^2 + nq(1-q)$$

$$Var X = n^2q^2 + nq(1-q) - (nq)^2 = nq(1-q)$$