Φροντιστήριο 5

Ανάλογα με το στήριγμα, υπάρχουν τρεις κατηγορίες κατανομών:

1. Διακριτές: το supp είναι διακριτό, δηλαδή αποτελείται από μεμονωμένα στοιχεία. π.χ. ($\{0,1\}$)
2. Συνεχείς: έχουν συνεχές supp, δηλαδή κλειστό διάστημα ή ένωση κλειστών διαστημάτων ή (γενικά κάποιου είδους διάστημα) π.χ. $[\alpha,\beta]$ ή $[0,1]\cup[2,3]$
3. Μεικτές: έχουν και τα δύο π.χ. $\{\alpha\}\cup[\gamma,\delta]$

! Το ότι η P είναι συνεχής δε σημαίνει ότι και η F της θα είναι παντού συνεχής!

Μεθοδολογία

α. Δίνεται η αθροιστική συνάρτηση F

β. Ελέγχω αν ισχύουν οι 3 ιδιότητες της αθροιστικής

~~1. Διακριτό supp~~

~~2. $\forall x_i \in supp \Rightarrow P(\{x_i\})>0$~~

~~3. $P(supp)=1$~~

γ. Αν ισχύουν τότε η διακριτή κατανομή P που μας δίνεται είναι καλώς ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Πως βρίσκω το supp; ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Για μια διακριτή κατανομή θα ισχύει ότι $x \in supp$ ανν η F είναι ασυνεχής στο x.

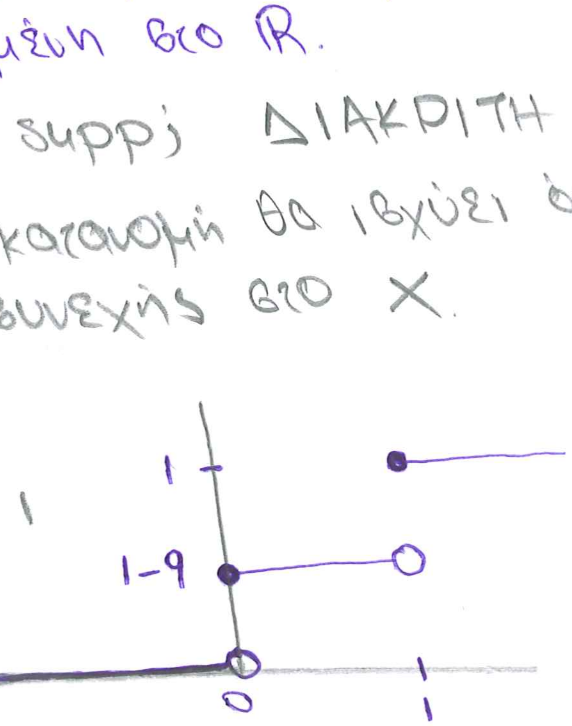
π.χ. Bernoulli

ασυνέχειες στο 0 και 1

Άρα $supp=\{0,1\}$

εντός supp ⇒ γν. αύξουσα

εκτός supp ⇒ σταθερή

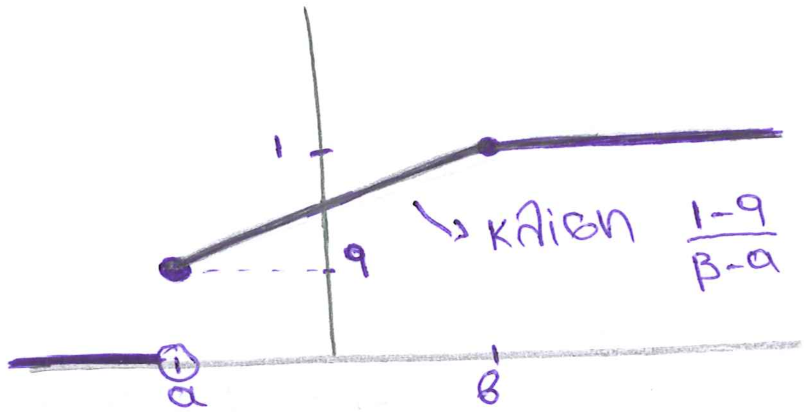


$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-q, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

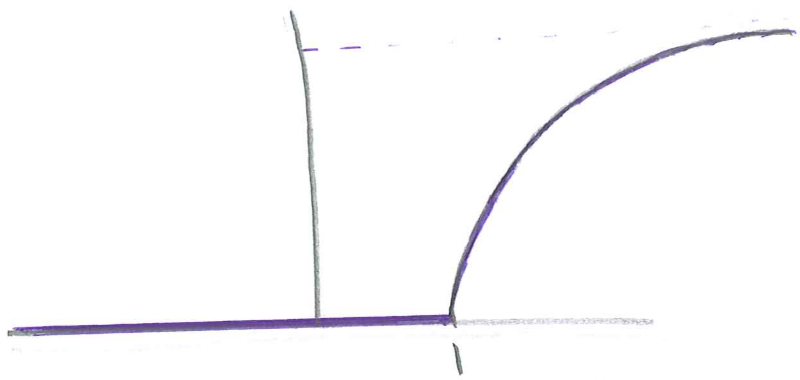
Είναι δυνατόν να έχω συνεχή P και ασυνέχεια στην F. Στα σημεία ασυνέχειας αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα.

π.χ. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ q + (1-q)\dfrac{(x-a)}{\beta - a}, & a \leq x < \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}$



παρατηρώ ότι η F έχει μία ασυνέχεια στο a. Όμως η P είναι συνεχής αφού το supp = [a, β]

π.χ. 2 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$



Η F είναι παντού συνεχής

supp = [1, +∞)

Η F είναι γνησίως αύξουσα εντός supp και σταθερή εκτός supp

Άσκηση 1

Εξετάστε αν η F είναι αθροιστική

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-\dfrac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \mathbb{N} = \{1,2,\dots,\} \quad \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{N} : m \leq x\}$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος φυσικός μικρότερος ή ίσος του x.

Λύση

Ελέγχω αν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης F

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x) = 0$, $\forall x < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}} = 1 - 0 = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a<b$

- $a<b<1 \Rightarrow F(a) = F(b) = 0$
- $a<1\leq b \Rightarrow F(a) = 0$, $F(b) = 1 - \dfrac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} > 0$

$$\Rightarrow F(b) > F(a)$$

- $1 \leq a < b \Rightarrow F(b) - F(a) = 1 - \dfrac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}} - \left(1 - \dfrac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}\right)$

$$= \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} - \frac{1}{2^{\lfloor b \rfloor}}$$ γνωρίζω ότι $a<b$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0 \Rightarrow F(b) \geq F(a)$$

$a = 3.16$
$b = 3.82$ | $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = 3$

3. Από δεξιά συνεχής

Έστω $a \in \mathbb{R}$

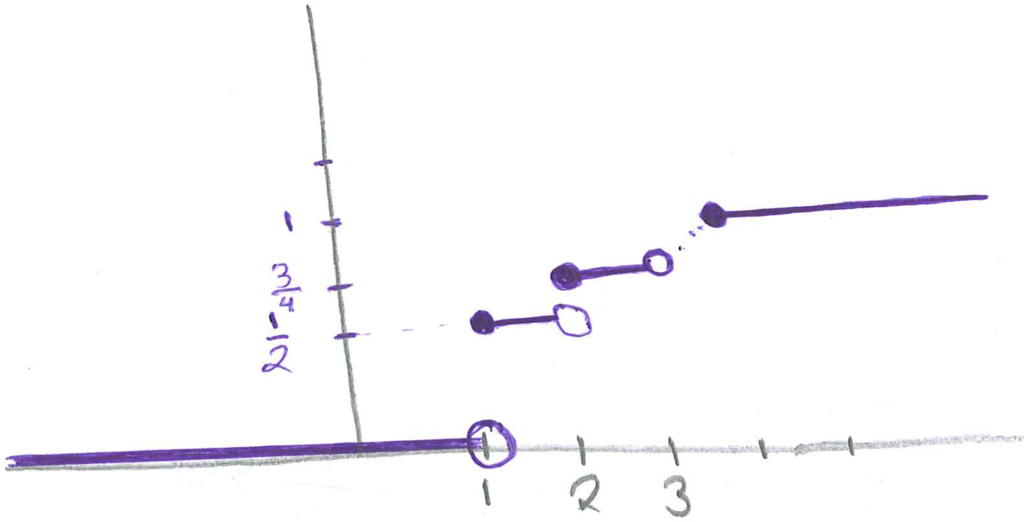
- $a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- $a \geq 1 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor x \rfloor}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}} = F(a)$

επομένως η F είναι συνεχής από δεξιά.

4. Αριθμός ασυνεχειών: το πλήθος των φυσικών αριθμών

$suppP = \{1, 2, 3, \dots\}$, P διακριτή

και άρα ορίζεται μια καλώς ορισμένη P στο $\mathbb{R}$.



Άσκηση 2

Εξετάστε αν η F είναι αθροιστική

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-\frac{1}{2^x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

Ελέγχω τις ιδιότητες της αθροιστικής

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x)=0$, $\forall x<1$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^x} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^x} = 1-0=1$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a,b \in \mathbb{R}$ με $a<b$

- $a<b<1 \Rightarrow F(a)=F(b)=0$
- $a<1 \leq b \Rightarrow F(a)=0$, $F(b)=1-\frac{1}{2^b}>0$

$\Rightarrow F(b)>F(a)$

- $1 \leq a < b \Rightarrow F(b)-F(a) = 1-\frac{1}{2^b} - \left[1-\frac{1}{2^a}\right]$

$= \underbrace{\frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^b}}_{>0}$, γνωρίζω όμως ότι $a<b$

$\Rightarrow F(b)-F(a)>0$

3. Από δεξιά συνεχής

έστω $a \in \mathbb{R}$

· $a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$

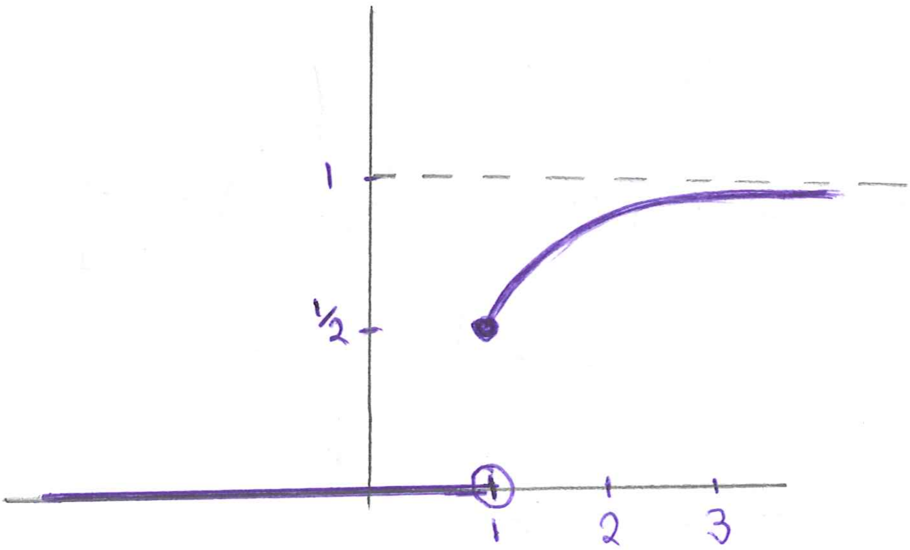
· $a \geq 1 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left[1 - \frac{1}{2^x} \right] = 1 - \lim_{x \to a^+} \frac{1}{2^x} = 1 - \frac{1}{2^a} = F(a)$

Εφόσον ισχύουν τα παραπάνω η F ορίζει καλώς μια P στο $\mathbb{R}$.

$\operatorname{supp} P = [1, +\infty)$?

Η P είναι συνεχής(?) με ασυνεχή F

!!! Το $\operatorname{supp} P = [1, +\infty)$ είναι πράγματι το στήριγμα της P διότι σε αυτό αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα. ~~Και ακριβώς επειδή το supp P είναι κλειστό, η P είναι συνεχής~~.



Άσκηση 3 (Για το σπίτι)

Εξετάστε αν η F είναι αθροιστική

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1-\frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση

1. $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x)=0,\ \forall x<1$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 1-0 = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $a,b \in \mathbb{R}$, με $a<b$

- $a<b<1 \Rightarrow F(a)=F(b)=0$
- $a<1\leq b \Rightarrow F(a)=0,\ F(b)=1-\frac{1}{b} \Rightarrow 1-\frac{1}{b}\geq 0$

$F(b) \geq F(a)$

- $1\leq a<b \Rightarrow F(b)-F(a) = 1-\frac{1}{b}-\left(1-\frac{1}{a}\right)$

$$= \frac{1}{a}-\frac{1}{b} > 0 \Rightarrow F(b)-F(a)>0$$

3. Από δεξιά συνεχής

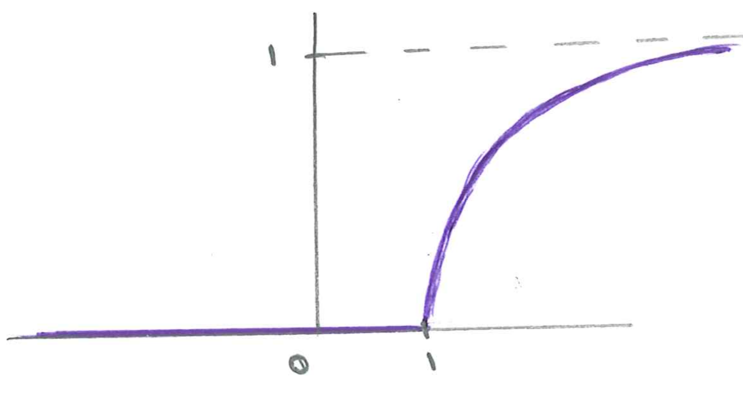
Έστω $a\in\mathbb{R}$

- $a<1$ $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- $a\geq 1$ $\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} 1-\frac{1}{x} = 1-\lim_{x\to a^+}\frac{1}{x} = 1-\frac{1}{a} = F(a)$

Συνεπώς η αθροιστική κατανομή F ορίζει καλώς μια P στον $\mathbb{R}$.

$\text{supp}P = [1,+\infty)$

P συνεχής με F συνεχή



Άσκηση 4

Εξετάστε αν η F είναι αθροιστική

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, & x \geq 0 \end{cases}$$

Δίνεται: $\int_0^{\infty} e^{-k^2} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ολοκλήρωμα Gauss

Λύση:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \forall x<0$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

α. παρατηρώ ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ΑΡΤΙΑ. Δηλαδή $f(x) = f(-x)$, αφού το Z είναι στο τετράγωνο.

Β. για να χρησιμοποιήσω το ολοκλήρωμα Gauss θα πρέπει πρώτα να μετασχηματίσω τα όρια. Πως όμως?

Αλλαγή Μεταβλητής προς ολοκλήρωση

$$P = -Z \Rightarrow Z = -P$$

$$\Downarrow$$

$$-dP = dZ \quad \Big| \text{ όρια: } P_1 = -(-\infty) = +\infty, \quad P_2 = -0 = 0$$

συνεχίζοντας:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}(-p)^2} (-dp) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Γνωρίζω ότι η συνάρτηση δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια διαδικασία. Συνεπώς μπορώ να αλλάξω το όνομα της μεταβλητής προς ολοκλήρωση αφού οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ίδιες.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

$$k = \frac{z}{\sqrt{2}} \Rightarrow dk = \frac{1}{\sqrt{2}} dz \Rightarrow dz = \sqrt{2}\, dk$$

όρια: $z_1 = 0$

$z_2 = +\infty$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} \sqrt{2}\, dk = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-k^2} dk = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

2. μη φθίνουσα

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$

- $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$
- $x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) = 0,\ F(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0$$

- $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

Από ιδιότητες ολοκληρώματος Riemann γνωρίζω ότι:

αν $x_1 < x_2$ $\quad \int_{-\infty}^{x_2} = \int_{-\infty}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2}$

Άρα αντικαθιστώ:

$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz > 0 \quad \text{Άρα } F(x_2) > F(x_1)$$

3. Από δεξιά συνεχής

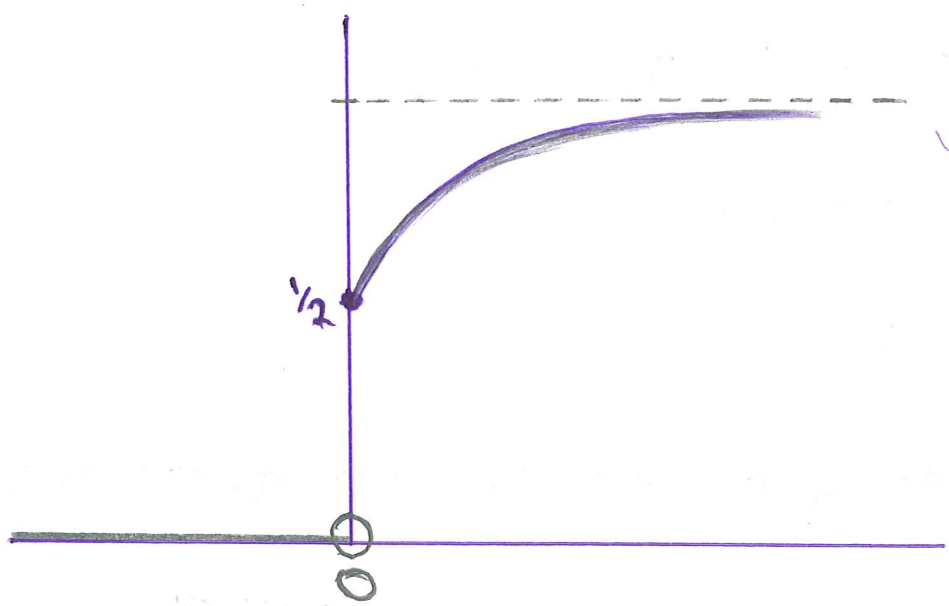
Έστω $a \in \mathbb{R}$

- $a < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a) = 0$
- $a \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^+} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(a)$$

Αφού ισχύουν τα παραπάνω, η αθροιστική F ορίζει καλώς μια P στον $\mathbb{R}$.

Γράφημα



$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

αλλαγή μεταβλητής $k=\frac{-z}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{0}\sqrt{2}e^{k^2}(-dk)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\sqrt{2}e^{k^2}dk$$

$$=\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}}\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}\cancel{\sqrt{2}}}{2}=\frac{1}{2}$$

$dk=-\frac{1}{\sqrt{2}}dz$

$\Rightarrow dz=-\sqrt{2}\,dk$

$k_1=-(-\infty)=+\infty$

$k_2=-0=0$

Το στήριγμα της P θα είναι $\text{supp}\,P=[0,+\infty)$

Άρα η P είναι συνεχής με F ασυνεχή.