①

Φροντιστήριο 3

Κατανομές Πιθανότητας στους Πραγματικούς - Αθροιστική Συνάρτηση

Δυσκολία περιγραφής των διακριτών κατανομών. Για τον λόγο αυτό χρειαζόμαστε έννοιες που μας είναι πιο "οικείες", προκειμένου να περιγράψουμε μία κατανομή. π.χ. συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Η πρώτη έννοια που συναντούμε είναι η αθροιστική συνάρτηση.

Ορισμός: Εστω κατανομή P στο $\mathbb{R}$. Η αθροιστική συνάρτηση της κατανομής (cdf - cumulative distribution function) είναι η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από: $F(x) = P((-\infty, x])$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

εφόσον $(-\infty, x] \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ τότε υπάρχει η $P((-\infty, x])$ και είναι καλώς ορισμένη. (ορίζεται για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας και την αναπαριστά πλήρως)

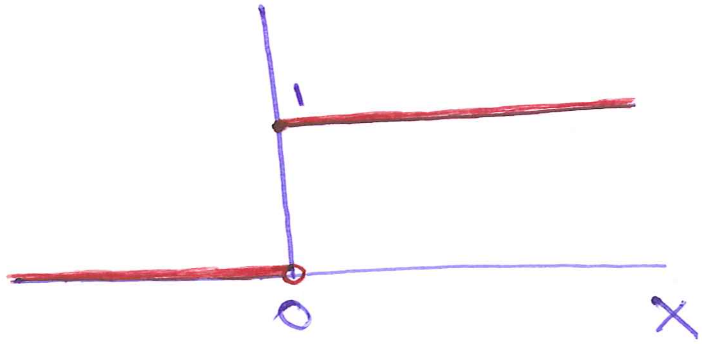
Παράδειγμα: Εστω η εκφυλισμένη κατανομή στο 0.

από τον ορισμό του στηρίγματος

Εχουμε ότι $F(x) = P((-\infty, x]) = P((-\infty, x] \cap \{0\})$

$$= \begin{cases} P(\emptyset), & \text{αν } x < 0 \\ P(\{0\}), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γράφημα



<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η $Ber(q)$. Έχουμε ότι

$P(A) = P(A \cap supp)$ $supp = \{0,1\}$, $P(\{0\}) = 1-q$, $P(\{1\}) = q$

$$F(x) = P\big((-\infty, x]\big) = P\big((-\infty, x] \cap \{0,1\}\big)$$

Δεν περιλ. στοιχεία του supp

μόνο το {0}

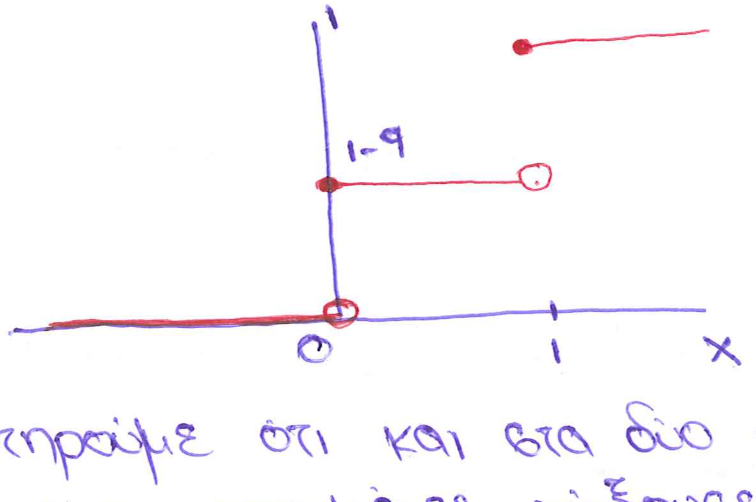
$$= \begin{cases} P(\emptyset), & x < 0 \\ P(\{0\}), & 0 \le x < 1 \\ P(\{0,1\}), & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-q, & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$P(\{0\}) + P(\{1\})$

$q + 1 - q$

x παίρνω τιμές αναφορικά με τις τιμές μπορεί να πάρει το X, ανάλογα με το στήριγμα, $x<0$, $0 \le x < 1$, $x \ge 1$.

με γράφημα



Ιδιότητες

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \forall x < 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \forall x \ge 1$
- μη φθίνουσα

Παρατηρούμε ότι και στα δύο παραδείγματα οι cdf είναι φραγμένες, αύξουσες, μπορεί να είναι ασυνεχείς σε σημεία, αλλά είναι παντού από δεξιά συνεχείς.

<u>Θεώρημα</u>: Η F έχει τις εξής τρεις ιδιότητες:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
2. η F είναι αύξουσα, δηλαδή αν $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
3. η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \to x^+} F(y) = F(x)$

Αντίστροφα αν κάποια $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες 1, 2, 3 τότε είναι η cdf μοναδικής κατανομής P στο $\mathbb{R}$.

<u>Σχόλια</u>: Το παραπάνω είναι θεώρημα αναπαράστασης. Δηλαδή, και επειδή οι 1,2,3 αποτελούν χαρακτηριστικές ιδιότητες μιας cdf, σε κάθε $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που της αντιστοιχεί μοναδική P στο $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει αφού, δεδομένου ότι σε κάθε P αντιστοιχεί μοναδική F, αυτό μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο. ότι η F αναπαριστά "τέλεια" την P, οπότε μπορούμε να ορίσουμε την P μέσω της F, να βρούμε τις πιθανότητες που αυτή αποδίδει, ιδιότητες της P θα αντανακλώνται σε ιδιότητες της F, κ.ο.κ.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων βάσει της cdf

εφόσον η F αναπαριστά την P θα πρέπει μέσω της F να μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που η P αποδίδει.

$$P\big((-\infty, x]\big) = F(x)$$

$$P\big((-\infty, x)\big) = \lim_{y \to x^-} F(y)$$

εξ ορισμού

$$P\big(\{x\}\big) = F(x) - \lim_{y \to x^-} F(y)$$

Για $\alpha < \beta$

• $P\big((\alpha, \beta]\big)$

$$P\big((-\infty, \beta]\big) = P\big((-\infty, \alpha] \cup (\alpha, \beta]\big) \Leftrightarrow P\big((-\infty, \alpha]\big) + P\big((\alpha, \beta]\big)$$

$$\Rightarrow P\big((\alpha, \beta]\big) = P\big((-\infty, \beta]\big) - P\big((-\infty, \alpha]\big) = F(\beta) - F(\alpha)$$

• $P\big((-\infty, \beta)\big) = P\big((-\infty, \alpha] \cup (\alpha, \beta)\big) = P\big((-\infty, \alpha]\big) + P\big((\alpha, \beta)\big)$

$$\Leftrightarrow P\big((\alpha, \beta)\big) = P\big((-\infty, \beta)\big) - P\big((-\infty, \alpha]\big)$$

$$= \lim_{x \to \beta^-} F(x) - F(\alpha)$$

• $P\big([\alpha, \beta)\big)$

$$P\big((-\infty, \beta)\big) = P\big((-\infty, \alpha) \cup [\alpha, \beta)\big) \Leftrightarrow P\big((-\infty, \beta)\big) = P\big((-\infty, \alpha)\big) + P\big([\alpha, \beta)\big)$$

$$\Rightarrow P\big([\alpha, \beta)\big) = P\big((-\infty, \beta)\big) - P\big((-\infty, \alpha)\big) = \lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to \alpha^-} F(x)$$

$P([\alpha,\beta])$

$$P((-\infty,\beta]) = P((-\infty,\alpha)\cup[\alpha,\beta]) \Leftrightarrow P((-\infty,\beta]) = P(-\infty,\alpha) + P[\alpha,\beta]$$

$$\Rightarrow P[\alpha,\beta] = P((-\infty,\beta]) - P((-\infty,\alpha))$$

$$= F(\beta) - \lim_{x\to\alpha^-} F(x)$$

<u>Συνοψίζοντας</u>

- $P((-\infty,\beta]) = F(\beta)$

Μπορώ να μετρήσω την πιθανότητα οποιουδήποτε μετρήσιμου υποσυνόλου χρησιμοποιώντας την F. Συνεπώς, προκειμένου να ορίσω μια κατανομή αρκεί να δώσω την F.

- $P((-\infty,\beta)) = \lim_{y\to\beta^-} F(y)$
- $P(\{\beta\}) = F(\beta) - \lim_{y\to\beta^-} F(y)$
- $P((\alpha,\beta]) = F(\beta) - F(\alpha)$
- $P((\alpha,\beta)) = \lim_{y\to\beta^-} F(y) - F(\alpha)$
- $P([\alpha,\beta]) = F(\beta) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$
- $P([\alpha,\beta]) = \lim_{y\to\beta^-} F(y) - \lim_{y\to\alpha^-} F(y)$

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}})$. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση για την κατανομή Poisson $Pois(\lambda)$. ④

Δίνονται

- $supp(P) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ με $P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ $\forall\ x \in supp(P)$ όπου $\lambda \in (0, +\infty)$

Είναι μια πλήρης περιγραφή της κατανομής
Γιατί? (Διότι δίνονται supp και πιθανότητα αυτής σε κάθε σημείο του supp)

Από τον ορισμό έχουμε:

$$F(x) = P\big((-\infty, x]\big) = P\big((-\infty, x] \cap supp(P)\big)$$

$$= \begin{cases} P(\emptyset), & \text{αν } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} P(\{i\}), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

- Για $x < 0$ (πρώτα αυτό)

$P\big((-\infty, x]\big) = P\big((-\infty, x] \cap supp P\big) = P(\emptyset) = 0$

- Για $0 \leq x < 1$

$P\big((-\infty, x]\big) = P\big((-\infty, x] \cap supp P\big) = P(\{0\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!}$

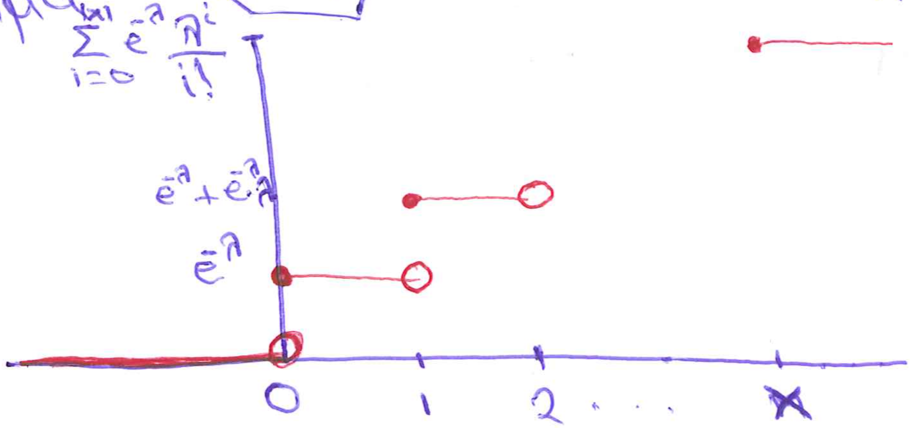
- Για $1 \leq x < 2$

$P\big((-\infty, x]\big) = P\big((-\infty, x] \cap supp P\big) = P(\{0\}) + P(\{1\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}$

ή $F = P\big((-\infty, x]\big)$

$$= \begin{cases} P\big((-\infty, x] \cap supp P\big) = P(\emptyset) = 0 \\ P\big((-\infty, x] \cap supp\big) = P(\{0\}) & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Γράφημα



* Το στήριγμα της Poisson είναι απειροπληθές και έχει ασυνέχειες.

** Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά την αθροιστική κατανομή μπορώ να βρω πιθανότητες χωρίς να χρησιμοποιήσω τον ορισμό.

π.χ.

$$P(\{0\}) = F(0) - \lim_{y \to 0^-} F(y)$$

$$= e^{-\lambda} - \lim_{y \to 0^-} F(y) = e^{-\lambda} - 0 = e^{-\lambda}$$

$$P(\{2\}) = F(2) - \lim_{y \to 2^-} F(y)$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\cdot\lambda + e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2} - e^{-\lambda} + \lambda\cdot e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{2}$$

Εναλλακτικά: $$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ P(\{0\}) = e^{-\lambda} & 0 \le x < 1 \\ P(\{0\}) + P(\{1\}) & 1 \le x < 2 \\ e^{-\lambda} + \lambda\cdot e^{-\lambda} & \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0, & x<0 \\ P(\{0\}) = e^{-\lambda}, & 0 \le x < 1 \\ P(\{0,1\}) = P(\{0\}) + P(\{1\}) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} & 1 \le x < 2 \\ P(\{0,1,2\}) = P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) & \\ \quad = e^{-\lambda} + \lambda\cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2}\cdot e^{-\lambda} & , 2 \le x < 3 \end{cases}$$

Επιβεβαιωση Ιδιοτήτων της F

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, αφού $F(x)$, $\forall\, x<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda} \sum\limits_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!}$

$= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!}}_{\text{ανάπτυγμα MacLaurin}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$ Ανάπτυγμα MacLaurin

2. Έστω $x_1 < x_2$ τότε ΜΗ ΦΘΙΝΟΥΣΑ

- Αν $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2)$
- Αν $x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow F(x_2) = e^{-\lambda} \sum\limits_{i=0}^{[x_2]} \frac{\lambda^i}{i!} > F(x_1) = 0$

3. Δεξιά συνεχής

- $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-\lambda} \sum\limits_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \lim\limits_{x\to0^+} \sum\limits_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = F(0)$
- $\lim\limits_{x\to1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to1^+} e^{-\lambda} \sum\limits_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \lim\limits_{x\to1^+} \sum\limits_{i=0}^{[x]} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} = F(1)$

4. Πλήθος ασυνεχειών : $\# \mathbb{N}$

Άσκηση Φροντιστηρίου

Poisson από μεταφορά

Έστω η κατανομή P με $\operatorname{supp} P = \{0,1,2,\dots\}$

και $P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ για $\forall x \in \operatorname{supp} P$ όπου

$\lambda \in (0,+\infty)$

i. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

όπου $X_1(z) = -z$ (είναι συνεχής και ΤΜ. ως συνάρτηση)

i.a. Να βρεθεί το στήριγμά της

Από τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής

θα ισχύει $P_{X_1}(A) = P(X_1^{-1}(A))$, $\forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

Κατανομή πιθανότητας από μεταφορά

αρχική κατανομή Poisson

* Η καινούρια κατανομή θα απεικονίζει την παλιά στους μη θετικούς ακεραίους

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in \operatorname{supp} P$

$$P_{X_1}(\{-x\}) = P(X_1^{-1}\{-x\}) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$$

συνεπώς, σε κάθε στοιχείο του συνόλου $\{0,-1,-2,\dots\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα.

* Γιατί $P(X_1^{-1}\{-x\}) = P(\{x\})$? | ποια είναι η αντίστροφη εικόνα των αρνητικών ακεραίων που απεικονίζεται μέσω της X_1. Η $\{x\}$.

Η καινούρια διακριτή κατανομή θα είναι

$$P_{X_1}(\{0,-1,-2,\dots,\}) = P(X_1^{-1}(\{0,-1,-2,\dots,\}))$$

από ορισμό αντίστροφης εικόνας

$$= P(\{0,1,2,\dots\}) = P(\mathrm{supp}(P)) = 1$$

* μας έχει δοθεί ότι $\mathrm{supp}\, P = \{0,1,2,\dots\}$
συνεπώς θα ισχύει ότι $P(\mathrm{supp}) = 1$

Άρα $\mathrm{supp}(P(X_1)) = \{0,-1,-2,\dots\}$

i.β. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας

Η συνάρτηση πιθανότητας θα είναι η $P_{X_1}(\{x\})$. Συνεπώς, αλλάζω ονομασία, και για να έχω μία καλώς ορισμένη, διακριτή κατανομή πιθανότητας, βάζω απόλυτο.

$$P_{X_1}(\{x\}) = \frac{\lambda^{|x|}}{|x|!} e^{-\lambda}, \quad \forall x \in \{0,-1,-2,\dots,\}$$

ii. Εστω τυχαία μεταβλητή $X_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου

Γιατί είναι τυχαία μεταβλητή?

$X_2(z) = z^2$ (είναι τυχαία μεταβλητή ως πολυώνυμο, συνεχής)

ii.α. Να βρεθεί το στήριγμά της

Από τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής θα ισχύει

$$P_{X_2}(A) = P(X_2^{-1}(A)) \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

κατανομή από μεταφορά

αρχική κατανομή Poisson

* Η καινούρια κατανομή θα είναι απεικόνιση της παλιάς στο τετράγωνο των φυσικών. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να απεικονίσουμε τα τετράγωνα και με X και με $-X$. Στο $-X$ όμως η Poisson δίνει μηδενική πιθανότητα. Συνεπώς θα έχουμε:

$\forall x \in supp\, P$

Ποια είναι η αντίστροφη εικόνα των τετραγώνων των φυσικών που απεικονίζεται μέσω της X_2? Η $\cancel{x}$ και η $-\cancel{x}$

$$P_{X_2}(\{x^2\}) = P(X_2^{-1}\{x^2\}) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$$

δηλαδή σε κάθε σημείο του συνόλου $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ αποδίδεται θετική πιθανότητα

επιπλέον θα έχουμε

$$P_{X_2}(\{0,1,4,\dots,\}) = P(X_2^{-1}(\{0,1,4,\dots,\}))$$

από ορισμό αντίστροφης εικόνας

$$= P(\{0,1,2,\dots,\})$$

$$= P(supp(P)) = 1$$

Άρα $supp(P(X_2)) = \{0, 1, 4, 9, \dots,\}$

ii.β. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας

αλλάζουμε σημασία. για να έχω μια καλώς ορισμένη διακριτή, συνάρτηση πιθανότητας, βάζω ρίζα

$$P_{X_2}(\{x\}) = \frac{\lambda^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,!} e^{-\lambda}, \quad \forall x \in \{0,1,4,9,\dots\}$$

(άσκηση σπίτι)

iii. Έστω η τυχαία μεταβλητή $X_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $X_3(z) = e^z$ (συνεχής συνάρτηση)

iii.α. Να βρεθεί το στήριγμά της

Από τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής θα ισχύει

$$P_{X_3}(A) = P(X_3^{-1}(A)) \quad \forall A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$$

κατανομή πιθανότητας από μεταφορά

αρχική κατανομή Poisson

* Η καινούρια κατανομή θα απεικονίζει την παλιά στους εκθετικούς

Παρατηρούμε ότι για $\forall x \in supp\, P$

$$P_{X_3}(\{e^x\}) = P(X_3^{-1}(\{e^x\})) = P(\{x\}) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} > 0$$

Άρα σε κάθε στοιχείο του $\{e^0, e^1, e^2, \ldots,\}$ αποδίδεται αυστηρά θετική πιθανότητα

Επίσης, παρατηρώ ότι

$$P_{X_3}(\{e^0, e^1, e^2, \ldots,\}) = P(X_3^{-1}(\{e^0, e^1, \ldots,\}))$$

το δείξαμε προηγουμένως από ορισμό αντίστροφης εικόνας

$$= P(\{0, 1, 2, \ldots,\})$$

$$= P(supp(P)) = 1$$

Άρα το στήριγμά της P_{X_3} θα είναι $supp\, P_{X_3} = \{e^0, e^1, \ldots,\}$

iii.β. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας

$$P_{X_3}(\{x\}) = \frac{\lambda^{\log x}}{\log x!} e^{-\lambda} \quad \forall x \in \{e^0, e^1, \ldots,\}$$