

Ομάδα Ασκήσεων 4

Τα παρακάτω βρίσκονται σε στάδιο διαρκούς διόρθωσης. Παρακαλώ αναφέρετε όποια παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.

1. Να βρεθεί η ροπή δεύτερης τάξης για την διωνυμική κατανομή, $\text{Bin}(n, q)$ όπου $n \in \mathbb{N}$ και $q \in (0, 1)$.
2. Να βρεθεί η ροπή τρίτης τάξης για την κατανομή Poisson, $\text{Poiss}(\lambda)$ όπου $\lambda > 0$.
3. Να βρεθεί η $E(\alpha^X)$ όταν $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$.
4. Να βρεθεί η $E(\alpha^X)$ όταν $X \sim \text{Bin}(n, q)$.
5. Να δειχθεί ότι η $E(\ln(X))$ δεν υπάρχει όταν $X \sim \text{Bin}(n, q)$.
6. Να βρεθεί η $E(\exp(tX))$ όταν $X \sim N(\mu, v)$ όπου $\mu, t \in \mathbb{R}$, $v > 0$.
7. Να βρεθεί η $E(X \exp(tX))$ όταν $X \sim N(0, 1)$ όπου $t \in \mathbb{R}$.
8. Βρείτε την απόλυτη ροπή k τάξης για την ομοιόμορφη κατανομή, $\text{Unif}_{[a,b]}$, όταν $a < 0$.
9. Να βρεθούν οι ροπές τρίτης και τέταρτης τάξης για την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$.
10. Χρησιμοποιώντας τους σχετικούς υπολογισμούς που έχουν γίνει και την παραγοντική ολοκλήρωση να δείξετε ότι οι ροπές της $N(0, 1)$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$E(x^k) = (k-1)E(x^{k-2}), \quad k \geq 2.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση δείξτε ότι για την εν λόγω κατανομή οι ροπές περιττής τάξης είναι ίσες με 0, ενώ οι ροπές άρτιας τάξης είναι περιττοί αριθμοί.

11. Να δείξετε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κατανομής Cauchy είναι καλώς ορισμένη (υπόδειξη: προσπαθήστε να παραγωγίσετε την $\arctan(x)$ (όπου \arctan η συνάρτηση τοξεφ), χρησιμοποιώντας και ότι $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$).