Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί επισκόπηση εννοιών της μαθηματικής θεωρίας πιθανοτήτων, συνδυασμένων με ενδεικτικές εφαρμογές τους στην οικονομική θεωρία και στην οικονομετρία. Η πιθανότητα ως έννοια είναι δυνατόν να εμφανίζεται στην οικονομική θεωρία σε όποιο πεδίο της ανάλυσης εμπλέκονται χαρακτηριστικά αβεβαιότητας. Οι σχετικές προβλέψεις της θεωρίας μπορούν να συγκροτούνται και να διατυπώνονται με χρήση, μεταξύ άλλων, της γλώσσας και του λογισμού των πιθανοτήτων. Αυτό συμβαίνει επειδή η πιθανότητα συνιστά κατά κάποιον τρόπο μέτρο της προϊούσας αβεβαιότητας.

Η κατανόησή μου επί του πλέγματος των εννοιών που πραγματεύεται το βιβλίο διαμορφώθηκε και μέσω της αλληλεπίδρασής μου με ανθρώπους οι οποίοι έχουν πάθος για τα μαθηματικά. Αυτοί τυγχάνει να είναι, πέρα από εξαιρετικοί επιστήμονες, και πολύ καλοί φίλοι. Ευχαριστώ λοιπόν ιδιαίτερα για το παραπάνω τους Αντώνη Ντέμο, Σπύρο Βασιλάκη, Τάσο Μαγδαληνό και Γιάννη Κασπαρή, Δημήτρη Μαυρίδη, Νικόλα Τοπάλογλου, Thierry Post και Olivier Scaillet.

Ευχαριστώ για τη συνδρομή τους και τους κατά καιρούς διδακτορικούς φοιτητές που με βοήθησαν στην οργάνωση και τη διεξαγωγή του μαθήματος «Στατιστική ΙΙ» στο Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης του ΟΠΑ, συντελώντας έτσι έστω και έμμεσα στη δημιουργία του βιβλίου. Αυτοί είναι οι Αναστάσιος Τασσιόπουλος, Αλέξανδρος Λουκά, Ελένη Κυρκοπούλου, Γιώργος Λιόντος και Νίκος Υφαντής.

Ευχαριστώ επίσης για τη βοήθεια που μου προσέφερε σε ζητήματα συγγραφής τη διδακτορική φοιτήτρια του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης Μαρία Γκιόκα.

Τέλος, χωρίς την ομάδα των συνεργατών από τις εκδόσεις Πεδίο η συγκεκριμένη έκδοση θα ήταν κυριολεκτικά ανέφικτη. Ευχαριστώ πολύ για την εξαιρετική δουλειά τους τους Άγη Πετρόπουλο, Κώστα Μιχαηλίδη, Παναγιώτα Δημοπούλου.

Προφανώς η ευθύνη για όποιο λάθος υπάρχει ενδεχομένως στο βιβλίο είναι αποκλειστικά δική μου.

Στυλιανός Αρβανίτης,
Μάρτιος 2023

Εισαγωγή

Η πιθανότητα είναι η σημαντικότερη έννοια στη σύγχρονη επιστήμη, πόσο μάλλον αφού κανείς δεν έχει την παραμικρή ιδέα τι σημαίνει.

Αποδίδεται στον Bertrand Russell

Οικονομική επιστήμη, αβεβαιότητα και πιθανότητες

Η οικονομική θεωρία μελετά πώς κοινωνικοί σχηματισμοί και άτομα παίρνουν αποφάσεις και αλληλεπιδρούν προκειμένου να λύνουν οικονομικά προβλήματα που έχουν να κάνουν με ζητήματα παραγωγής, κατανομής και χρήσης αγαθών, δεδομένων περιορισμών στους διαθέσιμους πόρους. Συγκροτείται από βαθιές υποθέσεις για την οικονομική συμπεριφορά και αλληλεπίδραση των εμπλεκομένων και διαμορφώνει υποδείγματα για τον τρόπο με τον οποίο σχηματίζονται και εξελίσσονται τα φαινόμενα που την ενδιαφέρει να μελετήσει. Οι εν λόγω υποθέσεις είναι δυνατόν να εμπλέκουν αξιώματα για την ορθολογική συμπεριφορά σε καθεστώς αβεβαιότητας. Τα υποδείγματα ενδέχεται συνακόλουθα να ενσωματώνουν στοιχεία αβεβαιότητας με τη μορφή πιθανοθεωρητικών εννοιών.

Αυτά τα στοιχεία αβεβαιότητας μπορεί να αναπαριστούν διαταραχές που επηρεάζουν το σχετικό σύστημα και προκύπτουν από κάτι εξωγενές στο εκάστοτε υπόδειγμα, όπως μια μη προβλέψιμη φυσική καταστροφή, μια κοινωνική αναταραχή ή κάτι ηπιότερο και παροδικό, το οποίο θα έχει όμως τη μορφή μιας μη εκ των προτέρων ορατής μεταβολής σε κάποιο άλλο σύστημα και θα επηρεάζει εξωτερικά του υποδείγματος το υπό μελέτη ζήτημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η αβεβαιότητα προκύπτει από το αναγκαστικά περιορισμένο και κλειστό εύρος του υποδείγματος και έχει επιστημολογική φύση: το υπόδειγμα αποτελεί μια σχετικά απλή προσέγγιση της πραγματικότητας, η οποία όμως είναι πολύπλοκη. Ένα μέρος της πολυπλοκότητας που ενδεχομένως βρίσκεται εκτός του ενδιαφέροντος του υποδείγματος αναπαρίσταται από αντικείμενα χαρακτηριζόμενα από αβεβαιότητα.

Οι πιθανοθεωρητικές έννοιες είναι επίσης δυνατόν να αναπαριστούν εν μέρει και κάποιου είδους σφάλμα προσέγγισης που διαπράττει το υπόδειγμα στο σχετικό σύστημα που περιγράφει. Αυτό μπορεί να αφορά στοιχεία της πραγματικότητας τα οποία βρίσκονται στο άμεσο ενδιαφέρον του υποδείγματος, αλλά η ακριβής σχέση μεταξύ τους είναι άγνωστη και προσεγγίζεται από μια απλούστερη σχέση εντός του υποδείγματος. Σε αυτή την περίπτωση, η αβεβαιότητα προκύπτει ως σφάλμα προσέγγισης και έχει και πάλι επιστημολογική φύση: οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το υπόδειγμα και όχι αναγκαστικά στη φύση του οικονομικού συστήματος που περιγράφεται.

Κάποια από τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά του υποδείγματος είναι όμως δυνατόν να προκύπτουν και από τη φύση του οικονομικού συστήματος.[1] Π.χ., το υπόβαθρο στο οποίο λαμβάνουν βέλτιστα αποφάσεις (ενδεχομένως αλληλεπιδρώντας μεταξύ τους) διάφοροι δρώντες σε ένα οικονομικό σύστημα ενέχει αβεβαιότητα όταν τα αντικείμενα των αποφάσεων (π.χ. οι μελλοντικές αποδόσεις χρηματοοικονομικών τίτλων, οι μελλοντικές τιμές οικονομικών δεικτών ή γενικότερα η μελλοντική κατάσταση κάποιου σχετικού με την απόφαση μέρους του οικονομικού δικτύου όπου δραστηριοποιείται ο δρων) δεν είναι πλήρως αποκρυσταλλωμένα τη στιγμή της απόφασης. Η μελέτη του τρόπου με τον οποίο λαμβάνονται τελικά οι αποφάσεις σε τέτοια υπόβαθρα θα είναι δόκιμο να εξετάζει και χαρακτηριστικά αυτής της αβεβαιότητας, καθώς ενδεχομένως και το πώς αντιλαμβάνονται τα εν λόγω χαρακτηριστικά οι σχετικοί δρώντες. Συνεπώς, σε τέτοιες περιπτώσεις τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά των υποδειγμάτων αναπαριστούν βαθύτερα στοιχεία του υποβάθρου του οικονομικού συστήματος.

Προφανώς, τόσο οι επιστημολογικοί όσο και οι επί της ουσίας τρόποι εμφάνισης χαρακτηριστικών αβεβαιότητας στα υποδείγματα της οικονομικής επιστήμης μπορεί να συνυφαίνονται. Τα χαρακτηριστικά της αβεβαιότητας που αντιμετωπίζουν οι δρώντες στο προαναφερθέν παράδειγμα ενδέχεται να είναι άγνωστα και στους επιστήμονες οι οποίοι μελετούν την εν λόγω συμπεριφορά. Οι υποθέσεις που κάνουν για αυτά μπορεί να μην ενσωματώσουν σημαντικές τους ιδιότητες ή/και να ενσωματώνουν άλλες προσεγγιστικά.

Επιπλέον, είναι δυνατόν υποδείγματα της οικονομικής να διαμορφώνουν παραδείγματα που επηρεάζουν και τον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζονται την αβεβαιότητα οι δρώντες. Π.χ., υποδείγματα αποτίμησης χρηματοοικονομικών τίτλων όπως αυτό των Black-Scholes (δείτε το [21]) χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση ή την κατασκευή επενδυτικών στρατηγικών. Μακρο-νομισματικά υποδείγματα χρησιμοποιούνται από τις Κεντρικές Τράπεζες για να παρακολουθείται η εξέλιξη των οικονομικών μεταβλητών ενδιαφέροντος και να σχεδιάζεται η σχετική νομισματική πολιτική. Γενικότερα, η στενή σχέση μεταξύ περιοχών της οικονομικής θεωρίας και της οικονομικής πολιτικής σχεδόν αυτόματα συνεπάγεται τη χρήση αντίστοιχων υποδειγμάτων από ισχυρούς δρώντες (π.χ. τις Κεντρικές Τράπεζες ή τις κυβερνήσεις) για τον σχε-

[1] Ή τουλάχιστον από τον τρόπο με τον οποίο την αντιλαμβάνεται η σχετική θεωρία.

διασμό της πολιτικής τους. Η ευρωστία ή μη τέτοιων πολιτικών μπορεί να επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται την υποκείμενη αβεβαιότητα οι υπόλοιποι δρώντες.

Τα παραπάνω είναι δυνατόν να σχετίζονται με διαδικασίες στατιστικής επαγωγής. Η συμπερίληψη πιθανοθεωρητικών στοιχείων σε υποδείγματα της οικονομικής θεωρίας μπορεί να εμπεριέχει και αβεβαιότητα ως προς τα ακριβή χαρακτηριστικά αυτών των στοιχείων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα υποδείγματα είναι συνήθως εφικτό να μεταγράφονται ως οικογένειες από τέτοια χαρακτηριστικά. Εφόσον υπάρχει σχετική πληροφορία προερχόμενη από εμπειρικές παρατηρήσεις για τις οικονομικές μεταβλητές που εμπλέκονται στο υπόδειγμα, η απόφαση για το ποιο χαρακτηριστικό –μέλος της οικογένειας– βρίσκεται εγγύτερα στην προαναφερθείσα εμπειρική πληροφορία είναι δυνατόν να υποβοηθάται από διαδικασίες στατιστικής επαγωγής. Οι εν λόγω διαδικασίες σχηματισμού των οικογενειών και τα ζητήματα στατιστικής επαγωγής σε αυτές εμπίπτουν στο πεδίο της οικονομετρίας. Στην οικονομετρία, η πιθανοθεωρητική γλώσσα και ο συνακόλουθος λογισμός προκύπτουν φυσικά, δεδομένου του προαναφερθέντος υποβάθρου. Εμπλέκονται τόσο στον σχηματισμό των υποδειγμάτων όσο και στον σχεδιασμό και στη μελέτη των ιδιοτήτων των σχετικών διαδικασιών στατιστικής επαγωγής. Σκοπός των διαδικασιών είναι να αρθεί κατά το δυνατόν ένα μέρος αυτής της δεύτερης τάξης αβεβαιότητας (ambiguity) – της αβεβαιότητας η οποία σχετίζεται με τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά που περιγράφουν την πρώτης τάξης αβεβαιότητα στο οικονομικό υπόδειγμα.

Τι είναι η πιθανότητα;

Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι υπόβαθρα αβεβαιότητας εμφανίζονται με διάφορους τρόπους στην οικονομική επιστήμη και ότι η διαχείρισή τους γίνεται μέσω της χρήσης πιθανοθεωρητικών εννοιών. Το γιατί οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται στα οικονομικά προκειμένου να περιγραφεί η προϊούσα αβεβαιότητα προφανώς συνδέεται με ερωτήματα που αφορούν τη φύση της έννοιας της πιθανότητας, τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνονται οι πιθανότητες και, συνακόλουθα, τη σχέση τους με την έννοια της αβεβαιότητας. Αυτά συγκεφαλαιώνονται στο ζήτημα της ερμηνείας της έννοιας της πιθανότητας και εξετάζονται από τη φιλοσοφία και την επιστημολογία της πιθανότητας. Εκεί, μεταξύ άλλων, μελετώνται και οι σχέσεις τής αυστηρά δομημένης μαθηματικής θεωρίας πιθανοτήτων με τη συνήθη χρήση της έννοιας. Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα δεν είναι οριστικές – θυμηθείτε και τον ενδεχομένως υπερβολικό αφορισμό του Bertrand Russell στην προμετωπίδα της εισαγωγής. Παρόλο που η έννοια εμφανίζεται σε πληθώρα επιστημών, η ακριβής ερμηνεία της –αν υπάρχει και είναι μοναδική– παραμένει τουλάχιστον αβέβαιη.

Η παράθεση και ο σχολιασμός των ερμηνειών της έννοιας της πιθανότητας υπερβαίνουν προφανώς τα ζητούμενα του βιβλίου.[2] Ωστόσο, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε αδρές κατηγορίες ερμηνειών και στο κατά πόσο αυτές εμφανίζονται στο πλαίσιο της μελέτης οικονομικών συστημάτων σε περιβάλλοντα αβεβαιότητας. Μια αρκετά ενδιαφέρουσα ταξινόμηση των σχετικών ερμηνειών προκύπτει από τη σύγκριση μεταξύ των εννοιών της κλασικής (classical), της αντικειμενικής (objective), της υποκειμενικής ή μπεϋσιανής (subjective ή Bayesian) και της λογικής (logical) πιθανότητας.

Κλασική πιθανότητα

Η κλασική ερμηνεία της πιθανότητας ονομάζεται έτσι επειδή προηγήθηκε ιστορικά και σε μεγάλο βαθμό αποδίδεται στις σχετικές εργασίες του Laplace και του de Moivre (δείτε ενδεικτικά τα [24] και [42]). Σε αυτή, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ερμηνεύεται ως άθροισμα πιθανοτήτων στοιχειωδέστερων ενδεχομένων που έχουν θεωρηθεί –ίσως υποκειμενικά ή απουσία άλλων ενδείξεων ή πληροφοριών– ισοπίθανα.[3] Η εν λόγω ερμηνεία λειτουργεί μέσω της αναγωγής σε βασικά ενδεχόμενα μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει καμία διακριτική πληροφορία ή γνώση, οπότε και συνδέεται με την έννοια της εντροπίας. Συνεπώς, η κλασική ερμηνεία μπορεί να σχετίζεται με υποδείγματα της οικονομικής θεωρίας στα οποία η πιθανολόγηση ενδεχομένων βασίζεται σε επιχειρήματα μεγιστοποίησης κάποιας μορφής εντροπίας (δείτε και την ενότητα 7.6 για ένα παράδειγμα εντροπίας, την απόκλιση κατά Kullback-Leibler). Π.χ., κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να συμβαίνει στην περίπτωση της μη πληρότητας των χρηματοοικονομικών αγορών (για τις σχετικές έννοιες δείτε το κεφάλαιο 9), οπότε και η τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών τίτλων μπορεί να επιτελείται μέσω κατανομής πιθανότητας που προκύπτει από μεγιστοποίηση της σχετικής εντροπίας.

Αντικειμενική πιθανότητα

Η αντικειμενική πιθανότητα συνδέεται με στοχαστικά φυσικά συστήματα και αντίστοιχα πειράματα τύχης τα οποία θεωρείται δυνατόν να είναι επαναλαμβανόμενα, όπως η ρίψη κέρματος ή η φθορά ραδιενεργού υλικού. Σε σχετικά με αυτά ενδεχόμενα μπορεί να αποδοθεί κάποια έννοια σχετικής συχνότητας ή τάσης να εμφανίζονται σε επίμονες συχνότητες όταν τα αντίστοιχα πειράματα επαναλαμβάνονται «αρκετές» φορές. Αυτές οι συχνότητες θεωρούνται οι αντικειμενικές πιθανότητες τέτοιων ενδεχομένων. Έτσι, π.χ., η αντικειμενική πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου «γράμματα» κατά τη ρίψη «αμερόληπτου» κέρματος ισούται με $1/2$. Σε αυτή την κατηγορία ερμηνειών των πιθανοτήτων ως αντικειμενικών οντοτήτων εμπίπτουν οι

[2] Δείτε ενδεικτικά το εγκυκλοπαιδικό λήμμα [71].

[3] Η ανάταξη της προφανούς κυκλικότητας του σχετικού ορισμού έχει γίνει αντικείμενο εκτενούς μελέτης. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο σχετικό χωρίο του [71].

συχνοτικές (frequentistic) ερμηνείες της πιθανότητας και οι ερμηνείες της ως ροπής (propensity). Στις πρώτες, η πιθανότητα αντιμετωπίζεται ως όριο σχετικών συχνοτήτων, που προκύπτει όταν το πλήθος των επαναλήψεων του πειράματος αποκλίνει προς το άπειρο. Στις δεύτερες, ως φυσική τάση του σχετικού πειράματος να παράγει το αντίστοιχο ενδεχόμενο. Η ερμηνεία της αντικειμενικής πιθανότητας είναι δυνατόν να εμφανίζεται στα οικονομικά, π.χ. σε υποδείγματα που επιτρέπουν κατάλληλες διαδικασίες στατιστικής επαγωγής και υποθέτουν εξαιτίας της δομής τους ότι τα όποια αντικειμενικά χαρακτηριστικά της υποκείμενης αβεβαιότητας μπορούν να προσεγγιστούν με αυθαίρετη ακρίβεια καθώς η εμπειρική πληροφορία για αυτά αυξάνεται χωρίς φράγμα.[4]

Υποκειμενική πιθανότητα

Η υποκειμενική ερμηνεία της πιθανότητας την αντιμετωπίζει ως βαθμό πεποίθησης για το αληθές κάποιου ενδεχομένου, δεδομένων σχετικών ενδείξεων, η οποία είναι δυνατόν να μεταβάλλεται καθώς οι εν λόγω ενδείξεις εμπλουτίζονται.[5] Υπάρχουν διάφορες υποερμηνείες της έννοιας της πιθανότητας που εμπίπτουν στο εν λόγω παράδειγμα. Αυτές κατά κύριο λόγο διαχωρίζονται βάσει των υποθέσεών τους για το πώς σχηματίζονται οι σχετικές πεποιθήσεις ή/και βάσει του τρόπου με τον οποίο αναγνωρίζονται και ταυτοποιούνται οι ενδείξεις που οδηγούν στην αναθεώρηση των πεποιθήσεων. Αν εξαιρεθούν ερμηνείες ακραίου υποκειμενισμού, η συνήθης υπόθεση για το πρώτο είναι ότι οι πεποιθήσεις σχηματίζονται ορθολογικά, βάσει καλώς ορισμένων προτιμήσεων επί συνόλου από δυνατές επιλογές συνδεόμενες με τα ενδεχόμενα επί των οποίων σχηματίζονται πιθανότητες (δείτε το σχετικό πλαίσιο στο κεφάλαιο 8 για την έννοια των ορθολογικών προτιμήσεων). Υπό περαιτέρω προϋποθέσεις για τη δομή των προτιμήσεων, είναι δυνατή η αναπαράστασή τους από μοναδική και καλώς ορισμένη κατανομή πιθανότητας, που συνοψίζει τις υποκειμενικές πιθανότητες τις οποίες ο συγκεκριμένος δρων αποδίδει στα σχετικά ενδεχόμενα, και από συνάρτηση ωφέλειας, η ολοκλήρωση της οποίας ως προς την υποκειμενική κατανομή σχετίζεται με τη βέλτιστη επιλογή του δρώντα (δείτε το [149] και την ενότητα 8.3). Επομένως, σε αυτή την προσέγγιση έχουμε την αναπαράσταση των προτιμήσεων από

[4] Δείτε σχετικά τις ασυμπτωτικές θεωρήσεις που αναπτύσσονται στα κεφάλαια 5, 6 και 7.

[5] Ο τρόπος ανανέωσης της σχετικής πιθανότητας για το A, δεδομένων των ενδείξεων που συνοψίζονται στο B, είναι δυνατόν να δίνεται από τον νόμο του Bayes, που διατυπώνεται ως $\mathbb{P}(A/B) = {}^{\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A)}/_{\mathbb{P}(B)}$. Ισχύει σε αυτή του τη μορφή εφόσον $\mathbb{P}(B) \neq 0$ και προκύπτει πολύ εύκολα από τις σχετικές εξαγωγές για τις δεσμευμένες πιθανότητες (δείτε την ενότητα 1.5.5). Στην αριστερή πλευρά της σχέσης εμφανίζεται η πιθανότητα να ισχύει το A, δεδομένων των ενδείξεων που συνοψίζονται στο B. Ο νόμος λέει ότι η ανανέωση του βαθμού πεποίθησης (posterior probability) στο A δεδομένων των ενδείξεων στο B προκύπτει από το γινόμενο του πρότερου βαθμού πεποίθησης (prior probability) στο A, που συνοψίζεται από τον όρο $\mathbb{P}(A)$, με το πηλίκο ${}^{\mathbb{P}(B/A)}/_{\mathbb{P}(B)}$, το οποίο ερμηνεύεται ως ο βαθμός στήριξης που παρέχει η εμφάνιση του B στο αληθές του A.

το ζεύγος της συλλογής των υποκειμενικών πιθανοτήτων μαζί με τη συνάρτηση ωφέλειας. Ο τρόπος απόδοσης πιθανότητας συναρτάται λοιπόν άμεσα με προτιμήσεις. Η ανανέωση των πιθανοτήτων επί τη βάσει νέας πληροφορίας γίνεται μέσω του νόμου του Bayes. Στα ερωτήματα πώς ο δρων αναγνωρίζει και ταυτοποιεί τη νέα πληροφορία ως σχετική με το ενδεχόμενο στο οποίο αποδίδει πιθανότητα, πώς αυτό επηρεάζεται από την απόδοση πιθανοτήτων στο ίδιο ή σε παρεμφερή ενδεχόμενα από άλλους δρώντες που ίσως θεωρούνται ειδικοί γνώστες (expert opinions) και πώς αυτή η διαδικασία παραμένει διαχρονικά λογικά συνεπής προτείνονται επίσης διάφορες απαντήσεις, που μπορεί να περιορίζουν περαιτέρω του νόμου του Bayes τον τρόπο ανανέωσης των υποκειμενικών πιθανοτήτων στον χρόνο.[6] Η έννοια της υποκειμενικής πιθανότητας συναντάται με προφανή τρόπο στα οικονομικά. Η αναπαράστασή της μέσω προτιμήσεων εμπίπτει στο γενικότερο παράδειγμα της αναμενόμενης ωφέλειας σε καθεστώς υψηλότερης τάξης αβεβαιότητας (δείτε την ενότητα 8.3). Οι υποκειμενικές πιθανότητες που αποδίδουν ισχυροί δρώντες σε στοιχεία αβεβαιότητας –ενδεχομένως και βάσει υποδειγμάτων της οικονομικής θεωρίας– είναι δυνατόν να επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο αποδίδουν πιθανότητες άλλοι δρώντες κ.ο.κ.

Λογική πιθανότητα

Η λογική ερμηνεία της πιθανότητας τοποθετεί την έννοια στο πλαίσιο γενίκευσης της κλασικής απαγωγικής λογικής. Οι πιθανότητες αποτελούν γενικεύσεις των αντίστοιχων αληθοτιμών: στο πλαίσιο μιας σχετικής τυπικής γλώσσας, η πιθανότητα μιας καλώς ορισμένης πρότασης αναπαριστά τον βαθμό αλήθειας αυτής της πρότασης. Προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο η πρόταση συντάσσεται από τους βασικούς όρους της γλώσσας, από τους διαθέσιμους αυτούς συντακτικούς τρόπους και από κάποια αρχική κατανομή πιθανότητας που αποδίδει πιθανότητες στους βασικούς όρους και αλληλεπιδρά αλγεβρικά με τη σύνταξη της γλώσσας.[7] Ο σχετικός λογισμός των δεσμευμένων πιθανοτήτων (δείτε την ενότητα 1.7.3) χρησιμοποιείται προκειμένου να διατυπωθεί κατά πόσο κάποια ενδεχομένως εμπειρική ένδειξη που έχει τη μορφή μιας πρότασης στο πλαίσιο της γλώσσας επηρεάζει τον βαθμό αλήθειας κάποιας άλλης πρότασης. Επομένως, η ερμηνεία αυτή τυποποιεί και προτάσεις όπως η εξής: «Δεδομένων των τάδε μετεωρολογικών μετρήσεων, είναι μεγάλη η πιθανότητα για βροχή αύριο στην τάδε περιοχή». Οι προτάσεις αυτές έχουν επιστημολογική χροιά, δεν βασίζονται **ενδεχομένως** στη λειτουργία κάποιου τυχαίου πειράματος και δεν έχουν **αναγκαστικά** υποκειμενικό χαρακτήρα. Η κατανομή που αποδίδει πιθανότητες στους βασικούς όρους μπορεί να έχει υποκειμενικά χαρακτηριστικά –επομένως, τέτοιες εκ-

[6] Ενώ τους επιτρέπουν σε κάποιες περιπτώσεις να προσεγγίζουν αντικειμενικές πιθανότητες.

[7] Η προσέγγιση της αναγωγής σε πιθανότητες βασικότερων όρων προσομοιάζει στην κλασική ερμηνεία, χωρίς όμως εδώ να προϋποτίθεται η χρήση επιχειρημάτων μέγιστης εντροπίας – αυτή η κατανομή πιθανότητας επί των βασικών όρων μπορεί κάλλιστα να έχει και υποκειμενικά χαρακτηριστικά.

φάνσεις της εν λόγω ερμηνείας είναι συγγενικές με την υποκειμενική ερμηνεία– αλλά να αναπαριστά τον βαθμό αντικειμενικής γνώσης που έχουμε για τη λειτουργία κάποιου πολύπλοκου συστήματος. Αυτό ενδέχεται να αλλάζει καθώς η σχετική γνώση εμπλουτίζεται. Επομένως, η εν λόγω ερμηνεία σχετίζεται και με ζητήματα προσέγγισης πολυπλοκότητας και μπορεί να εκφράζει τον βαθμό στον οποίο μας είναι αντικειμενικά κατανοητή. Ως τέτοια μπορεί να εμφανίζεται στα οικονομικά, αποτελώντας τη λογική τυποποίηση προτάσεων της μορφής: «Η τάδε οικονομική πολιτική είναι αρκετά πιθανό να επηρεάσει κατ' αυτό τον τρόπο την οικονομία». Το συμπέρασμα –ο τρόπος με τον οποίο θα επηρεαστεί η οικονομία– είναι δυνατόν να προκύπτει ως κάτι βέβαιο στο πλαίσιο κάποιου οικονομικού υποδείγματος και η εν λόγω πρόταση αναγνωρίζει ότι το υπόδειγμα αποτελεί προσέγγιση της πραγματικότητας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται ενδεικτικά στα [94] και [29].[8]

Τα παραπάνω δείχνουν ότι οι προαναφερθείσες ερμηνείες δεν είναι αναγκαστικά στεγανές. Π.χ., η λογική ερμηνεία μπορεί να έχει υποκειμενικά χαρακτηριστικά, ενώ η υποκειμενική μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να προσεγγίζει αντικειμενικές πιθανότητες. Επίσης, υπάρχουν υπόβαθρα στα οποία είναι δυνατόν οι ερμηνείες να ανταγωνίζονται. Π.χ., η αβεβαιότητα υψηλότερης τάξης (ambiguity), που ενδεχομένως σχετίζεται με ζητήματα βέλτιστης επιλογής (δείτε και πάλι την ενότητα 8.3), μπορεί να θεωρείται ότι επιλύεται ασυμπτωτικά με διαδικασίες στατιστικής επαγωγής σχετιζόμενες με αντικειμενικές πιθανότητες ή, αντίθετα, να θεωρείται κάτι εκ των πραγμάτων υποκειμενικό, επί του οποίου οι εμπλεκόμενοι σχηματίζουν βαθμούς πεποίθησης. Σε κάθε περίπτωση, καθεμία από τις προαναφερθείσες ερμηνείες είναι δυνατόν να συναντάται σε πολύπλοκα κοινωνικά συστήματα ή/και στον τρόπο με τον οποίο η οικονομική επιστήμη επιχειρεί να τα μελετήσει.

Στο βιβλίο δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω με ερμηνείες. Ωστόσο, το δεύτερο και τρίτο μέρος πραγματεύονται έννοιες σχετιζόμενες με τη στατιστική επαγωγή και τα οικονομικά της αβεβαιότητας, στα οποία οι εμπλεκόμενες κατανομές πιθανότητας ερμηνεύονται ως επί το πλείστον με τον αντικειμενικό τρόπο.[9] Ο σκοπός όμως δεν είναι να υποστηριχθεί η ερμηνεία της αντικειμενικής πιθανότητας, αλλά να δειχθεί πώς διάφορες μαθηματικές έννοιες που αναπτύσσονται στο πρώτο μέρος του βιβλίου εμφανίζονται και χρησιμοποιούνται σε αυτά τα πεδία.

[8]Μια παρεμφερής αλλά όχι ταυτόσημη ερμηνεία είναι η ενδεικτική (evidential) πιθανότητα. Σε αυτή, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου σχετίζεται με το πόσο ισχυρά μια ένδειξη υποστηρίζει την αλήθεια μιας πρότασης. Έτσι, π.χ., είναι σχετική σε περιπτώσεις διερεύνησης εγκλημάτων, οπότε και προκύπτει το ερώτημα κατά πόσο οι διαθέσιμες ενδείξεις υποστηρίζουν την ενοχή του κατηγορουμένου. Τέτοιου είδους ζητήματα μπορεί να μην έχουν στοιχεία υποκειμενισμού, να μην αφορούν θέματα τυπικής λογικής ή να μην εμπλέκουν διαδικασίες τυχαίων πειραμάτων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται και πάλι στο σχετικό χωρίο του [71].

[9]Όχι όμως αναγκαστικά ομοιόμορφα – π.χ., συσχετίστε τα όσα αναφέρονται στην ενότητα 7.6 και με την κλασική ερμηνεία.

Η τελευταία παρατήρηση μας οδηγεί στην κατακλείδα αυτής της ενότητας: εκείνο που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε παρακάτω είναι στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας για την πιθανότητα. Αυτή συγκροτείται από την αξιωματική θεμελίωση του Kolmogorov (δείτε το [99]), που ενσωματώνει την έννοια της πιθανότητας στη μαθηματική θεωρία μέτρου (Measure Theory). Εκεί, η πιθανότητα θεωρείται μέγεθος αβεβαιότητας, και οι κατανομές πιθανότητας κατάλληλες συναρτήσεις που αποδίδουν τις σχετικές μετρήσεις. Αποκτάται έτσι μια ιδιαίτερα πλούσια θεωρία, εντός της οποίας οι κατανομές πιθανότητας αναδεικνύονται σε πολύπλοκα μαθηματικά αντικείμενα. Στοιχεία της συνακόλουθης μαθηματικής δομής –π.χ. «γεωμετρικές» ιδιότητές τους όπως προκύπτουν από έννοιες εντροπίας– μπορούν να εκλεπτύνουν τις παραπάνω ερμηνείες και να καθιστούν πιο σαφείς τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Σημειώνεται ότι οι παραπάνω ερμηνείες είναι συμβατές[10] με την προαναφερθείσα αξιωματική θεμελίωση (δείτε και πάλι τη σχετική ενότητα στο [71]).

Χρήσιμος μαθηματικός εξοπλισμός

Η μελέτη των στοιχείων της θεωρίας πιθανοτήτων θα διευκολυνθεί από τη μαθηματική ωριμότητα του αναγνώστη τουλάχιστον σε κάποια ζητήματα ανάλυσης και γραμμικής άλγεβρας. Όπως επισημάνθηκε, οι κατανομές πιθανότητας είναι ειδικές περιπτώσεις μέτρων, όπως αντίστοιχα οι διαδικασίες απόδοσης μήκους, εμβαδού, όγκου κ.ο.κ. Αυτά αποτελούν εκ κατασκευής στοιχεία της μαθηματικής ανάλυσης, καθώς, π.χ., εμπλέκουν διαδικασίες ολοκλήρωσης. Συνεπώς, είναι χρήσιμο ο αναγνώστης να μπορεί να ανακαλεί στοιχεία του μαθηματικού λογισμού, όπως η έννοια της πραγματικής ακολουθίας και του ορίου αυτής.[11] Προφανώς, χρήσιμη θα ήταν επίσης η εξοικείωση με τον λογισμό των ορίων και, συνακόλουθα, με τις έννοιες της συνέχειας συναρτήσεων, τις δυϊκές έννοιες της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης πραγματικών συναρτήσεων, καθώς και με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού για το ολοκλήρωμα Riemann. Δεδομένου ότι οι κατανομές πιθανότητας είναι ισοδύναμα διαδικασίες ολοκλήρωσης κατάλληλων συναρτήσεων, απαιτείται η ευχέρεια σε τεχνικές ολοκλήρωσης, όπως η αντικατάσταση και η ολοκλήρωση κατά παράγοντες $\int f'g = fg - \int fg'$. Αντίστοιχα, σε κάποια σημεία του δεύτερου μέρους χρειάζεται να ανακληθούν οι έννοιες της μερικής παραγώγου για πλειομεταβλητές συναρτήσεις, της ιακωβιανής μήτρας, η οποία συνοψίζει την τοπική πληροφορία που φέρουν οι μερικές παράγωγοι για κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση μεταξύ ευκλείδειων χώρων, καθώς και της εσιανής μήτρας των παραγώγων δεύτερης τάξης για πραγμα-

[10] Τουλάχιστον και μέχρι την ιδιότητα της πεπερασμένης προσθετικότητας – δείτε την ενότητα 1.5.

[11] Το όριο πραγματικής ακολουθίας (όταν υπάρχει) είναι πραγματικός αριθμός με την ιδιότητα ότι κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο αυτόν περιλαμβάνει όλη την ακολουθία, εκτός ενδεχομένως πεπερασμένου πλήθους όρων της οι οποίοι μπορούν να εξαρτώνται από το διάστημα.

τικές συναρτήσεις όταν αυτές οι μήτρες είναι καλώς ορισμένες. Συνακόλουθα, είναι χρήσιμη η ανάκληση της έννοιας του θεωρήματος μέσης τιμής και της προσέγγισης συνάρτησης μεταξύ ευκλείδειων χώρων από πολυώνυμα Taylor. Σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται η επαφή του αναγνώστη με την έννοια της πραγματικής σειράς[12] και της δυναμοσειράς $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$, η οποία αποτελεί παράδειγμα σειράς πολυωνυμικών συναρτήσεων, συμπληρώνει αλγεβρικά τα πολυώνυμα και μπορεί να έχει ενδιαφέρουσες αναλυτικές ιδιότητες. Τέλος, θα ήταν χρήσιμη η τριβή του αναγνώστη με ζητήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης.

Στη συνέχεια, επεξηγούμε έννοιες, όρους και σύμβολα που περιλαμβάνονται στο βιβλίο:

- Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται είναι τα συνήθη. Π.χ., με $\mathbb{R}$ συμβολίζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών, με $\mathbb{R}^p$ το σύνολο των p-διάστατων πραγματικών διανυσμάτων, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακέραιων, με $\pm\infty$ οι αντίστοιχοι άπειροι αριθμοί ως εκτεταμένοι πραγματικοί κ.ο.κ. Με $:=$ συμβολίζεται η οριστική σχέση: ό,τι βρίσκεται στα δεξιά του συμβόλου ορίζει αυτό που βρίσκεται στα αριστερά του. Τα (μονά) βέλη της μορφής $\to$ αναπαριστούν συναρτησιακές σχέσεις ή συγκλίσεις (η ακριβής σημασία θα είναι σαφής από το εκάστοτε υπόβαθρο), ενώ σε διάφορες περιπτώσεις τα βέλη που υποδηλώνουν σύγκλιση θα είναι και κατάλληλα επισημασμένα με το είδος της σύγκλισης. Με $\in$, ως είθισται, συμβολίζεται η σχέση του ανήκειν, ενώ με το $\notin$ η άρνησή της. Με $\exists$ συμβολίζεται ο υπαρκτικός δείκτης και με $\forall$ ο καθολικός. Το σύνολο A για το οποίο $\forall x, x \notin A$ ονομάζεται κενό και συμβολίζεται με το $\emptyset$. Οι αρνήσεις θα επισημαίνονται με κάποιου είδους διαγραφή του αντίστοιχου συμβόλου.[13] Με «ανν» συντομογραφείται η επί της ουσίας οριστική έκφραση «αν και μόνο αν». Ακολουθία από στοιχεία κάποιου συνόλου, έστω $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$, θα συμβολίζεται με την έκφραση (x_n). Ειδικότερα σύμβολα εισάγονται τοπικά και, δεδομένης της μαθηματικής ωριμότητας στην οποία έγινε επίκληση παραπάνω, αυτά δεν υπερβαίνουν ιδιαίτερα τα συνηθισμένα.

- Αν X, Y είναι σύνολα, το καρτεσιανό τους γινόμενο ορίζεται ως το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που έχουν πρώτη συνιστώσα στοιχείο του X και δεύτερη στοιχείο του Y, δηλαδή το $X \times Y := \{(x,y), x \in X, y \in Y\}$. Σημειώνεται ότι, εξαιτίας της διάταξης εντός των στοιχείων του γινομένου, έχουμε γενικά $X \times Y \neq Y \times X$, αλλά υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση με-

[12] Δεδομένης πραγματικής ακολουθίας (a_n), η σειρά αυτής $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ (όταν υπάρχει) ορίζεται ως το όριο της προκύπτουσας πραγματικής ακολουθίας που σχηματίζεται από τη διαδικασία μερικής άθροισης της αρχικής, δηλαδή της $(\sum_{i=0}^{n} a_i)$

[13] Τι συμβαίνει όταν αρνούμαστε μια υπαρκτική ιδιότητα – εμφανίζεται κάπου ο καθολικός δείκτης; Δυϊκά, τι συμβαίνει όταν αρνούμαστε μια καθολική ιδιότητα – εμφανίζεται κάπου ο υπαρκτικός δείκτης;

ταξύ των δύο γινομένων. Η έννοια είναι γενικεύσιμη σε αυθαίρετο αριθμό παραγόντων, δηλαδή αν $X_i, i \in I$ είναι σύνολα με $I \neq \emptyset$, τότε $\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I}, x_i \in X_i, i \in I\}$.

- Για σύνολο $X \neq \emptyset$, δομή επί του X ονομάζεται όποια συλλογή αποτελούμενη από συλλογές υποσυνόλων του X ή/και σχέσεις που περιλαμβάνουν το X ή στοιχεία του. Δεδομένης μιας δομής, το ζεύγος $(X, \text{δομή})$ αποτελεί ένα δομημένο σύνολο ή έναν μαθηματικό χώρο. Το X συνήθως καλείται φορέας της δομής. Ένας μορφισμός μεταξύ χώρων με την ίδια δομή είναι οποιαδήποτε συνάρτηση δεν αλλοιώνει τη δομή. Ένα απλό παράδειγμα δομής είναι αυτή που αποτελείται από μια αλγεβρική πράξη (π.χ. πρόσθεσης) η οποία μπορεί να οριστεί ως συνάρτηση $X \times X \to X$. Οι περαιτέρω ιδιότητες που μπορεί να ικανοποιεί η πράξη (π.χ. η προσεταιριστικότητα ή/και η μεταθετικότητα) θα εμπλουτίζουν τη δομή ως επιπλέον περιορισμοί στην εν λόγω σχέση. Το προκύπτον ζεύγος θα αποτελεί βασικό παράδειγμα αλγεβρικού χώρου (π.χ. μονοειδές). Ο εφοδιασμός της δομής με περαιτέρω ιδιότητες της πράξης, περαιτέρω πράξεις που μπορεί να αφορούν και σχέσεις με άλλα σύνολα κ.ο.κ. μας οδηγεί στην κατασκευή αλγεβρικών χώρων με πλουσιότερες ιδιότητες, όπως η ομάδα, ο δακτύλιος, ο διανυσματικός χώρος κ.λπ. Επιπλέον εφοδιασμός με σχετική δομή είναι δυνατόν να οδηγεί σε χώρους όπου γίνεται εφικτή η μελέτη γεωμετρικών ιδιοτήτων. Έτσι, π.χ., ο $\mathbb{R}^p$, εφοδιασμένος με την πράξη τής κατά σημείο πρόσθεσης μεταξύ όποιου ζεύγους μελών του και την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού όποιου μέλους του με πραγματικό αριθμό, είναι διανυσματικός χώρος. Όταν εφοδιαστεί περαιτέρω με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο (δείτε το σχετικό πλαίσιο στην ενότητα 1.6.5) αποκτά γεωμετρική δομή –καθώς είναι δυνατόν να νοηθεί η έννοια της γωνίας μεταξύ στοιχείων του– και ονομάζεται p-διάστατος ευκλείδειος χώρος. Στα παρακάτω θα συναντήσουμε δομές που διευκολύνουν τη μαθηματική ανάλυση. Π.χ., θα εργαστούμε σε κάποιες περιπτώσεις με την έννοια της μετρικής και, συνακόλουθα, του μετρικού χώρου. Η μετρική είναι κατάλληλη συνάρτηση που αποδίδει έννοια απόστασης μεταξύ μελών του φορέα. Έτσι, στους μετρικούς χώρους μελετώνται έννοιες εγγύτητας, συνέχειας, φραγής κ.ά. Στοιχειώδες παράδειγμα μετρικών χώρων είναι οι ευκλείδειοι με τη μετρική που επάγεται από το προαναφερθέν εσωτερικό γινόμενο: ως απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων του χώρου ορίζεται η τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου της διαφοράς τους με τον εαυτό της. Θα μας απασχολήσει αρκετά η δομή της μετρησιμότητας με την οποία μπορεί να εφοδιαστεί φορέας και η οποία αποτελεί συλλογή από υποσύνολά του όπου είναι δυνατόν και επιθυμητό να αποδοθεί έννοια μεγέθους. Μια τέτοια δομή ονομάζεται μετρήσιμος χώρος. Η μετρήσιμη δομή μπορεί να συμπλέκεται με και να αντανακλά άλλες δομές με τις οποίες πιθανόν να είναι εφοδιασμένος ο φορέας. Οι μορφισμοί μεταξύ μετρήσιμων χώρων ονομάζονται μετρήσιμες συναρτήσεις ή, στο πλαίσιο της θεωρίας πιθανοτήτων, τυχαία στοιχεία. Μια από τις λειτουργίες τους είναι να μεταφέρουν τις κατανομές πιθανότητας από έναν χώρο σε κάποιον άλλο που ενδεχομένως έχει πλουσιότερη δομή και συνεπώς είναι πιο πρόσφορος για ανάλυση.

- Ένα σύνολο ονομάζεται αριθμήσιμο (countable), ανν είναι πεπερασμένο ή σε μονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Τυπικά παραδείγματα αριθμήσιμων απειροπληθών συνόλων είναι τα $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}$, το σύνολο των ρητών κ.ά. Αν ένα σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο, ονομάζεται υπεραριθμήσιμο ή μη αριθμήσιμο (uncountable), και οποιοδήποτε υπεραριθμήσιμο σύνολο έχει μεγαλύτερη πληθικότητα από οποιοδήποτε αριθμήσιμο. Τυπικά παραδείγματα είναι το $\mathbb{R}$, οποιοδήποτε συνεχές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το $[0, 1]$ κ.ά. Τα αριθμήσιμα γινόμενα αριθμήσιμων παραγόντων είναι αριθμήσιμα (π.χ. το $\mathbb{Z}^2$ κ.ο.κ.). Η έννοια της αριθμησιμότητας παίζει ιδιαίτερο ρόλο στον ακριβή ορισμό της κατανομής πιθανότητας μέσω της ιδιότητας της αριθμήσιμης προσθετικότητας και συνδέεται με επιθυμητές ιδιότητες συνέχειας της κατανομής.

- Υπενθυμίζεται ότι μια συνάρτηση θα ονομάζεται μονοσήμαντη ή 1-1, ανν οι εικόνες της δεν συγχέουν τα μέλη του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή ανν $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Θα ονομάζεται επί, ανν κάθε σημείο του πεδίου τιμών αποτελεί εικόνα της συνάρτησης. Θα ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη, ανν είναι 1-1 και επί, οπότε και θα είναι αντιστρέψιμη.

- Πραγματική (real function) θα ονομάζεται όποια συνάρτηση έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$.

- Ακολουθία από στοιχεία του X (X-valued sequence) ονομάζεται όποια πραγματική συνάρτηση $\mathbb{N} \to X$ ή, ισοδύναμα (γιατί;), όποιο αριθμήσιμα απειροπληθές διάνυσμα από στοιχεία του X που έχει πρώτο όρο $(x_n)\,, x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, και σε σχέση με τα παραπάνω, οι πραγματικές ακολουθίες είναι στην ουσία οι πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$. Αντίστοιχα, διπλή ακολουθία από στοιχεία του X (X-valued double sequence) ονομάζεται όποια πραγματική συνάρτηση $\mathbb{Z} \to X$ ή, ισοδύναμα (γιατί;), όποιο αριθμήσιμα άπειρο διάνυσμα από στοιχεία του X που δεν έχει πρώτο όρο $(x_n)\,, x_n \in X, \forall n \in \mathbb{Z}$.

- Υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ θα καλείται φραγμένο από πάνω, ανν $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M$ για κάθε $x \in A$. Το M αποτελεί άνω φράγμα του X και, όταν υπάρχει, προφανώς δεν είναι μοναδικό. Το σύνολο των άνω φραγμάτων έχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο το $\sup A$. Όταν το $\sup A \in A$, τότε αυτό είναι αναγκαστικά το μέγιστο στοιχείο του A. Η δυϊκή έννοια της φραγής από κάτω προκύπτει αν στα παραπάνω αντιστραφεί η φορά των ανισοτήτων. Το αντίστοιχο κάτω φράγμα με το μοναδικό χαρακτηριστικό ότι είναι το μέγιστο δυνατό ονομάζεται $\inf A$. Ανν υπάρχουν ως πραγματικοί αριθμοί τόσο το $\sup A$ όσο και το $\inf A$, τότε το A ονομάζεται φραγμένο. Μια πραγματική συνάρτηση $f : \to \mathbb{R}$ ονομάζεται φραγμένη, ανν η εικόνα του πεδίου ορισμού της μέσω αυτής στο $\mathbb{R}$, δηλαδή το σύνολο $\{f(x), x \in X\}$, είναι φραγμένο ή, ισοδύναμα, ανν το σύνολο $\{|f(x)|, x \in X\}$ έχει πραγματικό ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή $\sup_{x\in X}|f(x)|< +\infty$ (υπάρχουν τέτοιες για όποιο X;). Η έννοια της φραγής επεκτείνεται και σε κάθε μετρικό χώρο.

Περαιτέρω χρήσιμες μαθηματικές έννοιες θα εισάγονται στο βιβλίο τοπικά εντός πλαισίων. Π.χ., ένα τέτοιο πλαίσιο που θα επιχειρούσε να παράσχει τον ακριβή ορισμό της έννοιας του διανυσματικού χώρου επί του $\mathbb{R}$ θα είχε την εξής μορφή:

Έστω V μη κενό σύνολο, $+ : V \times V \to V$ (εσωτερική) πράξη πρόσθεσης μεταξύ των στοιχείων του και $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (εξωτερική) πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού των στοιχείων του V με πραγματικούς, που σε κάθε περίπτωση αποδίδει στοιχείο του V. Ο δομημένος χώρος Η $(V, +, \cdot)$ θα ονομάζεται διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, ανν ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα ως προς τις πράξεις:

1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
2. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
3. $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.
4. $\forall \boldsymbol{x} \in V, \exists - \boldsymbol{x} \in V$: $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
5. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\lambda_1(\lambda_2 \boldsymbol{x}) = (\lambda_1 \lambda_2)\boldsymbol{x}$.
6. $\forall \boldsymbol{x} \in V$, $\mathbf{1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.
8. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in V$, $(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x} + \lambda_2\boldsymbol{x}$.

Υπενθυμίζεται ότι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με αλγεβρικές δομές παρόμοιες με τους διανυσματικούς χώρους και τους συνακόλουθους μορφισμούς μεταξύ αυτών είναι η γραμμική άλγεβρα. Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας εμφανίζονται ανά διαστήματα στο βιβλίο, επειδή, μεταξύ άλλων, συλλογές από κατάλληλα τυχαία στοιχεία έχουν φυσικά τη δομή διανυσματικού χώρου. Υπενθυμίζεται επίσης ότι οι μορφισμοί (που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί) μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης αναπαρίστανται από πραγματικές μήτρες κατάλληλων διαστάσεων. Αλγεβρικά χαρακτηριστικά αυτών των μητρών, όπως ο βαθμός τους, αναπαριστούν ιδιότητες των μετασχηματισμών οι οποίες έχουν να κάνουν, π.χ., με το αν είναι μονοσήμαντοι ή/και επί. Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ σύμμορφων μητρών αναπαριστά τη σύνθεση των αντίστοιχων γραμμικών μετασχηματισμών και η αντιστρεψιμότητα της μήτρας την αντιστρεψιμότητα του υποκείμενου μετασχηματισμού. Έτσι, π.χ., μια μη τετραγωνική μήτρα δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη, επειδή η διαφωνία στις διαστάσεις της σίγουρα θα την εμποδίζει να είναι μονοσήμαντη ή επί. Περαιτέρω αλγεβρικά χαρακτηριστικά, όπως οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα τετραγωνικών μητρών, δεν αναπαριστούν μόνο πληροφορία αντιστρεψιμότητας, αλλά προσφέρουν και ιδιαίτερη εποπτεία για το πώς οι υποκείμενοι μετασχηματισμοί δρουν επί του πεδίου ορισμού τους. Επισημαίνεται ότι κάποια εποπτεία στοιχείων γραμμικής άλγεβρας όπως τα παραπάνω θα ήταν χρήσιμη για την κατανόηση, μεταξύ άλλων, της ασυμπτωτικής θεωρίας που αναπτύσσεται στο δεύτερο μέρος του βιβλίου.

Συνοπτική επισκόπηση του βιβλίου

Το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά τη θεωρία πιθανοτήτων καθεαυτήν και συγκροτείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται ένας ημιτελής ορισμός της κατανομής ή μέτρου πιθανότητας και αναπτύσσεται βασικός λογισμός ιδιοτήτων. Στη συνέχεια, και προκειμένου να διατυπωθεί ο ακριβής ορισμός, γίνεται μια σύντομη εισαγωγή σε έννοιες θεωρίας μέτρου, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή βαθύτερων ιδιοτήτων των κατανομών πιθανότητας, την ανάπτυξη της έννοιας του τυχαίου στοιχείου και την ολοκλήρωση τέτοιων αντικειμένων ως προς κατανομές πιθανότητας. Στο δεύτερο κεφάλαιο, η ανάλυση επικεντρώνεται στους πραγματικούς αριθμούς. Αφού οι κατανομές πιθανότητας που είναι ορίσιμες εκεί ταξινομηθούν βάσει ιδιοτήτων των στηριγμάτων τους, εξάγονται και παρουσιάζονται αναπαραστάσεις αυτών από πιο «οικεία» αντικείμενα που δεν είναι συνολοσυναρτήσεις. Στο τρίτο κεφάλαιο, η ανάλυση επεκτείνεται σε ευκλείδειους χώρους. Εξάγονται αντίστοιχες αναπαραστάσεις, ενώ έμφαση δίνεται στο ζήτημα της ενδεχόμενης εξάρτησης μεταξύ των εμπλεκόμενων τυχαίων μεταβλητών. Το τέταρτο κεφάλαιο θα μπορούσε να θεωρηθεί παράρτημα του προηγούμενου. Γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στην έννοια της στοχαστικής ανέλιξης και παρέχονται κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν χρονολογικές σειρές σε περιβάλλοντα στασιμότητας. Στο πέμπτο κεφάλαιο εισάγονται ζητήματα στοχαστικής σύγκλισης. Αναπτύσσονται τρόποι με τους οποίους συγκλίνουν ακολουθίες από τυχαία στοιχεία, ενώ εξετάζονται οι μεταξύ τους σχέσεις και θέματα σύγκλισης κατάλληλα σταθμισμένων αθροισμάτων από τυχαία στοιχεία.

Το δεύτερο μέρος αφορά την εμφάνιση στοιχείων από το πρώτο μέρος σε ζητήματα στατιστικής επαγωγής και οικονομετρίας. Αποτελείται από δύο κεφάλαια. Στο πρώτο (κεφάλαιο 6), αναπτύσσεται μια γενική γλώσσα για ζητήματα στατιστικών υποδειγμάτων και στατιστικής επαγωγής. Στο δεύτερο (κεφάλαιο 7), παρουσιάζεται μια γενική θεωρία για εκτιμητές και ελέγχους υποθέσεων που προκύπτουν μέσω διαδικασιών μαθηματικής βελτιστοποίησης· αυτή περιλαμβάνει πληθώρα υποπεριπτώσεων στον χώρο της οικονομετρίας. Η σχετική θεωρία εξειδικεύεται στην περίπτωση της γενικευμένης μεθόδου των ροπών, η οποία είναι ιδιαίτερα σημαντική στην οικονομετρία λόγω της ημιπαραμετρικής φύσης της, ενώ γίνεται μια πολύ σύντομη εισαγωγή σε οικονομετρικές τεχνικές που προκύπτουν στο πλαίσιο της θεωρίας της πληροφορίας, εν προκειμένω στην έννοια της εμπειρικής πιθανοφάνειας.

Το τρίτο μέρος εξετάζει την εμφάνιση στοιχείων της θεωρίας πιθανότητων στην οικονομική θεωρία σε υπόβαθρο αβεβαιότητας. Αποτελείται και αυτό από δύο κεφάλαια. Στο πρώτο (κεφάλαιο 8), αναπτύσσεται το υπόδειγμα της αναμενόμενης ωφέλειας των von Neyman και Morgenstern και γίνεται εισαγωγή στην έννοια της στοχαστικής κυριαρχίας και στο ζήτημα της ύπαρξης ισορροπιών Nash σε παίγνια σε υπόβαθρο αβεβαιότητας. Στο δεύτερο (κεφάλαιο 9), παρουσιάζεται ένα γενικό υπόδειγμα αποτίμησης χρηματοοικονομικών τίτλων και εφαρμόζεται σε διάφορα παραδείγματα.

Στο βιβλίο δεν υπάρχουν μέρη αφιερωμένα αποκλειστικά σε ασκήσεις. Οι ασκήσεις προκύπτουν κατά την ανάπτυξη των σχετικών εννοιών και ενσωματώνονται αντίστοιχα στο κείμενο. Επίσης, σε κάποια σημεία σκιαγραφούνται λεπτομέρειες αποδείξεων και αφήνονται στον αναγνώστη ως άσκηση.

Ο σκοπός του βιβλίου

Το βιβλίο βασίστηκε, μεταξύ άλλων, σε διαλέξεις μου σε διάφορα μαθήματα του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης του ΟΠΑ. Ένα από αυτά είναι το προπτυχιακό υποχρεωτικό μάθημα του Β' εξαμήνου «Στατιστική ΙΙ», όπου η έμφαση δίνεται σε στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων και στη μελέτη της έννοιας της κατανομής πιθανότητας και των αναπαραστάσεων αυτής στους πραγματικούς αριθμούς. Στοιχεία του βιβλίου έχουν αντληθεί επίσης από διαλέξεις του μαθήματος «Ανάλυση Χρηματαγορών και Κεφαλαιαγορών», που μεταξύ άλλων αφορούσε την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών τίτλων, αλλά και από μαθήματα οικονομετρίας, κυρίως σε σχέση με ζητήματα επαγωγής μέσω μαθηματικής βελτιστοποίησης και θεωρίας στοχαστικών ανελίξεων.

Η ανάπτυξη των σχετικών εννοιών εδώ υπερβαίνει σε διάφορες περιπτώσεις κατά πολύ όσα περιλάμβαναν οι αντίστοιχες διαλέξεις. Έτσι, ο σκοπός του βιβλίου είναι η περαιτέρω κατανόηση σε ζητήματα θεωρίας πιθανοτήτων και εφαρμογών της στα οικονομικά. Απευθύνεται σε φοιτητές παρεμφερών Τμημάτων και φιλοδοξεί, πέραν της συγκέντρωσης και πραγμάτευσης του υλικού, να τους παράσχει κίνητρο ώστε να εμβαθύνουν στις σχετικές έννοιες, αλλά και να αναπτύξουν μεγαλύτερη μαθηματική ωριμότητα. Το τελευταίο αναφέρεται ως κάτι που δεν είναι μόνο χρήσιμο στις συγκεκριμένες εγκύκλιες σπουδές αλλά ενδεχομένως σημαντικό γενικότερα.

Επισημαίνεται ότι διάφορα μέρη του βιβλίου θα μπορούσαν να συγκροτούν σκελετούς μαθημάτων. Π.χ., μέρος του πρώτου κεφαλαίου, ιδίως ο ημιτελής ορισμός και ο σχετικός λογισμός, το δεύτερο και το τρίτο κεφάλαιο στην ουσία συνθέτουν (και υπερβαίνουν) την ύλη του μαθήματος «Στατιστική ΙΙ», έτσι όπως διδάσκεται ειδικά τα τελευταία χρόνια. Προφανώς προσφέρονται για την κατασκευή του σκελετού μαθήματος με σκοπό την εισαγωγή των φοιτητών σε έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων. Επίσης, το πρώτο κεφάλαιο (με έμφαση σε ζητήματα της θεωρίας μέτρου), στοιχεία του δεύτερου, του τρίτου και του τέταρτου, το πέμπτο, καθώς και τα κεφάλαια του δεύτερου μέρους θα μπορούσαν να συνιστούν τον σκελετό ενός πιο προχωρημένου μαθήματος θεωρητικής οικονομετρίας. Αντίστοιχα, στοιχεία του πρώτου μέρους μαζί με το τρίτο θα μπορούσαν να λειτουργήσουν ως βασικοί άξονες ενός πιο προχωρημένου μαθήματος στην οικονομική της αβεβαιότητας και στην τιμολόγηση χρηματοοικονομικών τίτλων.