

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Μαθηματικά για Οικονομολόγους III

Ακολουθίες, σειρές, δυναμοσειρές και εφαρμογές

Διδάσκων Στέλιος Αρβανίτης
Ακαδ. έτος 2026–27
Γραφείο Πτέρυγα Δεργινύ, 4ος όροφος
E-mail stelios@aeub.gr

Εξάμηνο Χειμερινό Εξάμηνο
Γλώσσα Ελληνικά
Ώρες γραφείου Τετάρτες 15:15-17:15
Τηλέφωνο 210 820 3437

1. Γενικές πληροφορίες και σύνοψη μαθήματος

Το μάθημα εμβαθύνει στη μαθηματική έννοια της σύγκλισης και αναπτύσσει συστηματικά τη θεωρία πραγματικών ακολουθιών, πραγματικών σειρών, ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων, δυναμοσειρών και αναλυτικών συναρτήσεων. Η θεωρία συνδέεται με εφαρμογές από την οικονομική δυναμική, τη διαχρονική επιλογή, τη θεωρία πιθανοτήτων, τη στατιστική και τη μηχανική μάθηση.

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται όχι μόνο στον υπολογισμό αλλά και στη λογική των αποδείξεων: κατασκευή φραγμάτων, μονοτονία, κριτήρια σύγκλισης, έλεγχος σφάλματος αποκοπής και διάκριση μεταξύ σημειακών, τοπικών και καθολικών ισχυρισμών. Οι δυναμοσειρές λειτουργούν ως ενοποιητικό εργαλείο για την αναπαράσταση συναρτήσεων, την προσέγγιση, τις πιθανογεννήτριες και την κατασκευή λύσεων διαφορικών εξισώσεων.

Κεντρική ιδέα Πώς περνάμε με μαθηματικά ελεγχόμενο τρόπο από πεπερασμένες προσεγγίσεις σε αντικείμενα που εμπλέκουν κάποια έννοια απείρου, και πώς γνωρίζουμε ότι το αντικείμενο που ορίζουμε υπάρχει, είναι πεπερασμένο και μπορεί να προσεγγιστεί με προκαθορισμένη ακρίβεια;

2. Σκοπός του μαθήματος

Με την ολοκλήρωση του μαθήματος οι φοιτητές και οι φοιτήτριες θα πρέπει να μπορούν:

- να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν με ακρίβεια τους ορισμούς φραγής, μονοτονίας, ορίου, υπακολουθίας και ακολουθίας Cauchy, κατανοώντας τον ρόλο της πληρότητας του $\mathbb{R}$,
- να εξετάζουν τη σύγκλιση πραγματικών σειρών με κατάλληλα κριτήρια και να εκτιμούν το σφάλμα πεπερασμένης αποκοπής,
- να διακρίνουν ακολουθίες συναρτήσεων, σειρές συναρτήσεων και δυναμοσειρές και να προσδιορίζουν τα αντίστοιχα σύνολα σύγκλισης,
- να χρησιμοποιούν δυναμοσειρές και αναλυτικές συναρτήσεις για τοπική αναπαράσταση, προσέγγιση και επίλυση απλών εξισώσεων,
- να ερμηνεύουν τη σύγκλιση σε οικονομικά υποδείγματα άπειρου ορίζοντα, παρούσες αξίες, διαχρονική χρησιμότητα και δυναμικές διαδικασίες,
- να αναγνωρίζουν τον ρόλο γεννητριών και τοπικών αναπτυγμάτων σε βασικά πιθανοτικά οριακά αποτελέσματα.

3. Ηλεκτρονικό υλικό και επικοινωνία

Ο ιστότοπος του μαθήματος είναι <https://eclass.aueb.gr/courses/OIK228/>. Περιλαμβάνει το ηλεκτρονικό ημερολόγιο, σημειώσεις υπό διαμόρφωση, ασκήσεις, διορθώσεις, ανακοινώσεις και συμπληρωματική βιβλιογραφία. Το υλικό είναι δυνατόν να ανανεώνεται κατά τη διάρκεια του εξαμήνου. Οι συμμετέχοντες πρέπει να συμβουλευονται συστηματικά την πλατφόρμα και ενθαρρύνονται να αναφέρουν απορίες, τυπογραφικά ή μαθηματικά σφάλματα στις σημειώσεις.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

4. Ενδεικτική απαρίθμηση εννοιών

Η ακόλουθη διάρθρωση αποτυπώνει τον βασικό κορμό του μαθήματος. Η σειρά, το βάθος και η έκταση επιμέρους θεμάτων μπορούν να αναπροσαρμόζονται ανάλογα με τον διαθέσιμο χρόνο και τον ρυθμό της τάξης.

01 Μαθηματική γλώσσα και πραγματικές ακολουθίες

Σύντομη υπενθύμιση συνόλων, σχέσεων, συναρτήσεων, αντιστοιχιών, Καρτεσιανών γινομένων, διατάξεων, διανυσματικών χώρων και δακτυλίων. Ακολουθίες ως συναρτήσεις, αναδρομικοί ορισμοί, άλγεβρα ακολουθιών, κατά σημείο γινόμενο και μηδενοδιαίρετες. Φραγμένες και μονότονες ακολουθίες.

02 Όρια, υπακολουθίες και πληρότητα

Ορισμός ε – N και γεωμετρική ερμηνεία. Μοναδικότητα, άλγεβρα ορίων, αρχή μεταφοράς και παρεμβολή. Θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Υπακολουθίες, σημεία συσσώρευσης και Bolzano–Weierstrass. Ακολουθίες Cauchy και πληρότητα του $\mathbb{R}$. Ποσοτικά μέτρα σύγκλισης και υπολογισμός προσεγγίσεων.

03 Πραγματικές σειρές και κριτήρια σύγκλισης

Μερικά αθροίσματα, αναγκαία συνθήκη, σειρές μη αρνητικών όρων και απόλυτη σύγκλιση. Γεωμετρική και αρμονική σειρά, p -σειρές. Κριτήρια σύγκρισης, λόγου, ρίζας και ολοκληρώματος. Εναλλασσόμενες σειρές, έλεγχος υπολοίπου και σύντομη εισαγωγή στην άθροιση Cesàro.

04 Οικονομικές εφαρμογές άπειρου ορίζοντα

Παρούσα αξία ρών, γεωμετρικά αυξανόμενες πληρωμές, πολλαπλασιαστής χρήματος και ακρίβεια πεπερασμένης προσέγγισης. Τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων, επαναληπτική προεξόφληση και συνθήκες μη ύπαρξης κερδοσκοπικής φουσαλίδας.

05 Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

Σημειακή σύγκλιση, πεδίο σύγκλισης και συνάρτηση ορίου. Σειρές συναρτήσεων, εφαρμογή αριθμητικών κριτηρίων σε κάθε σημείο και γεωμετρία των συνόλων σύγκλισης. Διάκριση σημειακής και ομοιόμορφης συμπεριφοράς σε εισαγωγικό επίπεδο.

06 Διαχρονική χρησιμότητα και καλώς ορισμένες προτιμήσεις

Χρονικά προσθετικά διαχωρίσιμες προτιμήσεις, προεξοφλημένη χρησιμότητα, συνθήκες σύγκλισης και φράγματα. CRRA και λογαριθμική χρησιμότητα, αυξανόμενες ροές κατανάλωσης και οικονομική ερμηνεία του συντελεστή προεξόφλησης. Σχέση με προβλήματα δυναμικής βελτιστοποίησης και την εξίσωση Bellman.

07 Δυναμοσειρές και αναλυτικές συναρτήσεις

Ακτίνα και διάστημα σύγκλισης, θεώρημα Cauchy–Hadamard και χωριστός έλεγχος των συνοριακών σημείων. Παραγωγή και ολοκλήρωση κατά όρους. Άλγεβρα τυπικών δυναμοσειρών, γινόμενο Cauchy και αντιστροφισμότητα. Αναλυτικές συναρτήσεις, τοπικές αναπαραστάσεις, πολυώνυμα Taylor και σφάλμα προσέγγισης.

08 Πιθανότητες, στατιστική και δυναμικές εξισώσεις

Πιθανογεννήτριες, ροπογεννήτριες και χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Η λογική των αναπτυγμάτων που υποστηρίζουν εκδοχές του Νόμου Μεγάλων Αριθμών και του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Αναδρομές συντελεστών αναλυτικών λύσεων διαφορικών εξισώσεων και επιλεγμένα παραδείγματα, όπως η εξίσωση Jacobi και το υπόδειγμα Solow.

Προαιρετικές προεκτάσεις, εφόσον υπάρχει χρόνος Περαιτέρω θεωρία συνήθων ή στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, συστήματα εξισώσεων, συναρτήσεις μητρώων, διαγωνιοποίηση και εκθετικά μητρώων. Τα θέματα αυτά φωτίζουν τις συνδέσεις με τη δυναμική ανάλυση, αλλά δεν αποτελούν τον κύριο κορμό της εξεταζόμενης ύλης εκτός αν ανακοινωθεί διαφορετικά κατά τη διάρκεια του εξαμήνου.

ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΠΗΓΕΣ

5. Τρόπος μελέτης

Η κατανόηση απαιτεί συστηματική επίλυση ασκήσεων. Συνιστάται, για κάθε νέα έννοια, η μελέτη του ορισμού, ενός αντιπαραδείγματος, της βασικής απόδειξης και μιας εφαρμογής. Οι σημειώσεις του μαθήματος αποτελούν τον κύριο οδηγό ως προς την έμφαση και το αναμενόμενο επίπεδο λεπτομέρειας.

6. Ενδεικτική βιβλιογραφία

Ο κατάλογος είναι ενδεικτικός και μπορεί να εμπλουτίζεται κατά τη διάρκεια των διαλέξεων. Συνιστάται η παράλληλη χρήση περισσότερων από μία πηγών και η επίλυση πολλών ασκήσεων.

1. Ρασσιάς, Θ., *Μαθηματική Ανάλυση Ι*, Εκδόσεις Τσότρας, 2023.
2. Ζεπαπαδέας, Α. και Γιαννίκος, Ι., *Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά: Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Gutenberg, 2011.
3. Hass, J., Heil, C. και Weir, M. D., *Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.
4. Κορκοσιδής, Α., *Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης*, Τόμοι Α–Γ, Εκδόσεις Παπαζήση, 1995.
5. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, 1976.
6. Chiang, A. C. και Wainwright, K., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, McGraw–Hill.
7. Chiang, A. C., *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw–Hill, 1997.

7. Σημείωση για την οριστική ύλη

Η ακριβής εξεταστέα ύλη, οι αντιστοιχίες διαλέξεων με τις σημειώσεις και τυχόν εξαιρέσεις θα ανακοινώνονται μέσω του e-Class. Σε περίπτωση διαφοράς ανάμεσα στην παρούσα ενδεικτική περιγραφή και στις σχετικές ανακοινώσεις, υπερισχύουν οι τελευταίες.