

A. Προχρητισμένες ακολουθίες και όρια

Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε με αριθμούς

την έκφραση $x \rightarrow y \in \mathbb{R}$

↙
Τι αριθμός
είναι το x

↘
τι σημαίνει

ότι πλησιάζει το y

Ο απλούστερος τρόπος για να καταλάβουμε τα παραπάνω
είναι μέσω της έννοιας της προχρητισμένης ακολουθίας (real sequence)

— Οι παραχαραυει συλλογισμίες είναι επί της ουσίας
Συνδυασμοί με άπειρο πλήθος συνιστωσών.

Υπενθύμιση: η-διάστατο παραχαραυει συνδυασμοί είναι όποιοι
Συνταξη από η παραχαραυει αριθμούς (με οραυή ή στήλη.
αυτο για τα παραινάτω δεν έχη ιδιαίτερη σημασία)

Qn δη. $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rightarrow (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

Αυτή η καταγεγραμμένη ακολουθία λειτουργεί ως εγχείριση

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow x_0 \\ 1 \longrightarrow x_1 \\ \vdots \\ n-1 \longrightarrow x_{n-1} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

τ. Θα αποτυπώσαμε αν κάναμε κάτι ανάλογο χρησιμοποιώντας
συνολικά τους φυσικούς;

Διανυσματικός ορισμός Πρ. Θεωρ.:

Πραγματική ακολουθία $\{x_n\}$ είναι όπως πραγματικό διάνυσμα
έχει πρώτο όρο, δεν έχει τελευταίο όρο, κ' έχει πηληθός
όρων ίσο με το πηληθός των φυσικών.

Συναρτησιακός ορισμός:

Πραγματική ακολουθία $\{x_n\}$ είναι όπως συναρτησ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Θεώρημα. Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

(Σημ. περιγράφουν το ίδιο αυταίτιο)

Απόδειξη:

1. Από το Σίανσχα στην συνέπεια.

Έχω η $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$. Κατασκευάζουμε την $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
με $f(n) \equiv x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Από την συνάρτηση στο διάνυσμα:

Έστω η ακολουθία $\varphi \in$ την χορή συνάρτησης $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
κατασκευάζουμε το διάνυσμα $(f(0), f(1), \dots, f(n), \dots)$

Σπουδώς οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

— Για ποιο λόγο μπορεί να είναι χρήσιμο να έχουμε κ' τους
δύο ορισμούς;

- Ο Συνυποψαφιασμένος ορισμός είναι χρήσιμος αφού μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση στοιχείων όπως η αλγεβρα μεταξύ αμοχουδιών

- Ο συναρτησιακός ορισμός είναι χρήσιμος γιατί μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση αναγνωριστικών ιδιοτήτων όπως η μονοτονία ή η φραγή.

Κάποια Παραδείγματα:

1. $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$, $f(n) = n$ (ταυτοζωική συνάρτηση)

Αυτό είναι το παράδειγμα της ταυτοζωικής αμορφίας.

2. Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η σταθερή στο c παραγωγική αμορφία
είναι η $(c, c, \dots, c, \dots)$, $f(n) = c \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Όταν π.χ. $c = 0$ έχουμε την $(0, 0, \dots, 0, \dots)$
 $c = 1 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad (1, 1, \dots, 1, \dots)$ κ.λ.π.

3. Εναλλασσόμενες Πρ. ακολουθίες (μετάξι δύο παραγόμενων)

Έστω $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq d$, η εναλλασσόμενη ακολουθία

μεταξύ των c, d είναι η

$$(c, d, c, d, \dots) \text{ ή } f(n) = \begin{cases} c, & \text{η άρτια} \\ d, & \text{η περιττή.} \end{cases}$$

$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

Π.χ. $c=0, d=1$ έχουμε την $(0, 1, 0, 1, \dots)$

4. η ακολουθία των πρώτων αριθμών με την φύση τους

διατάξη $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$

Εξην συχευμένη περιπτώση η συμπληρωματική χορήγηση,
φας είναι επί της ουσίας άγνωστη, παρόλο που διαπιστώνεται
ότι είναι μάλλον ορισμένη.

Τελειότερα υπάρχουν ακολουθίες που είναι ιδιαίτερα περίπλοκο **στο να περιγραφούν**.

5. Αρμονική ανομοζωία:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots \right)$$

συναρτησιακά $f(n) = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6. p -ανομοζωία $p \in (0, +\infty)$

$$\left(1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \dots, \frac{1}{(n+1)^p}, \dots \right), \quad \forall f(n) = \frac{1}{(n+1)^p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

As δούμε κ' κάποια βασικά παραδείγματα σχετικά με τα
σημειώματα με τις πιθανότητες:

Θεωρούμε ω χώρο: κάθε σχετικά παράδειγμα που θα
εξετάσουμε στο εξής θα εξηγείται στο εξής υπόδειγμα.

- Έχουμε σημειώτα που υπάρχει σε διακριτό χρόνο. Οι χρονικές

στιγμές αναπαρίστανται από τους φυσικούς, $t \in \mathbb{N}$. Για $t=0$ έχουμε
το παρόν, ενώ όποιος $t > 0$ αναπαρίστα την αντίστοιχη μελλοντική στιγμή.

Θα υεξετούνε φαινόμενα που εξηγούνται σε αυτή την
οικονομία & είναι δυνατόν μεταξύ άλλων να υπορούν να ευφραδούν
ως πραγματικές αυξήσεις.

7. Έστω $X > 0$ πούδ, & έστω R σταθερό ποσοτερίδιο επιτόκιο
που επιμερίζει σε αυτή την οικονομία. Έστω η πρ. αύξηση

$$\left(\underset{x''}{x} (1+R)^0, x (1+R)^1, x (1+R)^2, \dots, x (1+R)^n, \dots \right), f(n) = x (1+R)^n$$

η αλυσίδα αυτή περιγράφει την εξέλιξη της κεραιικής
αξίας του X βάσει του επιτοκίου R , κατά την διάρκεια
ζωής αυτής της οικονομίας.

8. Έστω δ που είναι ευλόγω οικονομία που καταναλώνει το
ποσό $c_t \forall t \in \mathbb{N}$ επιμένοντας το "βέζαζα". Η αλυσίδα
 $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_t, \dots)$ αναπαριστά την βέλτη επιλογή
της διαχρονικής ροής κατανάλωσης του δ πρώτα κατά την διάρκεια ζωής της οικονομίας.