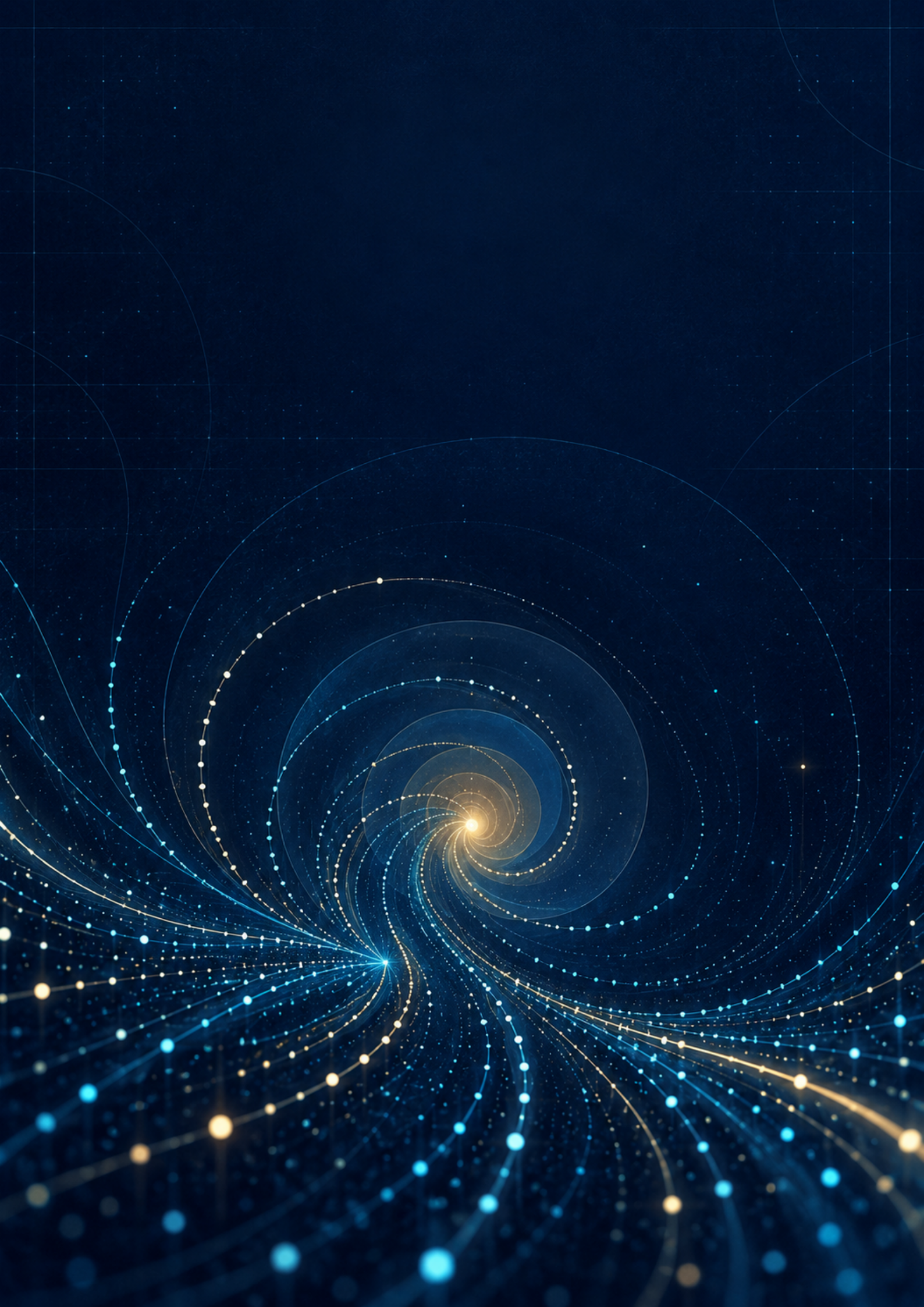




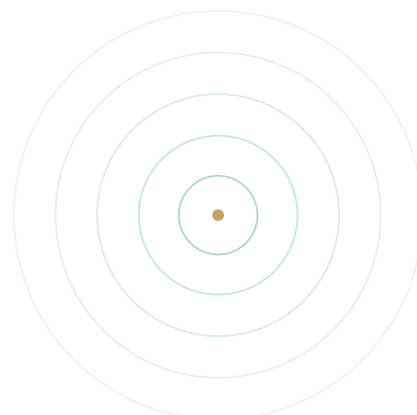
Μαθηματικά για Οικονομολόγους III

Στέλιος Αρβανίτης

Έκδοση 0.2

Σημειώσεις υπό διαμόρφωση

Χειμερινό εξάμηνο 2026–27



Σημείωση για την παρούσα έκδοση

Οι σημειώσεις αποτελούν έργο υπό διαμόρφωση. Διορθώσεις, παρατηρήσεις και αναφορές για τυπογραφικά, μαθηματικά ή βιβλιογραφικά σφάλματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και ευπρόσδεκτες.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

viii

1	Μαθηματική γλώσσα και βασικές δομές	1
1.1	Σύνολα	1
1.2	Καρτεσιανά γινόμενα	1
1.3	Σχέσεις και διατάξεις	2
1.4	Συναρτήσεις και αντιστοιχίες	2
1.5	Διανυσματικοί χώροι	3
1.6	Δακτύλιοι, σώματα και άλγεβρες	3
1.7	Πληθικότητα και σύγκριση συνόλων	3
1.8	Αλγόριθμοι και μηχανική μάθηση: βασική ορολογία	5
1.8.1	Δεδομένα, χαρακτηριστικά και στόχοι	5
1.8.2	Εκπαίδευση, επικύρωση και γενίκευση	6
1.9	Χρήσιμες οικείες έννοιες	7
2	Πραγματικές ακολουθίες και πρώτες εφαρμογές	8
2.1	Από τα διανύσματα στις πραγματικές ακολουθίες	8
2.2	Παραδείγματα οικογενειών ακολουθιών	9
2.3	Αναδρομικά ορισμένες ακολουθίες	9
2.4	Οικονομικές εφαρμογές	10
2.4.1	Ανατοκισμός και μελλοντική αξία	10
2.5	Παραδείγματα από τη μηχανική μάθηση	11
2.5.1	Μια ακολουθία ως συνάρτηση, διάνυσμα και οικογένεια όρων	12
2.5.2	Πεπερασμένες περιγραφές άπειρων ακολουθιών	13
2.5.3	Μια πρώτη έννοια υπολογισιμότητας	14
2.5.4	Δεν είναι όλες οι ακολουθίες υπολογίσιμες	15
2.6	Χρήσιμες σχέσεις: ισότητα και σχεδόν παντού ισότητα	16
2.7	Άλγεβρα πραγματικών ακολουθιών	18
2.8	Πρώτες έννοιες συμπεριφοράς ακολουθιών	19
2.9	Ασκήσεις	20
3	Χρήσιμες Αναλυτικές Ιδιότητες	21
3.1	Φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$	21
3.1.1	Άνω φράγματα και supremum	21
3.1.2	Κάτω φράγματα και infimum	21
3.2	Φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις	22
3.3	Φραγμένες πραγματικές ακολουθίες	23
3.3.1	Κριτήρια φραγής	23
3.3.2	Διατήρηση της φραγής από αλγεβρικές πράξεις	24
3.4	Μονότονες συναρτήσεις και ακολουθίες	28
3.4.1	Μονότονες συναρτήσεις	28

3.4.2	Μονότονες ακολουθίες	28
3.5	Προσέγγιση supremum και infimum	29
3.5.1	Αύξουσες και άνω φραγμένες ακολουθίες	29
3.5.2	Φθίνουσες και κάτω φραγμένες ακολουθίες	30
3.6	Ασκήσεις	30
4	Όρια πραγματικών ακολουθιών	32
4.1	Από την προσέγγιση φραγμάτων στην έννοια του ορίου	32
4.2	Τοπολογικός ορισμός του ορίου	32
4.3	Βασικά παραδείγματα	33
4.3.1	Σταθερές ακολουθίες	33
4.3.2	Η αρμονική ακολουθία	33
4.3.3	Εναλλάσσουσες ακολουθίες	34
4.4	Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες	34
4.5	Μοναδικότητα του ορίου	35
4.6	Ποσοτικός έλεγχος του σφάλματος	36
4.6.1	Γεωμετρική σύγκλιση	36
4.7	Εφαρμογές στα οικονομικά	36
4.8	Εφαρμογές στη στατιστική	37
4.9	Εφαρμογές στη μηχανική μάθηση	38
4.10	Συνοπτικός οδηγός απόδειξης ορίου	39
4.11	Ασκήσεις	39
5	Περαιτέρω ιδιότητες ορίων	41
5.1	Σύγκλιση και φραγμένο	41
5.2	Πεπερασμένες τροποποιήσεις και σχεδόν παντού ισότητα	42
5.3	Διατήρηση της διάταξης στο όριο	43
5.4	Η γεωμετρική μορφή του ορισμού του ορίου	44
5.4.1	Γιατί η τοπολογία είναι μέρος του ορισμού	45
5.4.2	Όριο και υπολογισσιμότητα	45
5.5	Σύνθετα παραδείγματα	46
5.6	Ασκήσεις	46
6	Στοιχεία άλγεβρας ορίων	51
6.1	Περαιτέρω εργαλεία για όρια ακολουθιών	51
6.1.1	Σύνοψη της γεωμετρικής κατασκευής	51
6.1.2	Η άρνηση του ορισμού του ορίου	51
6.1.3	Μοναδικότητα, φραγμένο και πεπερασμένες τροποποιήσεις	52
6.1.4	Κατασκευή ενός δείκτη ακρίβειας	53
6.2	Άλγεβρα ορίων και συνεχής μεταφορά	53
6.2.1	Γραμμικές πράξεις	53
6.2.2	Γινόμενο και πηλίκο	54
6.2.3	Αρχή της Συνεχούς Μεταφοράς	55
7	Εισαγωγή στις πραγματικές σειρές	57
7.1	Πραγματικές σειρές	57
7.1.1	Από μια ακολουθία στους μερικούς αθροιστές	57
7.1.2	Πρώτα παραδείγματα	57
7.1.3	Η γεωμετρική σειρά	58
7.1.4	Άθροιση αποκλινουσών σειρών: η μέθοδος Cesàro	59
7.1.5	Εφαρμογές των σειρών	60
7.1.6	Ασκήσεις	61

8	Κριτήρια σύγκλισης πραγματικών σειρών	63
8.1	Σειρές μη αρνητικών όρων	63
8.1.1	Σύντομη επανάληψη	63
8.1.2	Θετικοί όροι και φραγμένα μερικά αθροίσματα	64
8.1.3	Η αρμονική σειρά	64
8.1.4	Το κριτήριο του ολοκληρώματος	65
8.1.5	Οι p -σειρές	65
8.2	Πράξεις, διάταξη και ουρές σειρών	66
8.2.1	Γραμμικότητα	66
8.2.2	Διάταξη και σύγκριση	67
8.2.3	Ουρές σειρών	67
8.3	Απόλυτη σύγκλιση και αναδιατάξεις	68
8.3.1	Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση	68
8.3.2	Αναδιατάξεις	69
8.4	Κριτήριο του λόγου	70
8.4.1	Διατύπωση και ερμηνεία	70
8.4.2	Παραδείγματα του κριτηρίου λόγου	70
8.4.3	Εφαρμογές	71
8.5	Ασκήσεις	72
9	Στοιχειώδεις οικονομικές εφαρμογές	78
9.1	Οικονομικές εφαρμογές πραγματικών σειρών	78
9.1.1	Διακριτός χρόνος και προεξόφληση	78
9.1.2	Αποτίμηση τίτλου και θεμελιώδης αξία	78
9.1.3	Από την εξίσωση τιμολόγησης στη no-bubble condition	79
9.1.4	Δημιουργία χρήματος και γεωμετρική σειρά	81
10	Ακολουθίες συναρτήσεων	95
10.1	Ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων	95
10.1.1	Από τις πραγματικές ακολουθίες σε γενικότερα στοιχεία	95
10.1.2	Ορισμός και σημειακή σύγκλιση	96
10.1.3	Παραδείγματα σημειακών ορίων	97
10.2	Σειρές πραγματικών συναρτήσεων	98
10.2.1	Ορισμός	98
10.2.2	Η γεωμετρία των συνόλων σύγκλισης	98
10.2.3	Αλγόριθμος με το κριτήριο λόγου	99
10.2.4	Βασικά παραδείγματα	99
10.3	Ασκήσεις	101
11	Διαχρονική χρησιμότητα και σύγκλιση	103
11.1	Το πρόβλημα του άπειρου χρονικού ορίζοντα	103
11.1.1	Εφικτές ροές σε ένα απλό υπόδειγμα μεγέθυνσης	103
11.1.2	Το δένδρο των αποφάσεων συσσώρευσης	104
11.2	Από τις προτιμήσεις στη χρησιμότητα	104
11.2.1	Αναπαράσταση προτιμήσεων	104
11.2.2	Γιατί εμφανίζεται άθροισμα;	104
11.2.3	Στασιμότητα και εκθετική προεξόφληση	106
11.3	Πότε η σειρά χρησιμότητας είναι καλώς ορισμένη;	107
11.3.1	Το γενικό κριτήριο του Weierstrass	107
11.3.2	Η βασική περίπτωση $u(c) = c^p$	108
11.3.3	Τι αλλάζει όταν $\beta = 1$;	109
11.3.4	Μη φραγμένη στιγμιαία χρησιμότητα	109

11.4	Υπερβολική προεξόφληση	110
11.5	Από τη σύγκλιση στην ύπαρξη άριστης ροής	110
11.5.1	Προσέγγιση με πεπερασμένο ορίζοντα	111
11.6	Συνοπτικός χάρτης των λογικών βημάτων	115
11.7	Ασκήσεις	115
12	Σύντομη εισαγωγή στις δυναμοσειρές	121
12.1	Δυναμοσειρές και βασική γεωμετρία σύγκλισης	121
12.2	Το θεώρημα Cauchy–Hadamard	122
12.3	Πράξεις και αναλυτικές ιδιότητες	123
12.4	Άλγεβρα και αντιστρεψιμότητα δυναμοσειρών	124
12.4.1	Τυπικές έναντι συγκλινουσών σειρών	124
12.5	Αναλυτικές συναρτήσεις και τοπική πληροφορία	125
12.6	Η εκθετική συνάρτηση από μια δυναμοσειρά	126
12.7	Διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο δυναμοσειρών	126
12.7.1	Η γενική μέθοδος	126
12.7.2	Δυναμική προσαρμογή τιμών	129
12.8	Δυναμοσειρές και πιθανοτικές γεννήτριες	129
12.8.1	Τρεις γεννήτριες	129
12.8.2	Ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών	130
12.8.3	Κεντρικό οριακό θεώρημα	130
12.9	Η πανταχού παρουσία των δυναμοσειρών	131
12.9.1	Μια δυναμοσειρά ως συσκευασία μιας ακολουθίας	131
12.9.2	Αλγεβρικές πράξεις και πληροφορία για τις ακολουθίες	132
12.9.3	Ακτίνα σύγκλισης και αύξηση των συντελεστών	133
12.9.4	Αποτίμηση πραγματικών σειρών μέσω μιας παραμέτρου	133
12.9.5	Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά	134
12.9.6	Αβελιανή άθροιση αποκλινουσών σειρών	135
12.9.7	Σχέση αβελιανής και Cesàro άθροισης	136
12.9.8	Πιθανογεννήτριες και κατανομές	136
12.9.9	Οικονομικές γεννήτριες	137
12.9.10	Από τοπική πληροφορία στην καθολική δομή	137
12.10	Ασκήσεις	138
13	Ενδεικτικές περαιτέρω έννοιες	139
13.1	Υπακοιότητες	139
13.2	Μετρικοί χώροι	140
13.2.1	Ανοιχτές σφαίρες και γειτονιές	140
13.2.2	Η συνηθισμένη μετρική στο $\mathbb{R}$	141
13.2.3	Μετρικές στον $\mathbb{R}^m$	141
13.2.4	Η διακριτή μετρική	142
13.2.5	Μετρική σε χώρο φραγμένων ακολουθιών	143
13.2.6	Μετρική σε χώρο συναρτήσεων	143
13.2.7	Μετρικές μητρώων	144
13.2.8	Μια μετρική στο σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών	144
13.2.9	Μια συνάρτηση που δεν είναι μετρική	145
13.2.10	Μετρική και τοπολογία	145
13.3	Ακολουθίες Cauchy και πληρότητα	146
13.4	Από βαθμωτές σε μητρότιμες αναλυτικές συναρτήσεις	146
13.5	Διαφορικές εξισώσεις και αναδρομές συντελεστών	151
13.6	Ενιαία εικόνα	152
13.7	Ασκήσεις	153

Πρόλογος

Οι παρούσες σημειώσεις αναπτύχθηκαν για το μάθημα *Μαθηματικά για Οικονομολόγους III*. Κεντρικό τους αντικείμενο είναι η έννοια της σύγκλισης και οι διαφορετικές μορφές με τις οποίες αυτή εμφανίζεται στις πραγματικές ακολουθίες, στις σειρές, στις ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων, στις δυναμοσειρές και οι συνακόλουθες εφαρμογές στα οικονομικά (π.χ. στο πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής σε άπειρο χρονικό ορίζοντα ή στα δυναμικά οικονομικά υποδείγματα), στην στατιστική/οικονομετρία, κ.ο.κ.

Η βασική ιδέα που διατρέχει το βιβλίο είναι η μετάβαση από πεπερασμένες κατασκευές σε άπειρα μαθηματικά αντικείμενα. Μια ακολουθία περιέχει άπειρο πλήθος όρων, μια σειρά ορίζεται ως όριο μερικών αθροισμάτων, μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρίσταται από άπειρη σειρά και ένα πρόβλημα οικονομικής επιλογής μπορεί να εκτείνεται σε άπειρο χρονικό ορίζοντα. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις επανέρχονται τα ίδια θεμελιώδη ερωτήματα:

- Υπάρχει το σχετικό όριο;
- Είναι πεπερασμένο και μοναδικό;
- Με ποιες υποθέσεις εξασφαλίζεται η ύπαρξή του;
- Μπορεί να προσεγγιστεί με προκαθορισμένη ακρίβεια;
- Ποιες πράξεις διατηρούν τη σύγκλιση;
- Τι οικονομική, στατιστική ή υπολογιστική ερμηνεία έχει;

Οι σημειώσεις επιδιώκουν να συνδυάσουν τρία επίπεδα παρουσίασης. Το πρώτο είναι η ακριβής μαθηματική διατύπωση ορισμών, προτάσεων και θεωρημάτων. Το δεύτερο είναι η τεχνική των αποδείξεων: η κατασκευή φραγμάτων, η επιλογή κατάλληλου δείκτη, η χρήση της μονοτονίας, της πληρότητας και των κριτηρίων σύγκλισης. Το τρίτο είναι η εφαρμογή των εννοιών σε προβλήματα από τα οικονομικά, τη θεωρία πιθανοτήτων, τη στατιστική, τη μηχανική μάθηση και τη μελέτη δυναμικών συστημάτων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

Η λειτουργική γνώση βασικού μονομεταβλητού διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Χρησιμοποιούνται επίσης στοιχειώδεις έννοιες γραμμικής άλγεβρας και πιθανότητας, όταν αυτό απαιτείται από τις εφαρμογές.

Το πρώτο κεφάλαιο υπενθυμίζει τη μαθηματική γλώσσα των συνόλων, σχέσεων, συναρτήσεων και αλγεβρικών δομών. Η υπενθύμιση αυτή αποσκοπεί στην καθιέρωση κοινών συμβολισμών και δεν αντικαθιστά ένα πλήρες εισαγωγικό μάθημα Λογισμού ή Γραμμικής Άλγεβρας.

Δομή και λογική του βιβλίου

Το βιβλίο έχει οργανωθεί έτσι ώστε κάθε νέα κατηγορία αντικειμένων να ανάγεται, όσο είναι δυνατόν, στη θεωρία των πραγματικών ακολουθιών.

Μια πραγματική σειρά μελετάται μέσω της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της. Μια σειρά συναρτήσεων μελετάται, για κάθε δεδομένο σημείο, ως πραγματική σειρά. Μια δυναμοσειρά είναι ειδική σειρά συναρτήσεων με εξαιρετικά άκαμπτη γεωμετρία σύγκλισης. Μια διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας είναι κατά σημείο σειρά πραγματικών αριθμών της οποίας οι όροι έχουν οικονομική ερμηνεία. Με τον τρόπο αυτό, οι έννοιες δεν παρουσιάζονται ως ασύνδετα κεφάλαια, αλλά ως διαδοχικές γενικεύσεις μιας κοινής κατασκευής.

Κεφάλαιο 1: Μαθηματική γλώσσα και βασικές δομές

Το πρώτο κεφάλαιο καθιερώνει τη γλώσσα που χρησιμοποιείται σε ολόκληρο το βιβλίο. Παρουσιάζονται τροχάδην τα σύνολα, τα Καρτεσιανά γινόμενα, οι σχέσεις ισοδυναμίας και διάταξης, οι συναρτήσεις και οι αντιστοιχίες πολλαπλών τιμών. Ακολουθεί σύντομη εισαγωγή στους διανυσματικούς χώρους, στους δακτυλίους, στα σώματα και στις άλγεβρες.

Η ενότητα για την πληθικότητα διακρίνει τα πεπερασμένα, αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα και προετοιμάζει τη μετάβαση από πεπερασμένα διανύσματα σε άπειρες ακολουθίες. Η εισαγωγή στους αλγορίθμους και στη μηχανική μάθηση καθιερώνει όρους όπως δεδομένα, χαρακτηριστικά, παράμετροι, συνάρτηση απώλειας, εκπαίδευση και γενίκευση. Οι έννοιες αυτές χρησιμοποιούνται αργότερα ως παραδείγματα ακολουθιών, επαναληπτικών διαδικασιών και μορφών σύγκλισης.

Κεφάλαιο 2: Πραγματικές ακολουθίες και πρώτες εφαρμογές

Το δεύτερο κεφάλαιο εισάγει την πραγματική ακολουθία ως συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{N}_0$ στο $\mathbb{R}$, αλλά και ως άπειρο διατεταγμένο διάνυσμα. Παρουσιάζονται άμεσα και αναδρομικά ορισμένες ακολουθίες, γεωμετρικές τροχιές, ανατοκισμός, επαναληπτικοί αλγόριθμοι και εκθετικοί κινούμενοι μέσοι.

Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στη διαφορά μεταξύ μιας άπειρης ακολουθίας και της πεπερασμένης συμβολικής περιγραφής της. Η συζήτηση οδηγεί σε μια πρώτη, προαιρετική εισαγωγή στις υπολογίσιμες ακολουθίες και στη διάκριση μεταξύ ύπαρξης κλειστού τύπου και ύπαρξης αλγορίθμου.

Στο ίδιο κεφάλαιο εξετάζονται η ισότητα και η τελική ή σχεδόν παντού ισότητα ακολουθιών, καθώς και η άλγεβρα του χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Οι μηδενοδιαίρετες και τα ιδιοδύναμα στοιχεία δείχνουν ότι η άλγεβρα των ακολουθιών είναι πλουσιότερη από την άλγεβρα της πραγματικής ευθείας.

Κεφάλαιο 3: Χρήσιμες αναλυτικές ιδιότητες

Το τρίτο κεφάλαιο προετοιμάζει τα βασικά εργαλεία για την απόδειξη σύγκλισης. Ορίζονται τα άνω και κάτω φράγματα, το supremum και το infimum, καθώς και η φραγή συναρτήσεων και ακολουθιών.

Μελετάται λεπτομερώς η διατήρηση της φραγής από την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό και το κατά σημείο γινόμενο. Παρουσιάζονται επίσης οι μονότονες συναρτήσεις και ακολουθίες και εξηγείται πώς μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία προσεγγίζει το supremum των τιμών της. Η αντίστοιχη κατασκευή για φθίνουσες και κάτω φραγμένες ακολουθίες προετοιμάζει το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

Κεφάλαιο 4: Όρια πραγματικών ακολουθιών

Το τέταρτο κεφάλαιο περνά από τη διαισθητική έννοια της προσέγγισης στον ακριβή ορισμό ε - N του ορίου. Μελετώνται σταθερές, αρμονικές, γεωμετρικές και εναλλασσόμενες ακολουθίες.

Αποδεικνύονται το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και η μοναδικότητα του ορίου. Η σύγκλιση δεν αντιμετωπίζεται μόνο ποιοτικά: εισάγεται ο ποσοτικός έλεγχος σφάλματος και η κατασκευή δείκτη $N(\varepsilon)$. Η γεωμετρική σύγκλιση συνδέει τον ορισμό του ορίου με πρακτικά κριτήρια τερματισμού επαναληπτικών αλγορίθμων.

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με εφαρμογές στα οικονομικά, στη στατιστική και στη μηχανική μάθηση, καθώς και με έναν συνοπτικό οδηγό κατασκευής αποδείξεων ορίου.

Κεφάλαιο 5: Περαιτέρω ιδιότητες ορίων

Το πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσει συνέπειες του ορισμού της σύγκλισης. Αποδεικνύεται ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη και ότι οι πεπερασμένες τροποποιήσεις των όρων δεν μεταβάλλουν το όριο. Μελετάται επίσης η διατήρηση της διάταξης κατά τη μετάβαση στο όριο.

Η γεωμετρική ερμηνεία του ορίου οδηγεί στη γλώσσα των γειτονιών και της τοπολογίας. Παραδείγματα όπως η αδιάκριτη τοπολογία και η πραγματική ευθεία με διπλή αρχή δείχνουν ότι η μοναδικότητα του ορίου εξαρτάται από τις ιδιότητες του περιβάλλοντος χώρου.

Η σύντομη συζήτηση για την υπολογισιμότητα διακρίνει την ποιοτική ύπαρξη ορίου από την ύπαρξη καθολικού αλγορίθμου υπολογισμού του. Οι ακολουθίες τύπου Specker παρουσιάζονται ως προαιρετική ένδειξη του ότι μια υπολογίσιμη, αύξουσα και φραγμένη ακολουθία μπορεί να έχει μη υπολογίσιμο όριο.

Κεφάλαιο 6: Στοιχεία άλγεβρας ορίων

Το έκτο κεφάλαιο συγκεντρώνει τα βασικά εργαλεία χειρισμού ορίων. Εξετάζονται η άρνηση του ορισμού, η κατασκευή κοινού δείκτη ακρίβειας και η επίδραση των πεπερασμένων τροποποιήσεων.

Αποδεικνύονται οι κανόνες για το όριο αθροίσματος, διαφοράς, βαθμωτού πολλαπλασιασμού, γινομένου και πηλίκου. Η αρχή της συνεχούς μεταφοράς εξηγεί υπό ποιες συνθήκες μπορούμε να μεταφέρουμε το όριο μέσα σε μια συνεχή συνάρτηση. Το κεφάλαιο λειτουργεί ως τεχνική γέφυρα από τις ακολουθίες προς τις πραγματικές σειρές.

Κεφάλαιο 7: Εισαγωγή στις πραγματικές σειρές

Στο έβδομο κεφάλαιο μια πραγματική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ορίζεται μέσω της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της. Η διάκριση μεταξύ όρων, μερικών αθροισμάτων και αθροίσματος είναι θεμελιώδης για όσα ακολουθούν.

Η γεωμετρική σειρά αποτελεί το πρώτο πλήρως υπολογίσιμο παράδειγμα και χρησιμοποιείται σε οικονομικές εφαρμογές προεξόφλησης και πολλαπλασιαστών. Παρουσιάζεται επίσης η μέθοδος Cesàro ως γενικευμένη μέθοδος άθροισης, με σαφή διάκριση από τη συνήθη σύγκλιση.

Κεφάλαιο 8: Κριτήρια σύγκλισης πραγματικών σειρών

Το όγδοο κεφάλαιο οργανώνει τα βασικά κριτήρια σύγκλισης. Για σειρές μη αρνητικών όρων, η σύγκλιση ανάγεται στη φραγή των αύξοντων μερικών αθροισμάτων. Η αρμονική σειρά και οι p -σειρές λειτουργούν ως βασικά πρότυπα σύγκρισης.

Παρουσιάζονται το κριτήριο του ολοκληρώματος, τα κριτήρια σύγκρισης και το κριτήριο του λόγου. Μελετώνται επίσης οι ουρές σειρών, η απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση και η επίδραση των αναδιατάξεων.

Οι προαιρετικές παρεκβάσεις συνδέουν τις p -σειρές με την προεξόφληση νόμου δύναμης, τις κατανομές Pareto–Zipf και τη συνάρτηση ζήτα του Riemann. Οι παρεκβάσεις αυτές δεν απαιτούνται για την εφαρμογή των βασικών κριτηρίων, αλλά αναδεικνύουν το εύρος των εννοιών που ξεκινούν από απλά ερωτήματα σύγκλισης.

Κεφάλαιο 9: Στοιχειώδεις οικονομικές εφαρμογές

Το ένατο κεφάλαιο εφαρμόζει τη θεωρία των σειρών σε προβλήματα διακριτού χρόνου. Η προεξόφληση μιας ακολουθίας μελλοντικών ροών οδηγεί φυσικά σε γεωμετρικές ή γενικότερες πραγματικές σειρές.

Η αποτίμηση τίτλων αναπτύσσεται από την επαναληπτική εξίσωση τιμολόγησης μέχρι τη θεμελιώδη αξία και τη συνθήκη μη ύπαρξης κερδοσκοπικής φυσαλίδας. Εξηγείται προσεκτικά ο ρόλος του οριακού όρου και η διαφορά μεταξύ μιας αναδρομικής εξίσωσης και της μοναδικότητας της λύσης της.

Η δημιουργία χρήματος παρουσιάζεται ως πεπερασμένη και άπειρη γεωμετρική διαδικασία. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο σφάλμα που προκύπτει όταν ο θεωρητικός άπειρος πολλαπλασιαστής προσεγγίζεται από πεπερασμένο αριθμό γύρων.

Κεφάλαιο 10: Ακολουθίες συναρτήσεων

Το δέκατο κεφάλαιο μεταβαίνει από ακολουθίες πραγματικών αριθμών σε ακολουθίες των οποίων κάθε όρος είναι συνάρτηση. Η σημειακή σύγκλιση ορίζεται εφαρμόζοντας τη θεωρία πραγματικών ακολουθιών για κάθε σταθερό σημείο του πεδίου ορισμού.

Στη συνέχεια εισάγονται οι σειρές συναρτήσεων, το πεδίο σύγκλισης και η συνάρτηση αθροίσματος. Παραδείγματα δύο μεταβλητών δείχνουν ότι το σύνολο σύγκλισης μιας γενικής σειράς συναρτήσεων μπορεί να διαθέτει πολύπλοκη γεωμετρία και οπές. Αυτό προετοιμάζει την αντίθεση με τις δυναμοσειρές, των οποίων τα σύνολα σύγκλισης είναι πολύ πιο άκαμπτα.

Η διάκριση μεταξύ σημειακής και ομοιόμορφης συμπεριφοράς εισάγεται στον βαθμό που απαιτείται για να γίνει σαφές ότι το σημειακό όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι αναγκαστικά συνεχές.

Κεφάλαιο 11: Διαχρονική χρησιμότητα και σύγκλιση

Το ενδέκατο κεφάλαιο αναπτύσσει το κεντρικό οικονομικό παράδειγμα του βιβλίου. Ξεκινά από τις προτιμήσεις πάνω σε άπειρες ροές κατανάλωσης και εξηγεί γιατί η χρονική προσθετική διαχωρισιμότητα οδηγεί σε παράσταση της μορφής

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

Εξετάζονται οι συνθήκες υπό τις οποίες η σειρά χρησιμότητας είναι καλώς ορισμένη και πεπερασμένη. Η σύγκλιση συνδέεται με τη φραγή της κατανάλωσης, την αύξηση της στιγμιαίας χρησιμότητας και τη δύναμη της προεξόφλησης. Παρουσιάζονται παραδείγματα λογαριθμικής και CRRA χρησιμότητας.

Το κεφάλαιο διακρίνει την πεπερασμένη τιμή κάθε εφικτής ροής από την ύπαρξη άριστης ροής. Η τελευταία απαιτεί πρόσθετα επιχειρήματα συμπάγειας, συνέχειας ή δυναμικού προγραμματισμού.

Η εξίσωση Euler συνδέει την οριακή απώλεια σημερινής κατανάλωσης με την προεξοφλημένη οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου. Στην ειδική περίπτωση λογαριθμικής χρησιμότητας και παραγωγής Cobb–Douglas προκύπτει ρητή συνάρτηση πολιτικής και μπορεί να μελετηθεί η σύγκλιση προς τη σταθερή κατάσταση. Η προαιρετική συζήτηση για τη χρονική ασυνέπεια εξηγεί γιατί η εκθετική προεξόφληση έχει ιδιαίτερη σημασία για την αναδρομική διατύπωση του προβλήματος.

Κεφάλαιο 12: Σύντομη εισαγωγή στις δυναμοσειρές

Το δωδέκατο κεφάλαιο μελετά σειρές της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Το θεώρημα Cauchy–Hadamard προσδιορίζει την ακτίνα σύγκλισης, ενώ τα συνοριακά σημεία εξετάζονται χωριστά. Αποδεικνύεται ότι στο εσωτερικό του δίσκου σύγκλισης επιτρέπονται πράξεις όπως η παραγωγή και η ολοκλήρωση κατά όρους.

Η άλγεβρα των τυπικών δυναμοσειρών διαχωρίζεται από την αναλυτική θεωρία. Μελετώνται το γινόμενο Cauchy, η πολλαπλασιαστική αντιστρεψιμότητα και η αντιστροφή ως προς σύνθεση. Η σύγκριση με τα πολυώνυμα δείχνει γιατί οι δυναμοσειρές διαθέτουν πολύ πλουσιότερες ιδιότητες αντιστροφής.

Οι αναλυτικές συναρτήσεις παρουσιάζονται ως συναρτήσεις που διαθέτουν τοπική παράσταση με δυναμοσειρά. Η συζήτηση για τις τοπικές αναπαραστάσεις και τη συγκόλλησή τους δίνει μια πρώτη, μη τεχνική επαφή με τη λογική των δραγμάτων.

Η εκθετική συνάρτηση κατασκευάζεται από τη δυναμοσειρά της και χρησιμοποιείται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος των δυναμοσειρών μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε αναδρομές συντελεστών, όπως φαίνεται στις εξισώσεις Airy και Jacobi και στο υπόδειγμα Solow.

Οι πιθανογεννήτριες, ροπογεννήτριες και χαρακτηριστικές συναρτήσεις συνδέουν τις δυναμοσειρές με κατανομές, ροπές, τον Νόμο Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Η καταληκτική ενότητα δείχνει πώς οι δυναμοσειρές συσκευάζουν ακολουθίες, επιλύουν αναδρομές και επιτρέπουν την αποτίμηση πραγματικών σειρών μέσω αβελιανών κατασκευών.

Κεφάλαιο 13: Ενδεικτικές περαιτέρω έννοιες

Το τελευταίο κεφάλαιο συγκεντρώνει έννοιες που επεκτείνουν τον βασικό κορμό και δημιουργούν γέφυρες προς πιο προχωρημένα μαθήματα Ανάλυσης, Γραμμικής Άλγεβρας και Διαφορικών Εξισώσεων.

Οι υπακολουθίες χρησιμοποιούνται για τη μελέτη σημείων συσσώρευσης και την απόδειξη απόκλισης. Οι μετρικοί χώροι γενικεύουν την έννοια της απόστασης από το $\mathbb{R}$ σε διανύσματα, συναρτήσεις, μητρώα και χώρους ακολουθιών. Οι ακολουθίες Cauchy διατυπώνουν την εσωτερική συγκέντρωση των όρων χωρίς να προϋποθέτουν τη γνώση του ορίου, ενώ η πληρότητα εξασφαλίζει ότι το όριο δεν βρίσκεται έξω από τον χώρο.

Στη συνέχεια, οι βαθμωτές αναλυτικές συναρτήσεις επεκτείνονται σε συναρτήσεις μητρώων. Η διαγωνιοποίηση και η κανονική μορφή Jordan εξηγούν πώς υπολογίζονται συναρτήσεις όπως η μητρική εκθετική και πώς αυτές επιλύουν γραμμικά δυναμικά συστήματα. Τέλος, η γενική αναδρομή των συντελεστών μιας αναλυτικής λύσης συνδέει τις διαφορικές εξισώσεις με τη θεωρία δυναμοσειρών.

Το κεφάλαιο είναι περισσότερο ενδεικτικό από τα προηγούμενα. Σκοπός του είναι να δείξει πώς οι βασικές έννοιες του βιβλίου συνεχίζονται σε ευρύτερες μαθηματικές θεωρίες και όχι να αντικαταστήσει μια πλήρη παρουσίαση αυτών των αντικειμένων.

Πώς να χρησιμοποιηθούν οι σημειώσεις

Η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου διαφέρει από την ανάγνωση ενός αμιγώς περιγραφικού κειμένου. Για κάθε βασικό αποτέλεσμα προτείνεται η ακόλουθη διαδικασία:

1. Να διαβαστεί προσεκτικά ο ορισμός και να εντοπιστεί η σειρά των ποσοδεικτών.
2. Να εξεταστούν ένα θετικό παράδειγμα και ένα αντιπαράδειγμα.
3. Να διαχωριστούν καθαρά οι υποθέσεις από το συμπέρασμα του θεωρήματος.
4. Να ανακατασκευαστεί η βασική ιδέα της απόδειξης χωρίς άμεση αναφορά στο κείμενο.
5. Να εφαρμοστεί το αποτέλεσμα σε τουλάχιστον μία άσκηση και μία οικονομική ή στατιστική εφαρμογή.

Οι αποδείξεις αποτελούν μέρος του περιεχομένου και όχι απλώς πιστοποίηση ότι τα αποτελέσματα είναι σωστά. Δείχνουν πώς κατασκευάζονται φράγματα, πώς επιλέγονται δείκτες ακρίβειας και πώς μεταφέρονται οι υποθέσεις ενός προβλήματος σε αξιοποιήσιμες ανισότητες.

Τα πλαίσια με τίτλο *Εμβάθυνση* επεκτείνουν τον βασικό κορμό, προσφέρουν εφαρμογές ή παρουσιάζουν συνδέσεις με πιο προχωρημένα θέματα. Ορισμένα δηλώνονται ρητά ως εκτός ύλης. Μπορούν να παραλειφθούν σε μια πρώτη ανάγνωση χωρίς να διακοπεί η κύρια λογική ανάπτυξη. Τα πλαίσια *Προσοχή* επισημαίνουν συνηθισμένες παρανοήσεις, ενώ οι *Ερμηνείες* συνδέουν τον τυπικό μαθηματικό ισχυρισμό με τη γεωμετρική, οικονομική ή υπολογιστική σημασία του.

Σημείωση για την παρούσα έκδοση

Οι σημειώσεις αποτελούν έργο υπό διαμόρφωση. Η επιλογή και η έκταση ορισμένων εφαρμογών μπορεί να προσαρμόζεται στον διαθέσιμο διδακτικό χρόνο. Ο βασικός κορμός του μαθήματος προσδιορίζεται από τις σχετικές ανακοινώσεις και δεν ταυτίζεται αναγκαστικά με το σύνολο των προαιρετικών εμβαθύνσεων του βιβλίου.

Διορθώσεις και παρατηρήσεις για τυπογραφικά, μαθηματικά ή βιβλιογραφικά σφάλματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και ευπρόσδεκτες. Σε μια αναφορά σφάλματος βοηθά να σημειώνονται το κεφάλαιο, η ενότητα, ο αριθμός του σχετικού αποτελέσματος και, όπου είναι δυνατόν, η συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση.

Στόχος του κειμένου δεν είναι μόνο να συγκεντρώσει έναν κατάλογο τεχνικών. Είναι να αναδείξει μια ενιαία μαθηματική ιδέα: ότι η συστηματική μελέτη της προσέγγισης, της σύγκλισης και του σφάλματος επιτρέπει να μετατρέπουμε άπειρες διαδικασίες σε αυστηρά ορισμένα και ελέγξιμα μαθηματικά αντικείμενα.

Κεφάλαιο 1

Μαθηματική γλώσσα και βασικές δομές

1.1 Σύνολα

Ορισμός 1.1 (Σύνολο και ανήκειν). Ένα σύνολο είναι συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Γράφουμε $x \in A$ όταν το x ανήκει στο A , και $x \notin A$ διαφορετικά. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\emptyset$.

Αν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B , γράφουμε $A \subseteq B$. Οι βασικές αλγεβρικές πράξεις είναι

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A^c.$$

Η δυναμοσυλλογή (δυναμοσύνολο) $\mathcal{P}(A)$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A .

Παράδειγμα 1.2. Για σύνολο καταναλωτών I , το υποσύνολο

$$A = \{i \in I : \text{ο καταναλωτής } i \text{ αγοράζει το αγαθό}\}$$

περιγράφει ένα οικονομικό γεγονός. Στα πιθανοτικά υποδείγματα, κατάλληλα τέτοια υποσύνολα αποτελούν ενδεχόμενα.

1.2 Καρτεσιανά γινόμενα

Ορισμός 1.3 (Καρτεσιανό γινόμενο).

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Γενικότερα,

$$\prod_{j \in J} A_j = \{x = (x_j)_{j \in J} : x_j \in A_j \text{ για κάθε } j \in J\}.$$

Το $\mathbb{R}^n$ είναι το n -πλό καρτεσιανό γινόμενο της $\mathbb{R}$. Ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών είναι το αριθμήσιμο γινόμενο

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{R}.$$

Έτσι η μετάβαση από διανύσματα σε ακολουθίες είναι μετάβαση από πεπερασμένο σε αριθμήσιμο καρτεσιανό γινόμενο.

1.3 Σχέσεις και διατάξεις

Ορισμός 1.4 (Δυαδική σχέση). Μια δυαδική σχέση από το A στο B είναι υποσύνολο $R \subseteq A \times B$. Γράφουμε aRb όταν $(a, b) \in R$.

Μια σχέση $\sim$ στο A είναι σχέση ισοδυναμίας αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Οι κλάσεις ισοδυναμίας ομαδοποιούν αντικείμενα που θεωρούνται ίδια ως προς το κριτήριο $\sim$.

Ορισμός 1.5 (Μερική και ολική διάταξη). Μια σχέση $\preceq$ είναι μερική διάταξη αν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική. Είναι ολική διάταξη αν, επιπλέον, κάθε δύο στοιχεία είναι συγκρίσιμα.

Η συνήθης $\leq$ είναι ολική διάταξη στην $\mathbb{R}$. Η σχέση

$$x \leq_{\text{cw}} y \iff x_j \leq y_j \text{ για κάθε } j$$

είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{R}^n$: δύο διανύσματα μπορεί να μην είναι συγκρίσιμα. Στη θεωρία επιλογής-που συναντάται μεταξύ άλλων στην Μικροοικονομική Θεωρία, μια πλήρης και μεταβατική σχέση προτίμησης είναι ασθενής διάταξη.

1.4 Συναρτήσεις και αντιστοιχίες

Ορισμός 1.6 (Συνάρτηση). Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ αντιστοιχίζει σε κάθε $a \in A$ ακριβώς ένα στοιχείο $f(a) \in B$. Είναι:

- ενέσιμη (1-1), αν $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$,
- επί, αν κάθε $b \in B$ γράφεται ως $f(a)$,
- αμφιμονοσήμαντη, αν είναι ενέσιμη και επί.

Αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη, υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \rightarrow A$. Η εικόνα ενός $C \subseteq A$ είναι

$$f(C) = \{f(c) : c \in C\},$$

ενώ η αντίστροφη εικόνα ενός $D \subseteq B$ είναι

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}.$$

Ορισμός 1.7 (Αντιστοιχία). Μια αντιστοιχία ή συνάρτηση πολλαπλών τιμών

$$\Gamma : A \rightrightarrows B$$

αντιστοιχίζει σε κάθε $a \in A$ ένα υποσύνολο $\Gamma(a) \subseteq B$.

Παράδειγμα 1.8. Η εισοδηματική συνάρτηση ενός καταναλωτή είναι μονοτιμική. Η αντιστοιχία ζήτησης

$$D(p, w) \subseteq \mathbb{R}_+^L$$

μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα βέλτιστα καλάρθια. Οι αντιστοιχίες είναι επίσης η φυσική γλώσσα των συνόλων βέλτιστων λύσεων και των ισορροπιών.

1.5 Διανυσματικοί χώροι

Ορισμός 1.9 (Διανυσματικός χώρος). Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω από σώμα $\mathbb{K}$ διαθέτει πρόσθεση διανυσμάτων και βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$, που ικανοποιούν τα συνήθη αξιώματα γραμμικότητας.

Βασικά παραδείγματα είναι τα $\mathbb{R}^n$, ο χώρος πολυωνύμων, ο χώρος πραγματικών ακολουθιών και οι χώροι συναρτήσεων. Ένα σύνολο $W \subseteq V$ είναι γραμμικός υπόχωρος αν είναι κλειστό ως προς γραμμικούς συνδυασμούς.

Παρατήρηση 1.10. Η διάσταση μετρά το πλήθος των διανυσμάτων μιας βάσης. Το $\mathbb{R}^n$ είναι πεπερασμένης διάστασης, ενώ οι χώροι όλων των ακολουθιών και πολλοί χώροι συναρτήσεων είναι άπειρης διάστασης. Η άπειρη διάσταση απαιτεί πρόσθετη προσοχή σε έννοιες όπως σύγκλιση, συνέχεια και συμπίεση.

1.6 Δακτύλιοι, σώματα και άλγεβρες

Ορισμός 1.11 (Δακτύλιος). Ένας δακτύλιος διαθέτει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Η πρόσθεση σχηματίζει αβελιανή ομάδα, ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός και ισχύουν οι επιμεριστικοί νόμοι.

Το $\mathbb{Z}$ είναι δακτύλιος αλλά όχι σώμα, επειδή τα μη μηδενικά στοιχεία του δεν έχουν όλα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο μέσα στο $\mathbb{Z}$. Τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι σώματα. Τα πολυώνυμα $\mathbb{K}[x]$ και οι τυπικές δυναμοσειρές $\mathbb{K}[[x]]$ είναι δακτύλιοι. Η διάκριση θα γίνει ουσιώδης όταν εξετάσουμε ποια στοιχεία διαθέτουν αντίστροφο.

Ορισμός 1.12 (Άλγεβρα). Μια άλγεβρα πάνω από $\mathbb{K}$ είναι συγχρόνως διανυσματικός χώρος και δακτύλιος, με συμβατό βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Οι χώροι ακολουθιών με πράξεις κατά σημείο, οι πίνακες (μήτρες) και οι κατάλληλοι χώροι συναρτήσεων αποτελούν βασικά παραδείγματα αλγεβρών.

1.7 Πληθικότητα και σύγκριση συνόλων

Η **πληθικότητα** ενός συνόλου εκφράζει το πλήθος των στοιχείων του, χωρίς να εξαρτάται από τη φύση ή τη διάταξή τους. Για πεπερασμένο σύνολο A , η πληθικότητα συμβολίζεται με $|A|$ και είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Για παράδειγμα, αν

$$A = \{a, b, c\},$$

τότε $|A| = 3$.

Η σύγκριση της πληθικότητας δύο συνόλων βασίζεται στις απεικονίσεις μεταξύ τους.

Ορισμός 1.13 (Ισοπληθή σύνολα). Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθή**, και γράφουμε

$$A \sim B,$$

αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A \rightarrow B$.

Η ύπαρξη αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα στοιχείο του B και αντιστρόφως. Ο ορισμός αυτός εφαρμόζεται τόσο σε πεπερασμένα όσο και σε άπειρα σύνολα.

Ορισμός 1.14 (Αριθμήσιμο σύνολο). Ένα σύνολο A λέγεται **αριθμήσιμο άπειρο** αν είναι ισοπληθές με το $\mathbb{N}$. Λέγεται **πολύ αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο.

Ισοδύναμα, ένα άπειρο σύνολο είναι αριθμήσιμο όταν τα στοιχεία του μπορούν να τοποθετηθούν σε μια ακολουθία

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

χωρίς παραλείψεις και χωρίς επαναλήψεις. Επομένως, η έννοια της αριθμησιμότητας συνδέεται άμεσα με την έννοια της ακολουθίας.

Παράδειγμα 1.15 (Οι ακέραιοι είναι αριθμήσιμοι). Παρότι το $\mathbb{Z}$ περιέχει τους θετικούς και τους αρνητικούς ακεραίους, μπορεί να απαριθμηθεί ως

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

Άρα $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.16 (Οι ρητοί είναι αριθμήσιμοι). Κάθε θετικός ρητός γράφεται ως p/q , όπου $p, q \in \mathbb{N}$ και $q \neq 0$. Τα ζεύγη (p, q) μπορούν να διαταχθούν κατά διαγωνίους στο $\mathbb{N}^2$, παραλείποντας τις επαναλήψεις της ίδιας ρητής τιμής. Επομένως το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Το γεγονός ότι τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{N}^2$ είναι ισοπληθή δείχνει ότι η γεωμετρική ή αλγεβρική πολυπλοκότητα ενός συνόλου δεν ταυτίζεται με την πληθικότητά του.

Θεώρημα 1.17 (Cantor). Το σύνολο $\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο. Ειδικότερα,

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor: από οποιαδήποτε υποτιθέμενη απαρίθμηση πραγματικών αριθμών στο $(0, 1)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν νέο πραγματικό αριθμό που διαφέρει από τον n -οστό αριθμό στο n -οστό δεκαδικό ψηφίο. Ο νέος αριθμός δεν περιλαμβάνεται στην απαρίθμηση, άρα καμία ακολουθία δεν μπορεί να περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

Παρατήρηση 1.18. Ένα αριθμήσιμο σύνολο μπορεί να είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, μεταξύ δύο διαφορετικών πραγματικών αριθμών υπάρχει πάντοτε ένας ρητός, παρότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και το $\mathbb{R}$ μη αριθμήσιμο. Η πυκνότητα περιγράφει τη γεωμετρική κατανομή ενός συνόλου, ενώ η πληθικότητα το μέγεθός του από την άποψη της αντιστοιχίσης.

Εμβάθυνση – Πληθικότητα και χώροι συναρτήσεων

Μια πραγματική ακολουθία είναι συνάρτηση $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών είναι επομένως το

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x : x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Παρότι κάθε ακολουθία έχει μόνο αριθμήσιμα πολλούς όρους, το σύνολο όλων των δυνατών ακολουθιών είναι μη αριθμήσιμο. Η μετάβαση από ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ σε μια ολόκληρη συνάρτηση $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ αυξάνει σημαντικά τον χώρο των δυνατών αντικειμένων και επιτρέπει πολύ πλουσιότερες μορφές συμπεριφοράς.

Παρατήρηση 1.19 (Πεπερασμένες αναπαραστάσεις). Σε έναν υπολογιστή χρησιμοποιούνται μόνο πεπερασμένες συμβολοσειρές. Επομένως, οι αριθμοί, οι ακολουθίες και οι συναρτήσεις που μπορούν να περιγραφούν ακριβώς από πεπερασμένα προγράμματα αποτελούν το πολύ αριθμήσιμο σύνολο. Οι περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί, από την άποψη της πληθικότητας, δεν διαθέτουν πεπερασμένη αλγοριθμική περιγραφή. Αυτό δεν εμποδίζει τη μαθηματική μελέτη τους, αλλά υπογραμμίζει τη διαφορά ανάμεσα στην ύπαρξη ενός αντικειμένου και στην αποτελεσματική αναπαράσταση ή τον υπολογισμό του.

1.8 Αλγόριθμοι και μηχανική μάθηση: βασική ορολογία

Ένας αλγόριθμος είναι μια σαφώς καθορισμένη πεπερασμένη διαδικασία η οποία, για δεδομένη είσοδο, παράγει μια έξοδο. Στα αριθμητικά μαθηματικά, ένας αλγόριθμος συχνά δεν υπολογίζει αμέσως την ακριβή λύση, αλλά κατασκευάζει διαδοχικές προσεγγίσεις

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

Η έξοδος μετά από n βήματα είναι το x_n , ενώ το επιθυμητό μαθηματικό αντικείμενο είναι συνήθως ένα όριο x^* . Η ανάλυση του αλγορίθμου περιλαμβάνει τέσσερα διαφορετικά ερωτήματα:

1. Είναι κάθε βήμα της διαδικασίας καλώς ορισμένο;
2. Συγκλίνει η ακολουθία (x_n) ;
3. Αν συγκλίνει, είναι το όριό της η επιθυμητή λύση;
4. Πόσα βήματα απαιτούνται ώστε $\|x_n - x^*\| < \varepsilon$;

Το τέταρτο ερώτημα αφορά τον ρυθμό σύγκλισης. Η απλή γνώση ότι $x_n \rightarrow x^*$ δεν προσδιορίζει πόσο γρήγορα επιτυγχάνεται μια δεδομένη ακρίβεια. Για παράδειγμα, ένα φράγμα της μορφής

$$\|x_n - x^*\| \leq C\rho^n, \quad 0 < \rho < 1,$$

παρέχει άμεσα έναν κανόνα τερματισμού του αλγορίθμου.

1.8.1 Δεδομένα, χαρακτηριστικά και στόχοι

Στην εποπτευόμενη μηχανική μάθηση παρατηρούμε συνήθως ένα δείγμα

$$\mathcal{D}_n = \{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\},$$

όπου $x_i \in \mathbb{R}^d$ είναι το διάνυσμα χαρακτηριστικών ή επεξηγηματικών μεταβλητών και y_i είναι η μεταβλητή-στόχος. Επιλέγουμε μια οικογένεια συναρτήσεων

$$\{f_\theta : \theta \in \Theta\},$$

η οποία ονομάζεται κλάση μοντέλων. Η παράμετρος θ μπορεί να είναι αριθμός, διάνυσμα ή ακόμη και συλλογή μητρώων, όπως συμβαίνει στα νευρωνικά δίκτυα.

Μια συνάρτηση απώλειας

$$\ell(y, f_\theta(x))$$

μετρά το κόστος μιας πρόβλεψης. Η εκπαίδευση του μοντέλου συχνά διατυπώνεται ως πρόβλημα ελαχιστοποίησης του εμπειρικού κινδύνου

$$\hat{R}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(y_i, f_\theta(x_i)).$$

Ένας αλγόριθμος εκπαίδευσης παράγει μια ακολουθία παραμέτρων

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$$

με στόχο τη μείωση της $\hat{R}_n(\theta)$.

Παράδειγμα 1.20 (Κατάβαση κλίσης). Αν η $\hat{R}_n$ είναι διαφορίσιμη, η κατάβαση κλίσης ορίζεται αναδρομικά από

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta_k \nabla \hat{R}_n(\theta_k),$$

όπου $\eta_k > 0$ είναι ο ρυθμός μάθησης. Η μέθοδος κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση της κλίσης, δηλαδή προς μια κατεύθυνση τοπικής μείωσης της απώλειας.

Η μονοτονία της ακολουθίας $(\hat{R}_n(\theta_k))$ δεν είναι αυτόματη. Εξαρτάται από τη συνάρτηση απώλειας, τον ρυθμό μάθησης και τη μορφή του αλγορίθμου. Ακόμη και όταν οι τιμές της απώλειας συγκλίνουν, δεν έπεται χωρίς πρόσθετες υποθέσεις ότι οι παράμετροι θ_k συγκλίνουν ή ότι το όριο τους είναι καθολικό ελάχιστο.

1.8.2 Εκπαίδευση, επικύρωση και γενίκευση

Η ελαχιστοποίηση της απώλειας στο διαθέσιμο δείγμα δεν είναι ο τελικός στατιστικός στόχος. Το ζητούμενο είναι η καλή συμπεριφορά του μοντέλου σε νέες παρατηρήσεις. Για τον λόγο αυτό διακρίνουμε:

- το σύνολο εκπαίδευσης, που χρησιμοποιείται για την επιλογή των παραμέτρων,
- το σύνολο επικύρωσης, που χρησιμοποιείται για επιλογή μοντέλου, υπερπαραμέτρων και χρόνου τερματισμού,
- το σύνολο ελέγχου, που χρησιμοποιείται για την τελική αξιολόγηση σε δεδομένα που δεν συμμετείχαν στις προηγούμενες επιλογές.

Ο πληθυσμιακός κίνδυνος είναι

$$R(\theta) = \mathbb{E}[\ell(Y, f_\theta(X))],$$

όταν η σχετική αναμενόμενη τιμή υπάρχει. Η διαφορά

$$R(\theta) - \hat{R}_n(\theta)$$

ονομάζεται σφάλμα γενίκευσης. Η σύγκλιση εμπειρικών μέσων προς αναμενόμενες τιμές συνδέει επομένως τη μηχανική μάθηση με τους Νόμους Μεγάλων Αριθμών και, για την ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας, με Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα.

Ορισμός 1.21 (Υπερπροσαρμογή). Υπερπροσαρμογή εμφανίζεται όταν ένα μοντέλο προσαρμόζεται πολύ καλά στα δεδομένα εκπαίδευσης, αλλά παρουσιάζει αισθητά χειρότερη επίδοση σε νέες παρατηρήσεις.

Η υπερπροσαρμογή δείχνει ότι πρέπει να διακρίνουμε:

σύγκλιση του αλγορίθμου $\neq$ στατιστική συνέπεια $\neq$ καλή πεπερασμένη πρόβλεψη.

Η πρώτη αφορά τη συμπεριφορά της επαναληπτικής ακολουθίας (θ_k) , η δεύτερη τη συμπεριφορά ενός εκτιμητή όταν το μέγεθος δείγματος n αυξάνεται και η τρίτη την πραγματική επίδοση σε ένα συγκεκριμένο πεπερασμένο δείγμα.

Εμβάθυνση – Στοχαστικοί αλγόριθμοι

Στη στοχαστική κατάβαση κλίσης δεν χρησιμοποιείται σε κάθε βήμα ολόκληρο το δείγμα. Αντί της πλήρους κλίσης χρησιμοποιείται μια τυχαία ή δειγματική προσέγγιση.

γιση G_k :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \eta_k G_k.$$

Η ακολουθία (θ_k) είναι τότε στοχαστική διαδικασία. Η ανάλυσή της απαιτεί να διακρίνουμε τη σύγκλιση για κάθε πραγματοποίηση, τη σύγκλιση κατά πιθανότητα, τη σύγκλιση κατά μέσο τετράγωνο και τη σύγκλιση κατανομών. Οι έννοιες αυτές επεκτείνουν τις βασικές ιδέες σύγκλισης πραγματικών ακολουθιών που αναπτύσσονται στα επόμενα κεφάλαια.

Παρατήρηση 1.22 (Μοντέλο και αλγόριθμος). Το μοντέλο f_θ , το κριτήριο $\hat{R}_n(\theta)$ και ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την επιλογή του θ είναι διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα. Δύο αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμόζονται στο ίδιο μοντέλο και στο ίδιο κριτήριο αλλά να έχουν διαφορετική ταχύτητα, ευστάθεια ή οριακή συμπεριφορά. Αντίστροφα, ο ίδιος αλγόριθμος μπορεί να χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση πολύ διαφορετικών μοντέλων.

1.9 Χρήσιμες οικείες έννοιες

Θεωρούμε γνωστά:

- πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής,
- βασικό λογισμό ορίων και συνέχειας συναρτήσεων,
- παράγωγο και βασικούς κανόνες παραγωγής,
- ολοκλήρωμα και Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού,
- στοιχειώδεις εκθετικές, λογαριθμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι έννοιες αυτές θα χρησιμοποιούνται χωρίς πλήρη επανάληψη, αλλά θα διευκρινίζονται όταν εμφανίζονται σε νέο περιβάλλον, όπως σε χώρους ακολουθιών ή σειρών συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 2

Πραγματικές ακολουθίες και πρώτες εφαρμογές

2.1 Από τα διανύσματα στις πραγματικές ακολουθίες

Ένα n -διάστατο πραγματικό διάνυσμα γράφεται ως διατεταγμένη n -άδα

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Η θέση κάθε συνιστώσας έχει σημασία: $(0, 1) \neq (1, 0)$. Αν οι δείκτες δεν σταματούν στο $n - 1$, αλλά διατρέχουν όλο το $\mathbb{N}$, προκύπτει το άπειρο διατεταγμένο σύστημα

$$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Ορισμός 2.1 (Διανυσματική μορφή). Πραγματική ακολουθία είναι ένα διατεταγμένο άπειρο σύστημα πραγματικών αριθμών

$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots),$$

με πρώτο όρο και χωρίς τελευταίο όρο και με πλήθος όρων ίσο με το πλήθος του $\mathbb{N}$ (αριθμήςιμο).

Ορισμός 2.2 (Συναρτησιακή μορφή). Πραγματική ακολουθία είναι μια συνάρτηση

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ο πραγματικός αριθμός $f(n)$ συμβολίζεται συνήθως με x_n και λέγεται n -οστός όρος της ακολουθίας.

Θεώρημα 2.3. Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Από την ακολουθία (x_n) ορίζουμε $f(n) = x_n$. Αντίστροφα, από μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ κατασκευάζουμε την ακολουθία

$$(f(0), f(1), \dots, f(n), \dots).$$

Οι δύο κατασκευές είναι αντίστροφες μεταξύ τους. □

Παρατήρηση 2.4. Θα χρησιμοποιούμε εναλλάξ τους συμβολισμούς $(x_0, x_1, \dots)$, $f(n) = x_n$ και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Η συναρτησιακή μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τη διατύπωση ιδιοτήτων όπως η φραγή, η μονοτονία και η σύγκλιση.

2.2 Παραδείγματα οικογενειών ακολουθιών

Παράδειγμα 2.5 (Σταθερή ακολουθία). Για $c \in \mathbb{R}$, η ακολουθία $(c, c, c, \dots)$ έχει γενικό όρο $x_n = c$. Η ειδική περίπτωση $c = 0$ λέγεται μηδενική ακολουθία.

Παράδειγμα 2.6 (Ταυτοτική ακολουθία). Η ακολουθία $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ έχει γενικό όρο $x_n = n$.

Παράδειγμα 2.7 (Εναλλάσσουσα ακολουθία). Για $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq d$, θέτουμε

$$x_n = \begin{cases} c, & n \text{ άρτιος,} \\ d, & n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Για $c = 1$ και $d = -1$ παίρνουμε $x_n = (-1)^n$.

Παράδειγμα 2.8 (Γεωμετρική ακολουθία). Για $a \in \mathbb{R}$, η ακολουθία $(1, a, a^2, \dots, a^n, \dots)$ έχει γενικό όρο $x_n = a^n$.

Παράδειγμα 2.9 (Ρητές και εναλλάσσουσες ρητές ακολουθίες). Δύο βασικά παραδείγματα είναι

$$x_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{και} \quad y_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Εμβάθυνση: Αριθμητική πρόοδος

Η ακολουθία $x_n = x_0 + nd$ αυξάνει ή μειώνεται κάθε φορά κατά τη σταθερή διαφορά d . Για παράδειγμα, αν μια μηνιαία συνδρομή αυξάνεται κατά 2 ευρώ τον χρόνο, τότε η τιμή της μετά από n έτη είναι $x_n = x_0 + 2n$.

Εμβάθυνση: Ακολουθία Fibonacci

Η ακολουθία

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

δείχνει ότι ένας αναδρομικός κανόνας μπορεί να καθορίζει πλήρως μια ακολουθία χωρίς να δίνει εξαρχής κλειστό τύπο για τον F_n .

Έλεγχος κατανόησης

Γράψτε τους έξι πρώτους όρους των ακολουθιών

$$x_n = 3 \cdot 2^n, \quad y_n = (-1)^n(n+1), \quad z_0 = 2, \quad z_n = \frac{1}{2}z_{n-1} + 1.$$

2.3 Αναδρομικά ορισμένες ακολουθίες

Μια αναδρομή προσδιορίζει έναν νέο όρο χρησιμοποιώντας προηγούμενους όρους. Για να είναι πλήρης, χρειάζεται τόσο ο αναδρομικός κανόνας όσο και επαρκείς αρχικές τιμές.

Παράδειγμα 2.10. Το σύστημα

$$x_0 = 0, \quad x_n = x_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1)$$

παράγει την ταυτοτική ακολουθία $(0, 1, 2, \dots)$.

Εμβάθυνση: Απόσβεση μηχανήματος

Ένα μηχανήμα αξίας V_0 χάνει κάθε χρόνο ποσοστό $\delta \in (0, 1)$. Η λογιστική του αξία ικανοποιεί

$$V_{n+1} = (1 - \delta)V_n,$$

άρα $V_n = V_0(1 - \delta)^n$. Η αναδρομική και η κλειστή περιγραφή εκφράζουν την ίδια ακολουθία.

Εμβάθυνση: Διακριτή δυναμική πληθυσμού

Στο απλούστερο υπόδειγμα εκθετικής αύξησης,

$$P_{n+1} = (1 + r)P_n,$$

όπου r είναι ο καθαρός ρυθμός μεταβολής ανά περίοδο. Για $r > 0$ ο πληθυσμός αυξάνεται, ενώ για $-1 < r < 0$ μειώνεται.

2.4 Οικονομικές εφαρμογές**2.4.1 Ανατοκισμός και μελλοντική αξία**

Παράδειγμα 2.11. Αρχικό κεφάλαιο $X \geq 0$ τοκίζεται με σταθερό επιτόκιο $R > 0$. Η αξία του στη χρονική στιγμή $t \in \mathbb{N}$ είναι

$$X_t = X(1 + R)^t.$$

Η (X_t) είναι γεωμετρική ακολουθία.

Εμβάθυνση: Παρούσα αξία

Αν ένα ποσό C θα καταβληθεί μετά από n περιόδους και το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι $r > 0$, η παρούσα αξία του είναι

$$P_n = \frac{C}{(1 + r)^n}.$$

Η ακολουθία (P_n) είναι γνησίως φθίνουσα: όσο απομακρύνεται η πληρωμή, τόσο μικρότερη είναι η σημερινή της αξία.

Εμβάθυνση: Σταθερές καταθέσεις

Αν στο τέλος κάθε περιόδου κατατίθεται ποσό c σε λογαριασμό με επιτόκιο r , τότε

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = (1 + r)A_n + c.$$

Για $r \neq 0$ προκύπτει

$$A_n = c \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Το παράδειγμα συνδυάζει αναδρομή, γεωμετρική πρόοδο και οικονομική ερμηνεία.

Εμβάθυνση: Πραγματικό εισόδημα και πληθωρισμός

Αν το ονομαστικό εισόδημα είναι Y_n και ο δείκτης τιμών $P_n > 0$, τότε το πραγματικό εισόδημα ορίζεται κατά σημείο από

$$R_n = \frac{Y_n}{P_n}.$$

Επομένως, αύξηση του Y_n δεν συνεπάγεται αύξηση αγοραστικής δύναμης, αν το P_n αυξάνεται ταχύτερα.

2.5 Παραδείγματα από τη μηχανική μάθηση**Εμβάθυνση: Gradient descent σε μία διάσταση**

Για τη συνάρτηση κόστους $L(w) = (w - a)^2$, ο αλγόριθμος gradient descent δίνει

$$w_{n+1} = w_n - \eta L'(w_n) = w_n - 2\eta(w_n - a),$$

όπου $\eta > 0$ είναι ο ρυθμός μάθησης. Ισοδύναμα,

$$w_{n+1} - a = (1 - 2\eta)(w_n - a).$$

Άρα το σφάλμα των παραμέτρων είναι γεωμετρική ακολουθία. Για $0 < \eta < 1$ έχουμε $|1 - 2\eta| < 1$ και το σφάλμα τείνει στο μηδέν.

Εμβάθυνση: Ακολουθία τιμών της απώλειας

Κατά την εκπαίδευση ενός μοντέλου καταγράφεται η ακολουθία

$$(L_0, L_1, L_2, \dots),$$

όπου L_n είναι η τιμή της συνάρτησης απώλειας στην n -οστή επανάληψη. Μια φθίνουσα ακολουθία L_n δείχνει βελτίωση πάνω στα δεδομένα εκπαίδευσης, όχι όμως κατ' ανάγκη και καλή γενίκευση σε νέα δεδομένα.

Εμβάθυνση: Πρόγραμμα μεταβολής ρυθμού μάθησης

Ένα απλό πρόγραμμα είναι

$$\eta_n = \frac{\eta_0}{1 + \alpha n}, \quad \eta_0, \alpha > 0.$$

Ο ρυθμός μάθησης είναι θετικός και φθίνει προς το μηδέν. Μεγάλες αρχικές κινήσεις συνδυάζονται έτσι με μικρότερες διορθώσεις αργότερα.

Εμβάθυνση: Εκθετικός κινούμενος μέσος

Για διαδοχικές παρατηρήσεις x_n , ο εκθετικός κινούμενος μέσος ορίζεται από

$$m_0 = x_0, \quad m_n = \beta m_{n-1} + (1 - \beta)x_n, \quad 0 < \beta < 1.$$

Η αναδρομή χρησιμοποιείται για εξομάλυνση θορύβου, παρακολούθηση μετρικών και προσαρμοστικές μεθόδους βελτιστοποίησης.

2.5.1 Μια ακολουθία ως συνάρτηση, διάνυσμα και οικογένεια όρων

Μια πραγματική ακολουθία μπορεί να περιγραφεί με τρεις στενά συνδεδεμένους συμβολισμούς, καθένας από τους οποίους αναδεικνύει διαφορετικό χαρακτηριστικό της.

Συναρτησιακός συμβολισμός. Τυπικά, μια πραγματική ακολουθία είναι συνάρτηση

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Η τιμή της συνάρτησης στον δείκτη n συμβολίζεται με

$$x(n).$$

Ο συμβολισμός αυτός τονίζει ότι κάθε φυσικός αριθμός n αντιστοιχίζεται σε μία και μόνο μία πραγματική τιμή. Επιτρέπει επίσης τη χρήση της γενικής γλώσσας των συναρτήσεων: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, εικόνα, περιορισμός και σύνθεση.

Διανυσματικός συμβολισμός. Η ίδια ακολουθία μπορεί να παρασταθεί ως άπειρο διάνυσμα

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Με αυτή την οπτική, η ακολουθία είναι στοιχείο του χώρου

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Ο συμβολισμός αναδεικνύει τις αλγεβρικές πράξεις κατά συντεταγμένη: αν $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$x + y = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots), \quad \lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots).$$

Σε αντίθεση με ένα συνηθισμένο διάνυσμα του $\mathbb{R}^d$, το οποίο έχει πεπερασμένο πλήθος συντεταγμένων, ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχει αριθμήσιμα άπειρες συντεταγμένες.

Υβριδικός συμβολισμός. Στη θεωρία ακολουθιών θα χρησιμοποιούμε κυρίως τον συμβολισμό

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ή συντομότερα} \quad (x_n).$$

Ο συμβολισμός αυτός είναι υβριδικός. Η παρένθεση θυμίζει διάνυσμα ή διατεταγμένη οικογένεια, ενώ ο δείκτης n θυμίζει ότι η ακολουθία είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$. Υιοθετούμε τη σύμβαση

$$x_n := x(n).$$

Επομένως,

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_0, x_1, x_2, \dots)$$

είναι τρεις διαφορετικοί τρόποι αναφοράς στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο.

Παρατήρηση 2.12 (Ακολουθία και όρος ακολουθίας). Πρέπει να διακρίνουμε την ακολουθία (x_n) από τον n -οστό όρο της x_n . Η πρώτη είναι συνάρτηση ή άπειρη διατεταγμένη οικογένεια, ενώ ο δεύτερος είναι ένας πραγματικός αριθμός. Για παράδειγμα, αν

$$x_n = \frac{1}{n+1},$$

τότε

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right), \quad x_4 = \frac{1}{5}.$$

Παρατήρηση 2.13 (Η επιλογή του αρχικού δείκτη). Ανάλογα με το πρόβλημα, μια ακολουθία μπορεί να έχει πεδίο ορισμού το

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

ή το

$$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Η επιλογή δεν αλλάζει την ασυμπτωτική θεωρία, αλλά πρέπει να δηλώνεται ώστε να αποφεύγονται ασάφειες στους τύπους και στις αρχικές συνθήκες. Στις σημειώσεις θα χρησιμοποιούμε κατά κανόνα δείκτες που αρχίζουν από το 0, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Εμβάθυνση – Χρονοσειρές και διανύσματα δεδομένων

Σε μια οικονομική εφαρμογή, η ακολουθία

$$(Y_t)_{t \geq 0}$$

μπορεί να αναπαριστά το εισόδημα στις περιόδους $t = 0, 1, 2, \dots$. Η συνάρτηση $Y : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ περιγράφει ολόκληρη τη χρονική τροχιά, ενώ το πεπερασμένο διάνυσμα

$$(Y_0, Y_1, \dots, Y_T) \in \mathbb{R}^{T+1}$$

περιέχει μόνο τις παρατηρήσεις μέχρι τον χρονικό ορίζοντα T . Η διάκριση μεταξύ της δυνητικά άπειρης διαδικασίας και του πεπερασμένου παρατηρούμενου δείγματος είναι θεμελιώδης στη μελέτη χρονοσειρών.

2.5.2 Πεπερασμένες περιγραφές άπειρων ακολουθιών

Μια ακολουθία αποτελείται από άπειρο πλήθος όρων, αλλά κάθε γραπτή μαθηματική περιγραφή της είναι αναγκαστικά πεπερασμένη. Όταν γράφουμε

$$(1, 2, 3, 4, \dots),$$

τα αποσιωπητικά δεν αποτελούν από μόνα τους μαθηματικό ορισμό. Ο αναγνώστης υποθέτει πιθανότατα ότι εννοούμε την ακολουθία $x_n = n + 1$, αλλά τα ίδια πρώτα τέσσερα στοιχεία είναι συμβατά με άπειρες διαφορετικές συνέχειες.

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες

$$x_n = n + 1$$

και

$$y_n = \begin{cases} n + 1, & 0 \leq n \leq 3, \\ 0, & n \geq 4, \end{cases}$$

αρχίζουν και οι δύο ως

$$1, 2, 3, 4,$$

αλλά στη συνέχεια είναι τελείως διαφορετικές. Ακόμη πιο περίπλοκες ακολουθίες μπορούν να συμφωνούν για εκατομμύρια όρους και να διαφέρουν μόνο αργότερα.

Προσοχή

Μια πεπερασμένη παράθεση αρχικών όρων δεν προσδιορίζει γενικά μια μοναδική άπειρη ακολουθία. Ο συμβολισμός με αποσιωπητικά είναι ασφαλής μόνο όταν ο κανόνας συνέχισης είναι απολύτως σαφής από το πλαίσιο.

Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους:

1. με έναν άμεσο τύπο, όπως

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n+1},$$

2. με μια αναδρομική σχέση και αρχικές τιμές, όπως

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1, \quad x_0 = 0,$$

3. με μια ιδιότητα που προσδιορίζει μοναδικά κάθε όρο,
4. με έναν αλγόριθμο που, όταν λαμβάνει ως είσοδο τον δείκτη n , υπολογίζει τον αντίστοιχο όρο.

Η απουσία ενός απλού κλειστού τύπου δεν σημαίνει ότι η ακολουθία είναι ασαφής ή ότι οι όροι της δεν μπορούν να υπολογιστούν. Πολλές σημαντικές ακολουθίες ορίζονται αναδρομικά ή αλγοριθμικά.

Παράδειγμα 2.14 (Ακολουθία Fibonacci). Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται από

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Ο αναδρομικός ορισμός προσδιορίζει μοναδικά κάθε όρο και παρέχει άμεσα έναν αλγόριθμο υπολογισμού, ακόμη και αν δεν χρησιμοποιήσουμε τον γνωστό κλειστό τύπο της ακολουθίας.

2.5.3 Μια πρώτη έννοια υπολογισιμότητας

Ορισμός 2.15 (Υπολογίσιμη ακέραια ακολουθία). Μια ακολουθία ακεραίων (a_n) λέγεται υπολογίσιμη αν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος, για κάθε είσοδο $n \in \mathbb{N}$, τερματίζει έπειτα από πεπερασμένο πλήθος βημάτων και επιστρέφει ακριβώς τον ακέραιο a_n .

Για πραγματικές ακολουθίες η απαίτηση ακριβούς εκτύπωσης ενός όρου είναι συχνά υπερβολικά ισχυρή, επειδή ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να έχει άπειρη δεκαδική παράσταση. Χρησιμοποιούμε τότε μια έννοια υπολογισμού με αυθαίρετη ακρίβεια.

Ορισμός 2.16 (Υπολογίσιμη πραγματική ακολουθία). Μια πραγματική ακολουθία (x_n) λέγεται υπολογίσιμη αν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος, για κάθε ζεύγος

$$(n, k) \in \mathbb{N}^2,$$

παράγει έναν ρητό αριθμό $q_{n,k}$ τέτοιο ώστε

$$|x_n - q_{n,k}| \leq 2^{-k}.$$

Ο δείκτης n επιλέγει τον όρο της ακολουθίας, ενώ ο δείκτης k επιλέγει την απαιτούμενη ακρίβεια. Ο ορισμός δεν απαιτεί έναν απλό συμβολικό τύπο για το x_n . Απαιτεί μια ενιαία αποτελεσματική διαδικασία που προσεγγίζει κάθε όρο όσο καλά ζητηθεί.

Παράδειγμα 2.17. Η ακολουθία

$$x_n = \sqrt{n+1}$$

είναι υπολογίσιμη. Παρότι οι περισσότεροι όροι της είναι άρρητοι, μέθοδοι όπως ο αλγόριθμος του Newton παράγουν, για κάθε n και k , μια ρητή προσέγγιση με σφάλμα μικρότερο από 2^{-k} .

Παράδειγμα 2.18 (Υπολογίσιμη ακολουθία χωρίς απλό τύπο). Έστω p_n ο n -οστός πρώτος αριθμός και

$$x_n = \frac{1}{p_n}.$$

Δεν χρειάζεται να διαθέτουμε έναν στοιχειώδη κλειστό τύπο για τον p_n . Μπορούμε να εξετάζουμε διαδοχικά τους φυσικούς αριθμούς, να ελέγχουμε ποιοι είναι πρώτοι και να σταματάμε όταν βρούμε τον n -οστό. Επομένως η (x_n) είναι υπολογίσιμη.

Παρατήρηση 2.19 (Τύπος και αλγόριθμος). Η ύπαρξη κλειστού τύπου και η υπολογισιμότητα είναι διαφορετικές έννοιες. Ένας περίπλοκος τύπος μπορεί να μην παρέχει αποτελεσματικό τρόπο αριθμητικού υπολογισμού, ενώ ένας απλός αλγόριθμος ή μια αναδρομή μπορεί να υπολογίζει μια ακολουθία για την οποία δεν διαθέτουμε χρήσιμο κλειστό τύπο.

2.5.4 Δεν είναι όλες οι ακολουθίες υπολογίσιμες

Κάθε αλγόριθμος έχει πεπερασμένη περιγραφή ως συμβολοσειρά σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο. Επομένως υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμοι πολλοί αλγόριθμοι. Κατά συνέπεια, υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα πολλές υπολογίσιμες πραγματικές ακολουθίες.

Από την άλλη πλευρά, το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

είναι μη αριθμήσιμο. Άρα:

Πρόταση 2.20. Υπάρχουν πραγματικές, ακόμη και δυαδικές, ακολουθίες που δεν είναι υπολογίσιμες.

Το συμπέρασμα είναι υπαρκτικό: οι περισσότερες ακολουθίες, από την άποψη της πληθικότητας, δεν μπορούν να παραχθούν από κανέναν αλγόριθμο. Αυτό δεν σημαίνει ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι μη υπολογίσιμη απλώς επειδή δεν γνωρίζουμε τον τύπο της. Για να αποδειχθεί η μη υπολογισιμότητα μιας συγκεκριμένης ακολουθίας απαιτείται ιδιαίτερο επιχείρημα, συνήθως μέσω σύνδεσης με κάποιο μη επιλύσιμο πρόβλημα.

Εμβάθυνση – Σύγκλιση και αποτελεσματικός υπολογισμός

Ακόμη και αν κάθε όρος x_n είναι υπολογίσιμος και η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, δεν έπεται αυτομάτως ότι το όριο είναι υπολογίσιμο. Για τον αποτελεσματικό υπολογισμό του ορίου χρειάζεται συνήθως και ένας υπολογίσιμος έλεγχος του ρυθμού σύγκλισης, δηλαδή μια διαδικασία που, για κάθε k , παρέχει έναν δείκτη $N(k)$ τέτοιο ώστε

$$n \geq N(k) \implies |x_n - L| \leq 2^{-k}.$$

Έτσι διακρίνουμε την ποιοτική μαθηματική δήλωση

$$x_n \rightarrow L$$

από την ποσοτική πληροφορία που επιτρέπει σε έναν αλγόριθμο να προσεγγίσει το L με πιστοποιημένο σφάλμα.

Παρατήρηση 2.21. Η θεωρία υπολογισιμότητας δεν αποτελεί κύριο αντικείμενο του μαθήματος. Η σύντομη αυτή εισαγωγή εξηγεί γιατί οι έννοιες του ορίου, του ρυθμού σύγκλισης και του σφάλματος προσέγγισης έχουν τόσο μεγάλη σημασία στις εφαρμογές: άλλο είναι να γνωρίζουμε ότι ένα μαθηματικό αντικείμενο υπάρχει και άλλο να διαθέτουμε μια πεπερασμένη διαδικασία για τον υπολογισμό του.

2.6 Χρήσιμες σχέσεις: ισότητα και σχεδόν παντού ισότητα

Ορισμός 2.22 (Ισότητα). Οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι ίσες αν

$$x_n = y_n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 2.23. Οι ακολουθίες $A = (0, 0, 0, \dots)$ και $B = (1, 1, 0, 0, \dots)$ δεν είναι ίσες, αφού διαφωνούν στους δείκτες 0 και 1.

Ορισμός 2.24 (Σχεδόν παντού ισότητα). Οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι σχεδόν παντού ίσες, και γράφουμε $(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$, αν

$$x_n = y_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών.

Θεώρημα 2.25 (Η σ.π. ισότητα ως σχέση ισοδυναμίας). Η σχέση $\stackrel{\sigma.\pi.}{=}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι η $\stackrel{\sigma.\pi.}{=}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Ανακλαστικότητα. Έστω μια οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει προφανώς

$$x_n = x_n.$$

Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε, για παράδειγμα, $N = 0$, και τότε

$$x_n = x_n \quad \text{για κάθε } n \geq N.$$

Άρα

$$(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (x_n).$$

Συνεπώς η σχέση $\stackrel{\sigma.\pi.}{=}$ είναι ανακλαστική.

Συμμετρία. Έστω δύο πραγματικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) τέτοιες ώστε

$$(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (y_n).$$

Από τον ορισμό, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x_n = y_n \quad \text{για κάθε } n \geq N.$$

Η ισότητα πραγματικών αριθμών είναι συμμετρική. Επομένως, για κάθε $n \geq N$,

$$y_n = x_n.$$

Άρα

$$(y_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (x_n).$$

Συνεπώς η σχέση $\stackrel{\sigma.\pi.}{=}$ είναι συμμετρική.

Μεταβατικότητα. Έστω τρεις πραγματικές ακολουθίες

$$(x_n), \quad (y_n), \quad (z_n)$$

τέτοιες ώστε

$$(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (y_n) \quad \text{και} \quad (y_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (z_n).$$

Από την πρώτη σχέση υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x_n = y_n \quad \text{για κάθε } n \geq N_1.$$

Από τη δεύτερη σχέση υπάρχει $N_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$y_n = z_n \quad \text{για κάθε } n \geq N_2.$$

Θέτουμε

$$N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Αν $n \geq N$, τότε ταυτόχρονα $n \geq N_1$ και $n \geq N_2$. Συνεπώς

$$x_n = y_n \quad \text{και} \quad y_n = z_n.$$

Από τη μεταβατικότητα της ισότητας πραγματικών αριθμών παίρνουμε

$$x_n = z_n \quad \text{για κάθε } n \geq N.$$

Άρα

$$(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (z_n).$$

Συνεπώς η σχέση $\stackrel{\sigma.\pi.}{=}$ είναι μεταβατική.

Αφού η $\stackrel{\sigma.\pi.}{=}$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □

Παρατήρηση 2.26 (Ισοδύναμη διατύπωση). Η σχέση

$$(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$$

ισχύει αν και μόνο αν το σύνολο των δεικτών στους οποίους οι δύο ακολουθίες διαφέρουν,

$$D(x, y) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\},$$

είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Αν υπάρχει N τέτοιο ώστε $x_n = y_n$ για κάθε $n \geq N$, τότε

$$D(x, y) \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\},$$

οπότε το $D(x, y)$ είναι πεπερασμένο.

Αντίστροφα, έστω ότι το $D(x, y)$ είναι πεπερασμένο. Αν $D(x, y) = \emptyset$, τότε οι ακολουθίες είναι ίσες σε κάθε δείκτη και συνεπώς είναι τελικά ίσες. Αν $D(x, y) \neq \emptyset$, επειδή είναι πεπερασμένο, διαθέτει μέγιστο στοιχείο. Θέτουμε

$$N = 1 + \max D(x, y).$$

Για κάθε $n \geq N$ έχουμε $n \notin D(x, y)$, άρα $x_n = y_n$. Επομένως

$$(x_n) \stackrel{\sigma.\pi.}{=} (y_n).$$

□

Πόρισμα 2.27. Η σχέση $\overset{\sigma.\pi.}{\equiv}$ διαμερίζει το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Η κλάση μιας ακολουθίας $x = (x_n)$ είναι

$$[x]_{\overset{\sigma.\pi.}{\equiv}} = \left\{ y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : y_n = x_n \text{ από κάποιον δείκτη και μετά} \right\}.$$

Επομένως δύο ακολουθίες ανήκουν στην ίδια κλάση όταν μπορεί να διαφέρουν στους αρχικούς τους όρους, αλλά έχουν ακριβώς την ίδια ουρά.

Παρατήρηση 2.28 (Ασυμπτωτικές ιδιότητες). Η αντικατάσταση πεπερασμένου πλήθους όρων μιας ακολουθίας δεν επηρεάζει ιδιότητες που εξαρτώνται μόνο από την ουρά της. Ειδικότερα, αν

$$(x_n) \overset{\sigma.\pi.}{\equiv} (y_n),$$

τότε:

- η (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η (y_n) , και στην περίπτωση αυτή έχουν το ίδιο όριο,
- η μία είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι φραγμένη και η άλλη,
- η μία είναι Cauchy αν και μόνο αν είναι Cauchy και η άλλη.

Αντίθετα, ιδιότητες που αφορούν όλους τους όρους, όπως η μονοτονία από τον πρώτο δείκτη, δεν διατηρούνται αναγκαστικά.

Εμβάθυνση: Αρχικοποίηση αλγορίθμου

Δύο επαναληπτικοί αλγόριθμοι μπορεί να παράγουν ακολουθίες με διαφορετικές αρχικές τιμές αλλά ίδιες τιμές από κάποιο βήμα και μετά. Οι ακολουθίες αποτελεσμάτων είναι τότε σχεδόν παντού ίσες, χωρίς να είναι ίσες.

2.7 Άλγεβρα πραγματικών ακολουθιών

Για δύο ακολουθίες (x_n) , (y_n) και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε κατά σημείο:

$$(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_n) := (\lambda x_n),$$

$$(x_n) \otimes (y_n) := (x_n y_n).$$

Θεώρημα 2.29. Το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών, με την κατά σημείο πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Με το κατά σημείο γινόμενο και τη σταθερή ακολουθία $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$ ως μονάδα, ο χώρος αυτός είναι μάλιστα μια αντιμεταθετική $\mathbb{R}$ -άλγεβρα, την $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Η πρόσθετη δομή δεν τον κάνει απλώς μια «μεγαλύτερη πραγματική ευθεία»: κάθε συντεταγμένη μπορεί να συμπεριφέρεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες.

Παράδειγμα 2.30 (Μηδενοδιαιρέτες). Θέτουμε

$$x = (1, 0, 1, 0, \dots), \quad y = (0, 1, 0, 1, \dots).$$

Παρότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$, ισχύει

$$x \otimes y = (0, 0, 0, \dots).$$

Επομένως, η άλγεβρα των ακολουθιών έχει μηδενοδιαιρέτες, σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$.

Γενικότερα, για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική ακολουθία $e_A = (\mathbf{1}_A(n))_n$ ικανοποιεί $e_A^2 = e_A$. Έτσι η $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχει άπειρα μη τετριμμένα ιδιοδύναμα στοιχεία, ενώ στο $\mathbb{R}$ οι μόνες λύσεις της $r^2 = r$ είναι 0 και 1. Επίσης, μια ακολουθία είναι αντιστρέψιμη ως προς το κατά σημείο γινόμενο ακριβώς όταν κανένας όρος της δεν μηδενίζεται, οπότε το αντίστροφο είναι $(1/x_n)_n$. Η μερική εξαφάνιση σε διαφορετικά σύνολα δεικτών, οι μηδενοδιαίρετες και οι πολλές προβολές e_A δημιουργούν πολύ πλουσιότερη αλγεβρική γεωμετρία από εκείνη του σώματος $\mathbb{R}$. Αυτή είναι μια πρώτη ένδειξη ότι η μετάβαση από έναν αριθμό σε μια ολόκληρη τροχιά αφήνει χώρο για φαινόμενα που δεν μπορούν να εμφανιστούν στην πραγματική ευθεία.

Εμβάθυνση: Χαρτοφυλάκια ως γραμμικοί συνδυασμοί

Αν $(r_n^{(1)})$ και $(r_n^{(2)})$ είναι οι ακολουθίες αποδόσεων δύο περιουσιακών στοιχείων, τότε ένα χαρτοφυλάκιο με βάρη w και $1 - w$ έχει απόδοση

$$r_n^{(p)} = wr_n^{(1)} + (1 - w)r_n^{(2)}.$$

Η ακολουθία αποδόσεων του χαρτοφυλακίου είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο επιμέρους ακολουθιών.

Εμβάθυνση: Σφάλμα πρόβλεψης

Αν (y_n) είναι οι πραγματικές τιμές και $(\hat{y}_n)$ οι προβλέψεις ενός μοντέλου, τότε

$$e_n = y_n - \hat{y}_n, \quad q_n = e_n^2$$

είναι αντίστοιχα η ακολουθία σφαλμάτων και η ακολουθία τετραγωνικών σφαλμάτων. Πρόκειται για κατά σημείο αφαίρεση και γινόμενο.

2.8 Πρώτες έννοιες συμπεριφοράς ακολουθιών

Ορισμός 2.31 (Φραγμένη ακολουθία). Η (x_n) λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x_n| \leq M \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ορισμός 2.32 (Μονοτονία). Η (x_n) είναι αύξουσα αν $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n , και φθίνουσα αν $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n .

Ορισμός 2.33 (Σύγκλιση). Η (x_n) συγκλίνει στο $L \in \mathbb{R}$ αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq N \implies |x_n - L| < \varepsilon.$$

Παρατήρηση 2.34. Οι παραπάνω έννοιες προστίθενται ως φυσική συνέχεια των δύο διαλέξεων. Δεν αποτελούν μέρος της αρχικής χειρόγραφης ανάπτυξης.

Παράδειγμα 2.35. Η $x_n = 1/(n+1)$ είναι θετική, φθίνουσα, φραγμένη και συγκλίνει στο 0. Η $y_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Η $z_n = n$ είναι αύξουσα και μη φραγμένη.

2.9 Ασκήσεις

Επίπεδο Α: βασική κατανόηση

Άσκηση 2.36. Βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών

$$x_n = 2n + 1, \quad y_n = 3(-1)^n, \quad z_n = \frac{n}{n+1}.$$

Άσκηση 2.37. Δώστε συναρτησιακό ορισμό για τις ακολουθίες $(2, 4, 6, 8, \dots)$ και $(1, 0, 1, 0, \dots)$.

Επίπεδο Β: εφαρμογές

Άσκηση 2.38. Κεφάλαιο 10.000 ευρώ τοκίζεται ετησίως με 4%. Γράψτε την ακολουθία των υπολοίπων και υπολογίστε τους όρους X_1 , X_5 και X_{10} .

Άσκηση 2.39. Για $L(w) = (w - 3)^2$, $w_0 = 0$ και $\eta = 0.1$, υπολογίστε τα w_1, w_2, w_3 . Βρείτε κλειστό τύπο για το $w_n - 3$.

Επίπεδο Γ: σύνθεση και απόδειξη

Άσκηση 2.40. Αποδείξτε τις επιμεριστικές ιδιότητες

$$x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Άσκηση 2.41. Αποδείξτε ότι η σχεδόν παντού ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Στο μεταβατικό βήμα χρησιμοποιήστε την ένωση των δύο πεπερασμένων συνόλων εξαιρέσεων.

Άσκηση 2.42. Έστω $x_{n+1} = ax_n + b$, με $a \neq 1$. Βρείτε το σταθερό σημείο x^* και αποδείξτε ότι

$$x_n - x^* = a^n(x_0 - x^*).$$

Για ποιες τιμές του a συγκλίνει η (x_n) στο x^* ;

Κεφάλαιο 3

Χρήσιμες Αναλυτικές Ιδιότητες

3.1 Φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

3.1.1 Άνω φράγματα και supremum

Ορισμός 3.1 (Άνω φραγμένο σύνολο). Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A λέγεται άνω φραγμένο αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x \leq M \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Ισοδύναμα, $A \subseteq (-\infty, M]$. Κάθε τέτοιο M λέγεται άνω φράγμα του A .

Ένα άνω φραγμένο σύνολο έχει προφανώς άπειρα άνω φράγματα. Αν M είναι άνω φράγμα, τότε και κάθε $M^* \geq M$ είναι άνω φράγμα.

Ορισμός 3.2 (Supremum). Αν το A είναι άνω φραγμένο, το μικρότερο άνω φράγμα του συμβολίζεται με

$$\sup A.$$

Παράδειγμα 3.3. Για $A = (0, 1)$, κάθε $M \geq 1$ είναι άνω φράγμα και

$$\sup A = 1.$$

Παρότι $1 \notin A$, το supremum υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4. Το $A = (0, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο: για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in A$ με $x > M$, για παράδειγμα $x = \max\{M + 1, 1\}$.

3.1.2 Κάτω φράγματα και infimum

Ορισμός 3.5 (Κάτω φραγμένο σύνολο). Το $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται κάτω φραγμένο αν υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$L \leq x \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Ισοδύναμα, $A \subseteq [L, +\infty)$. Κάθε τέτοιο L λέγεται κάτω φράγμα του A .

Η έννοια είναι δυική της παραπάνω. Είναι εμφανές ότι το σύνολο θα είναι κάτω φραγμένο, αν και μόνο αν το σύνολο που συγκροτείται από τα στοιχεία του αρχικού πολλαπλασιασμένα με -1 είναι άνω φραγμένο (γιατί:).

Ορισμός 3.6 (Infimum). Αν το A είναι κάτω φραγμένο, το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του συμβολίζεται με

$$\inf A.$$

Ορισμός 3.7 (Φραγμένο σύνολο). Το A λέγεται *φραγμένο* αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω φραγμένο. Ισοδύναμα, υπάρχουν $L, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$A \subseteq [L, M].$$

Παρατήρηση 3.8. Αν $\sup A \in A$, τότε $\sup A = \max A$. Αν $\inf A \in A$, τότε $\inf A = \min A$. Η ύπαρξη supremum ή infimum δεν συνεπάγεται ότι υπάρχει μέγιστο ή ελάχιστο.

Άσκηση 3.9. Να βρεθούν, όπου υπάρχουν, τα $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ και $\min A$ για τα σύνολα

$$(0, 1), \quad [0, 1), \quad \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}, \quad \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Εμβάθυνση: εφικτό σύνολο μιας οικονομικής απόφασης

Αν q είναι ποσότητα παραγωγής με τεχνολογικό περιορισμό $0 \leq q \leq K$, το εφικτό σύνολο είναι $A = [0, K]$. Έχει

$$\inf A = \min A = 0, \quad \sup A = \max A = K.$$

Αν όμως ο περιορισμός είναι $0 \leq q < K$, τότε $\sup A = K$ αλλά δεν υπάρχει μέγιστο.

3.2 Φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις

Έστω μη κενό σύνολο X και συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Η εικόνα της f είναι

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Ορισμός 3.10. Η f λέγεται:

- α. άνω φραγμένη, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in X$,
- β. κάτω φραγμένη, αν υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ με $L \leq f(x)$ για κάθε $x \in X$,
- γ. φραγμένη, αν υπάρχουν $L, M \in \mathbb{R}$ με $L \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in X$.

Ισοδύναμα, η f είναι άνω, κάτω ή αμφίπλευρα φραγμένη ακριβώς όταν η εικόνα $f(X)$ έχει την αντίστοιχη ιδιότητα. Όταν οι ποσότητες υπάρχουν, γράφουμε

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X), \quad \inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X).$$

Παράδειγμα 3.11. Για $X = [0, 1]$ και $f(x) = e^x$ έχουμε $f(X) = [1, e]$. Άρα

$$\inf_{x \in X} f(x) = 1, \quad \sup_{x \in X} f(x) = e.$$

Παράδειγμα 3.12. Η $f(x) = \sin x$ στο $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη, με $-1 \leq \sin x \leq 1$. Η $f(x) = e^x$ στο $\mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.

Εμβάθυνση: συνάρτηση χρησιμότητας σε περιορισμένο πεδίο

Έστω $u(c) = \log c$ και $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$, όπου $0 < \underline{c} < \bar{c}$. Επειδή η $\log$ είναι αύξουσα,

$$\log \underline{c} \leq u(c) \leq \log \bar{c}.$$

Άρα η χρησιμότητα είναι φραγμένη στο εφικτό σύνολο, παρότι η $\log c$ δεν είναι κάτω φραγμένη στο $(0, +\infty)$.

Εμβάθυνση: συνάρτηση απώλειας

Η τετραγωνική απώλεια $\ell(y, \hat{y}) = (y - \hat{y})^2$ δεν είναι άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}^2$. Αν όμως $y, \hat{y} \in [-B, B]$, τότε

$$0 \leq \ell(y, \hat{y}) \leq 4B^2.$$

Η φραγή εξαρτάται όχι μόνο από τον τύπο της συνάρτησης αλλά και από το πεδίο ορισμού της.

3.3 Φραγμένες πραγματικές ακολουθίες

Μια πραγματική ακολουθία (x_n) είναι συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(n) = x_n$. Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό ορισμό παίρνουμε τα ακόλουθα.

Ορισμός 3.13. Η (x_n) λέγεται:

- α. άνω φραγμένη, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $x_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
- β. κάτω φραγμένη, αν υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ με $L \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
- γ. φραγμένη, αν υπάρχουν $L, M \in \mathbb{R}$ με $L \leq x_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για μια άνω φραγμένη ακολουθία γράφουμε

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n,$$

και αντίστοιχα $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ για μια κάτω φραγμένη ακολουθία.

Παράδειγμα 3.14. Κάθε σταθερή ακολουθία $(c, c, \dots)$ είναι φραγμένη και

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = c.$$

Παράδειγμα 3.15. Η εναλλάσσουσα ακολουθία $(c, d, c, d, \dots)$ είναι φραγμένη και

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \max\{c, d\}, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \min\{c, d\}.$$

Παράδειγμα 3.16. Η $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη, αλλά είναι κάτω φραγμένη. Η

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$$

είναι φραγμένη, αφού $0 < 1/(n+1) \leq 1$.

3.3.1 Κριτήρια φραγής

Λήμμα 3.17 (Απόλυτες τιμές). Η (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει $C \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$|x_n| \leq C \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Αν $L \leq x_n \leq M$, θέτουμε $C = \max\{|L|, |M|\}$ και παίρνουμε $|x_n| \leq C$. Αντίστροφα, από $|x_n| \leq C$ έπεται $-C \leq x_n \leq C$. $\square$

Λήμμα 3.18 (Φραγή με σύγκριση). Αν η (y_n) είναι φραγμένη και

$$|x_n| \leq |y_n| \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τότε και η (x_n) είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Υπάρχει $C_y \geq 0$ με $|y_n| \leq C_y$. Άρα $|x_n| \leq |y_n| \leq C_y$ για κάθε n και εφαρμόζεται το προηγούμενο λήμμα. $\square$

Λήμμα 3.19 (Σχεδόν παντού φραγή). *Αν υπάρχει $C^* \geq 0$ τέτοιο ώστε*

$$|x_n| \leq C^*$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών, τότε η (x_n) είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω ότι οι εξαιρέσεις είναι $n_1, \dots, n_k$. Τότε

$$C = \max \{C^*, |x_{n_1}|, \dots, |x_{n_k}|\}$$

είναι πεπερασμένος αριθμός και $|x_n| \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Παρατήρηση 3.20. Η σχεδόν παντού φραγή είναι ισοδύναμη με τη φραγή: πεπερασμένες εξαιρέσεις μπορούν πάντα να ενσωματωθούν σε ένα μεγαλύτερο απόλυτο φράγμα.

3.3.2 Διατήρηση της φραγής από αλγεβρικές πράξεις

Λήμμα 3.21 (Φραγή και αλγεβρικές πράξεις). *Έστω ότι οι πραγματικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες και ότι $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε είναι φραγμένες και οι ακολουθίες*

$$(x_n + y_n), \quad (\lambda x_n), \quad (x_n y_n).$$

Επιπλέον, είναι φραγμένη και η ακολουθία της διαφοράς

$$(x_n - y_n).$$

Απόδειξη. Εφόσον η (x_n) είναι φραγμένη, υπάρχει σταθερά $C_x \geq 0$ τέτοια ώστε

$$|x_n| \leq C_x \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ομοίως, επειδή η (y_n) είναι φραγμένη, υπάρχει σταθερά $C_y \geq 0$ τέτοια ώστε

$$|y_n| \leq C_y \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θα εξετάσουμε χωριστά τις επιμέρους αλγεβρικές πράξεις.

Άθροισμα. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|.$$

Χρησιμοποιώντας τα φράγματα των δύο αρχικών ακολουθιών, παίρνουμε

$$|x_n + y_n| \leq C_x + C_y.$$

Η ποσότητα $C_x + C_y$ είναι πεπερασμένη, μη αρνητική και ανεξάρτητη από τον δείκτη n . Επομένως η ακολουθία $(x_n + y_n)$ είναι φραγμένη.

Διαφορά. Επειδή

$$x_n - y_n = x_n + (-y_n),$$

από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει

$$|x_n - y_n| \leq |x_n| + |-y_n| = |x_n| + |y_n|.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - y_n| \leq C_x + C_y.$$

Συνεπώς η ακολουθία $(x_n - y_n)$ είναι φραγμένη.

Βαθμωτό γινόμενο. Από την πολλαπλασιαστική ιδιότητα της απόλυτης τιμής,

$$|\lambda x_n| = |\lambda| |x_n|.$$

Επειδή $|x_n| \leq C_x$, έχουμε

$$|\lambda x_n| \leq |\lambda| C_x \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η ποσότητα $|\lambda| C_x$ είναι πεπερασμένη και ανεξάρτητη από το n . Επομένως η (λx_n) είναι φραγμένη.

Η περίπτωση $\lambda = 0$ περιλαμβάνεται στον ίδιο υπολογισμό: τότε

$$\lambda x_n = 0 \quad \text{για κάθε } n,$$

οπότε προκύπτει η μηδενική, και άρα φραγμένη, ακολουθία.

Κατά σημείο γινόμενο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n|.$$

Από τις ανισότητες

$$|x_n| \leq C_x, \quad |y_n| \leq C_y$$

και τη μη αρνητικότητα των εμπλεκόμενων ποσοτήτων παίρνουμε

$$|x_n| |y_n| \leq C_x C_y.$$

Επομένως

$$|x_n y_n| \leq C_x C_y \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η ποσότητα $C_x C_y$ είναι ένα πεπερασμένο άνω φράγμα των απόλυτων τιμών των όρων. Άρα η ακολουθία $(x_n y_n)$ είναι φραγμένη.

Συνεπώς η φραγή διατηρείται από την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό και το κατά σημείο γινόμενο. $\square$

Παρατήρηση 3.22. Τα φράγματα που κατασκευάστηκαν στην απόδειξη δεν είναι κατ' ανάγκην τα μικρότερα δυνατά. Το λήμμα χρειάζεται μόνο την ύπαρξη ενός πεπερασμένου φράγματος. Για παράδειγμα, από

$$|x_n + y_n| \leq C_x + C_y$$

δεν έπεται ότι $C_x + C_y$ είναι το supremum της ακολουθίας $(|x_n + y_n|)$.

Λήμμα 3.23 (Άθροισμα φραγμένης και μη φραγμένης ακολουθίας). Έστω ότι η πραγματική ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και η πραγματική ακολουθία (y_n) είναι μη φραγμένη. Τότε η ακολουθία

$$(x_n + y_n)$$

είναι μη φραγμένη.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο.

Επειδή η (x_n) είναι φραγμένη, υπάρχει $C_x \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$|x_n| \leq C_x \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι και η ακολουθία $(x_n + y_n)$ είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει $C_s \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$|x_n + y_n| \leq C_s \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να γράψουμε

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n.$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$|y_n| = |(x_n + y_n) - x_n| \leq |x_n + y_n| + |x_n|.$$

Με βάση τα δύο υποτιθέμενα φράγματα,

$$|y_n| \leq C_s + C_x \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα η (y_n) θα ήταν φραγμένη από τη σταθερά $C_s + C_x$.

Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι η (y_n) είναι μη φραγμένη. Επομένως η υπόθεση ότι η $(x_n + y_n)$ είναι φραγμένη είναι λανθασμένη. Συνεπώς η $(x_n + y_n)$ είναι μη φραγμένη. $\square$

Παρατήρηση 3.24 (Άμεση απόδειξη). Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί απευθείας. Επειδή η (x_n) είναι φραγμένη, υπάρχει $C_x \geq 0$ με

$$|x_n| \leq C_x \quad \text{για κάθε } n.$$

Έστω ένας αυθαίρετος αριθμός $M > 0$. Επειδή η (y_n) είναι μη φραγμένη, υπάρχει δείκτης n_M τέτοιος ώστε

$$|y_{n_M}| > M + C_x.$$

Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα,

$$|x_{n_M} + y_{n_M}| \geq |y_{n_M}| - |x_{n_M}|.$$

Επομένως

$$|x_{n_M} + y_{n_M}| > M + C_x - C_x = M.$$

Άρα, για κάθε $M > 0$, υπάρχει όρος του αθροίσματος με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη από M . Συνεπώς η $(x_n + y_n)$ είναι μη φραγμένη.

Πόρισμα 3.25 (Διαφορά φραγμένης και μη φραγμένης ακολουθίας). Αν η (x_n) είναι φραγμένη και η (y_n) είναι μη φραγμένη, τότε η ακολουθία

$$(x_n - y_n)$$

είναι μη φραγμένη.

Απόδειξη. Η ακολουθία $(-y_n)$ είναι μη φραγμένη. Πράγματι, αν ήταν φραγμένη, τότε και η

$$(y_n) = (-1)(-y_n)$$

θα ήταν φραγμένη, αντίθετα προς την υπόθεση. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα στις (x_n) και $(-y_n)$, συμπεραίνουμε ότι

$$(x_n - y_n) = (x_n + (-y_n))$$

είναι μη φραγμένη. $\square$

Παρατήρηση 3.26 (Γιατί απαιτείται η φραγή του ενός προσθετέου). Αν και οι δύο ακολουθίες είναι μη φραγμένες, το άθροισμά τους μπορεί να είναι είτε φραγμένο είτε μη φραγμένο. Για παράδειγμα, αν

$$x_n = n, \quad y_n = -n,$$

τότε και οι δύο ακολουθίες είναι μη φραγμένες, αλλά

$$x_n + y_n = 0$$

για κάθε n , οπότε το άθροισμά τους είναι φραγμένο.

Αντίθετα, για

$$x_n = n, \quad y_n = n,$$

έχουμε

$$x_n + y_n = 2n,$$

οπότε το άθροισμα είναι μη φραγμένο. Επομένως δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για το άθροισμα δύο μη φραγμένων ακολουθιών χωρίς πρόσθετες υποθέσεις.

Εμβάθυνση: Κανονικοποίηση χαρακτηριστικών

Αν ένα χαρακτηριστικό μηχανικής μάθησης ικανοποιεί

$$L \leq x_n \leq M, \quad L < M,$$

η min-max κανονικοποίηση

$$z_n = \frac{x_n - L}{M - L}$$

δίνει

$$0 \leq z_n \leq 1.$$

Πράγματι, από $L \leq x_n \leq M$ προκύπτει

$$0 \leq x_n - L \leq M - L.$$

Επειδή $M - L > 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε χωρίς να αλλάξει η φορά των ανισοτήτων:

$$0 \leq \frac{x_n - L}{M - L} \leq 1.$$

Άρα η νέα ακολουθία είναι φραγμένη, ανεξάρτητα από την αρχική μονάδα και κλίμακα μέτρησης.

Εμβάθυνση: Ανώτατο όριο ζημίας

Αν η ημερήσια απόδοση ενός χαρτοφυλακίου ικανοποιεί

$$r_n \in [-a, b], \quad a, b \geq 0,$$

τότε

$$-a \leq r_n \leq b.$$

Πολλαπλασιάζοντας με -1 , οι ανισότητες αντιστρέφονται:

$$-b \leq -r_n \leq a.$$

Επομένως η ημερήσια ζημία

$$\ell_n = -r_n$$

ικανοποιεί

$$\ell_n \in [-b, a].$$

Άρα το a λειτουργεί ως άνω φράγμα της ημερήσιας ζημίας στο συγκεκριμένο υπόδειγμα.

3.4 Μονότονες συναρτήσεις και ακολουθίες

3.4.1 Μονότονες συναρτήσεις

Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι διατεταγμένο.

Ορισμός 3.27. Η f λέγεται:

- i. *αύξουσα*, αν $x_1 < x_2$ συνεπάγεται $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- ii. *γνησίως αύξουσα*, αν $x_1 < x_2$ συνεπάγεται $f(x_1) < f(x_2)$,
- iii. *φθίνουσα*, αν $x_1 < x_2$ συνεπάγεται $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- iv. *γνησίως φθίνουσα*, αν $x_1 < x_2$ συνεπάγεται $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν ισχύει μία από τις τέσσερις ιδιότητες, η f λέγεται *μονότονη*.

Παρατήρηση 3.28. Κάθε σταθερή συνάρτηση είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα. Αν μια συνάρτηση είναι και αύξουσα και φθίνουσα, τότε είναι σταθερή. Η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ η $\sin x$ δεν είναι μονότονη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.29. Υπάρχει συνάρτηση που να είναι ταυτόχρονα γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα σε σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία;

3.4.2 Μονότονες ακολουθίες

Ορισμός 3.30. Η ακολουθία (x_n) λέγεται:

- i. *αύξουσα*, αν $n_1 < n_2$ συνεπάγεται $x_{n_1} \leq x_{n_2}$,
- ii. *γνησίως αύξουσα*, αν $n_1 < n_2$ συνεπάγεται $x_{n_1} < x_{n_2}$,
- iii. *φθίνουσα*, αν $n_1 < n_2$ συνεπάγεται $x_{n_1} \geq x_{n_2}$,
- iv. *γνησίως φθίνουσα*, αν $n_1 < n_2$ συνεπάγεται $x_{n_1} > x_{n_2}$.

Πρόταση 3.31 (Χρήσιμη ισοδυναμία). Η (x_n) είναι αύξουσα αν και μόνο αν

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ανάλογες ισοδυναμίες ισχύουν για τις άλλες τρεις μορφές μονοτονίας.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση προκύπτει θέτοντας $n_1 = n$, $n_2 = n + 1$. Αντίστροφα, για $n_1 < n_2$ γράφουμε $n_2 = n_1 + k$, $k \geq 1$, και αλυσιδωτά

$$x_{n_1} \leq x_{n_1+1} \leq \cdots \leq x_{n_1+k} = x_{n_2}.$$

□

Παράδειγμα 3.32. Οι σταθερές ακολουθίες είναι αύξουσες και φθίνουσες. Η ταυτοτική $(0, 1, 2, \dots)$ είναι γνησίως αύξουσα. Οι μη σταθερές εναλλάσσουσες ακολουθίες δεν είναι μονότονες. Η $x_n = 1/(n+1)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Πρόταση 3.33 (Μονοτονία και μονόπλευρη φραγή). Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον πρώτο της όρο και

$$x_0 = \min_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη από τον πρώτο της όρο και

$$x_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Παρατήρηση 3.34. Η μονοτονία εξασφαλίζει μόνο τη μία πλευρά της φραγής. Η (n) είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη. Η $(1/(n+1))$ είναι φθίνουσα και επιπλέον κάτω φραγμένη, άρα είναι φραγμένη.

Εμβάθυνση: συσσωρευμένη παραγωγή

Αν $q_k \geq 0$ είναι η παραγωγή στην περίοδο k , η συσσωρευμένη παραγωγή

$$Q_n = \sum_{k=0}^n q_k$$

είναι αύξουσα, αφού $Q_{n+1} - Q_n = q_{n+1} \geq 0$. Είναι γνησίως αύξουσα όταν $q_{n+1} > 0$ σε κάθε περίοδο.

Εμβάθυνση: early stopping στη μηχανική μάθηση

Η απώλεια εκπαίδευσης συχνά σχεδιάζεται να μειώνεται κατά τις επαναλήψεις, όμως η απώλεια επικύρωσης μπορεί αρχικά να μειώνεται και μετά να αυξάνεται. Η δεύτερη ακολουθία δεν είναι τότε μονότονη. Η στιγμή της ελάχιστης τιμής της χρησιμοποιείται ως κριτήριο έγκαιρης διακοπής.

3.5 Προσέγγιση supremum και infimum

Η φραγή και η μονοτονία συνδέονται με την ιδέα ότι οι όροι μιας ακολουθίας πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά σε ένα ακραίο φράγμα. Αυτό θα μας οδηγήσει κοντά στην έννοια του ορίου.

3.5.1 Αύξουσες και άνω φραγμένες ακολουθίες

Έστω (x_n) αύξουσα και άνω φραγμένη και θέτουμε

$$s = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε το διάστημα

$$I_\varepsilon = [s - \varepsilon, s].$$

Πρόταση 3.35. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος της ακολουθίας στο I_ε .

Απόδειξη. Αν κανένας όρος δεν ανήκε στο I_ε , τότε $x_n < s - \varepsilon$ για κάθε n . Ο αριθμός $s - \varepsilon < s$ θα ήταν άνω φράγμα της ακολουθίας, αντίφαση με το ότι s είναι το μικρότερο άνω φράγμα. $\square$

Πρόταση 3.36. Σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο I_ε .

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει n^* με $x_{n^*} \in I_\varepsilon$. Επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα,

$$s - \varepsilon \leq x_{n^*} \leq x_n \leq s \quad \text{για κάθε } n \geq n^*.$$

Άρα μόνο οι πεπερασμένοι όροι $x_0, \dots, x_{n^*-1}$ μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος. $\square$

Πρόταση 3.37. Το πλήθος των όρων που βρίσκονται εκτός του I_ε εξαρτάται γενικά από το ε .

Οι τρεις προτάσεις συνοψίζονται ως εξής.

Θεώρημα 3.38 (Προσέγγιση του supremum). Αν η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ σχεδόν όλοι οι όροι της βρίσκονται στο

$$[s - \varepsilon, s], \quad s = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n,$$

και το πλήθος των εξαιρέσεων μπορεί να εξαρτάται από το ε .

Παρατήρηση 3.39. Το θεώρημα παραμένει σωστό αν χρησιμοποιήσουμε $(s - \varepsilon, s]$ αντί για $[s - \varepsilon, s]$, επειδή η κρίσιμη πληροφορία είναι $x_n > s - \varepsilon$ για αρκετά μεγάλο n .

3.5.2 Φθίνουσες και κάτω φραγμένες ακολουθίες

Με συμμετρικό συλλογισμό παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.40 (Προσέγγιση του infimum). Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ σχεδόν όλοι οι όροι της βρίσκονται στο

$$[i, i + \varepsilon], \quad i = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n,$$

και το πλήθος των εξαιρέσεων μπορεί να εξαρτάται από το ε .

Παράδειγμα 3.41. Για $x_n = 1/(n+1)$ έχουμε $\inf x_n = 0$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, αρκεί να επιλέξουμε N με

$$N + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Τότε $0 < x_n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq N$.

Εμβάθυνση: επαναληπτική βελτιστοποίηση

Έστω v_n η καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης που έχει βρεθεί μέχρι την επανάληψη n σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Τότε

$$v_n = \max\{f(x_0), \dots, f(x_n)\}$$

είναι αύξουσα. Αν το πρόβλημα έχει πεπερασμένο άνω φράγμα v^* , η ακολουθία προσεγγίζει το supremum της από κάτω. Το θεώρημα εξηγεί γιατί, για κάθε ανοχή ε , οι αρκετά μεταγενέστερες καλύτερες τιμές βρίσκονται εντός ε από το supremum.

Εμβάθυνση: άνω φράγματα σε αλγορίθμους

Σε έναν αλγόριθμο ελαχιστοποίησης μπορεί να διατηρείται η καλύτερη μέχρι στιγμής τιμή

$$b_n = \min\{L_0, L_1, \dots, L_n\}.$$

Η (b_n) είναι φθίνουσα. Αν η απώλεια είναι κάτω φραγμένη, για παράδειγμα $L_n \geq 0$, τότε η (b_n) είναι φραγμένη και πλησιάζει το infimum της από πάνω.

3.6 Ασκήσεις

Επίπεδο Α: ορισμοί και υπολογισμοί

Άσκηση 3.42. Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα σύνολα είναι άνω, κάτω ή αμφίπλευρα φραγμένα και να βρεθούν τα supremum και infimum τους:

$$A = (2, 5], \quad B = \{(-1)^n + 1/(n+1) : n \in \mathbb{N}\}, \quad C = (-\infty, 3).$$

Άσκηση 3.43. Να εξεταστεί η φραγή και η μονοτονία των ακολουθιών

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad y_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad z_n = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Επίπεδο Β: αποδείξεις

Άσκηση 3.44. Αποδείξτε ότι, αν (x_n) είναι άνω φραγμένη, τότε η $(-x_n)$ είναι κάτω φραγμένη και

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (-x_n) = -\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Άσκηση 3.45. Αν (x_n) και (y_n) είναι άνω φραγμένες, αποδείξτε ότι

$$\sup_n (x_n + y_n) \leq \sup_n x_n + \sup_n y_n.$$

Δώστε παράδειγμα στο οποίο η ανισότητα είναι γνήσια.

Άσκηση 3.46. Αποδείξτε την πρόταση προσέγγισης του infimum για φθίνουσες και κάτω φραγμένες ακολουθίες.

Επίπεδο Γ: εφαρμογές

Άσκηση 3.47. Μια επιχείρηση έχει σωρευτικό κόστος C_n και σωρευτικό έσοδο R_n μέχρι την περίοδο n . Δώστε επαρκείς συνθήκες ώστε οι (C_n) και (R_n) να είναι αύξουσες. Είναι αναγκαστικά μονότονη η ακολουθία κέρδους $\Pi_n = R_n - C_n$;

Άσκηση 3.48. Η απώλεια ενός αλγορίθμου είναι $L_n = L^* + a^n(L_0 - L^*)$, όπου $0 < a < 1$ και $L_0 > L^*$. Αποδείξτε ότι η (L_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και βρείτε το infimum της.

Άσκηση 3.49. Έστω $x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)c$, όπου $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία είναι μονότονη όταν $x_0 \neq c$, προσδιορίστε την κατεύθυνση της μονοτονίας και αποδείξτε ότι είναι φραγμένη.

Κεφάλαιο 4

Όρια πραγματικών ακολουθιών

4.1 Από την προσέγγιση φραγμάτων στην έννοια του ορίου

Στις προηγούμενες διαλέξεις είδαμε ότι μια αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πλησιάζει αυθαίρετα κοντά στο supremum της. Συγκεκριμένα, αν

$$s = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n,$$

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο διάστημα

$$(s - \varepsilon, s].$$

Αντίστοιχα, αν η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, σχεδόν όλοι οι όροι της βρίσκονται στο

$$[i, i + \varepsilon), \quad i = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στον γενικό ορισμό του ορίου χωρίς να απαιτείται ούτε μονοτονία ούτε μονόπλευρη προσέγγιση.

4.2 Τοπολογικός ορισμός του ορίου

Ορισμός 4.1 (Όριο πραγματικής ακολουθίας). Έστω πραγματική ακολουθία (x_n) και $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η (x_n) έχει όριο ℓ , και γράφουμε

$$x_n \longrightarrow \ell, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell, \quad \text{ή} \quad \lim x_n = \ell,$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq N \implies x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

Ισοδύναμα,

$$n \geq N \implies |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ερμηνεία

Για οποιοδήποτε, όσο μικρό θέλουμε, συμμετρικό ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ , όλοι οι όροι της ακολουθίας εκτός από πεπερασμένο πλήθος βρίσκονται μέσα στο διάστημα.

Ο δείκτης N επιτρέπεται να εξαρτάται από το ε . Συνήθως, όσο μικρότερο γίνεται το ε , τόσο μεγαλύτερο χρειάζεται να είναι το $N(\varepsilon)$.

Παρατήρηση 4.2. Η τιμή του N δεν είναι μοναδική. Αν ένας δείκτης N ικανοποιεί την απαίτηση, τότε την ικανοποιεί και κάθε $N' \geq N$.

Παρατήρηση 4.3 (Πεπερασμένες τροποποιήσεις). Η αλλαγή πεπερασμένου πλήθους όρων μιας ακολουθίας δεν αλλάζει το όριό της. Ο ορισμός εξαρτάται μόνο από την τελική συμπεριφορά της ακολουθίας.

Ορισμός 4.4 (Σύγκλιση και απόκλιση). Αν υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x_n \rightarrow \ell$, η ακολουθία λέγεται *συγκλίνουσα*. Αν δεν υπάρχει τέτοιος πραγματικός αριθμός, λέγεται *αποκλίνουσα*.

Προσοχή

Η απόκλιση δεν σημαίνει πάντοτε ότι οι όροι γίνονται απεριόριστα μεγάλοι. Η ακολουθία $(-1)^n$ είναι φραγμένη, αλλά αποκλίνει επειδή ταλαντώνεται ανάμεσα στις τιμές 1 και -1 .

4.3 Βασικά παραδείγματα

4.3.1 Σταθερές ακολουθίες

Πρόταση 4.5. Αν $x_n = c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x_n \rightarrow c$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Άρα μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε N , για παράδειγμα $N = 0$. □

Παρατήρηση 4.6. Οι σταθερές ακολουθίες συγκλίνουν, παρότι δεν είναι γνησίως μονότονες. Αυτό δείχνει γιατί ο γενικός ορισμός του ορίου δεν πρέπει να απαιτεί μονοτονία.

4.3.2 Η αρμονική ακολουθία

Πρόταση 4.7. Η ακολουθία

$$x_n = \frac{1}{n+1}$$

συγκλίνει στο 0.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Αρκεί να ισχύει

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Μπορούμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Τότε για κάθε $n \geq N(\varepsilon)$ έχουμε $1/(n+1) < \varepsilon$. □

Παρατήρηση 4.8. Υπάρχουν πολλές έγκυρες επιλογές του $N(\varepsilon)$. Δεν απαιτείται να βρούμε τον μικρότερο δυνατό δείκτη, αλλά έναν δείκτη που πράγματι εξασφαλίζει την επιθυμητή ανισότητα.

4.3.3 Εναλλάσσουσες ακολουθίες

Πρόταση 4.9. Αν $c \neq d$, η ακολουθία

$$(c, d, c, d, \dots)$$

αποκλίνει.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\varepsilon = \frac{|c - d|}{3} > 0.$$

Τα διαστήματα

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \quad \text{και} \quad (d - \varepsilon, d + \varepsilon)$$

είναι ξένα. Άπειροι όροι της ακολουθίας είναι ίσοι με c και άπειροι είναι ίσοι με d . Επομένως, για κανένα $\ell \in \mathbb{R}$ δεν είναι δυνατό όλοι οι όροι, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, να βρίσκονται σε κάθε διάστημα με κέντρο το ℓ . $\square$

Παράδειγμα 4.10. Η ακολουθία

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

δεν είναι μονότονη, αλλά συγκλίνει στο 0, επειδή

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Παράδειγμα 4.11. Η ταυτοτική ακολουθία $x_n = n$ αποκλίνει. Για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, οι όροι γίνονται τελικά μεγαλύτεροι από $\ell + \varepsilon$, άρα δεν μπορούν να παραμείνουν στο $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Έλεγχος κατανόησης

1. Βρείτε έναν έγκυρο δείκτη $N(\varepsilon)$ για την ακολουθία $x_n = 3/(n+1)$.
2. Εξετάστε αν η ακολουθία $x_n = 2 + (-1)^n/(n+1)$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της.
3. Εξηγήστε γιατί η $(0, 1, 0, 1, \dots)$ δεν μπορεί να έχει όριο.

4.4 Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης). α . Αν η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

β . Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε συγκλίνει και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και

$$s = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$, η ιδιότητα του supremum δίνει έναν δείκτη N τέτοιο ώστε

$$s - \varepsilon < x_N \leq s.$$

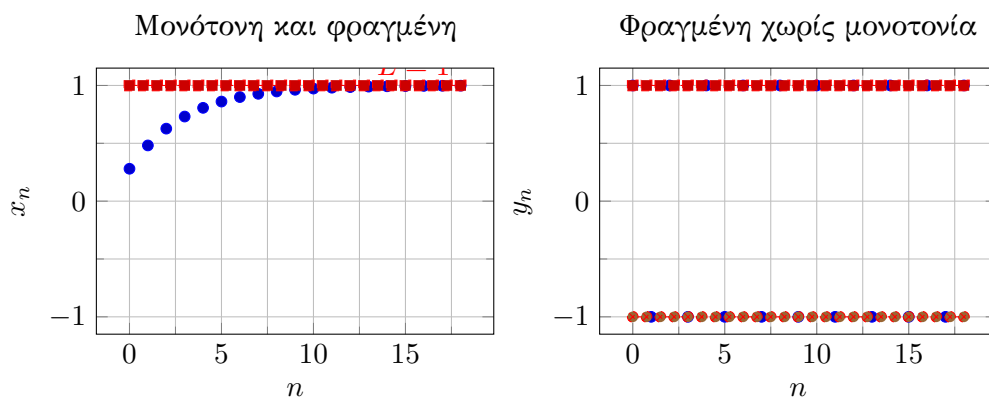
Επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq N$,

$$s - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s < s + \varepsilon.$$

Άρα $|x_n - s| < \varepsilon$, δηλαδή $x_n \rightarrow s$.

Η απόδειξη για φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία είναι ανάλογη, με χρήση του infimum. $\square$

Παρατήρηση 4.13. Η μονοτονία από μόνη της δεν αρκεί. Η (n) είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη. Η φραγή από μόνη της επίσης δεν αρκεί: η $(-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά όχι μονότονη.



Σχήμα 4.1: Στα αριστερά, οι όροι συγκεντρώνονται μονόπλευρα κοντά στο supremum. Στα δεξιά, η φραγή χωρίς μονοτονία επιτρέπει διαρκή μεταπήδηση ανάμεσα σε δύο τιμές και δεν εξασφαλίζει όριο.

4.5 Μοναδικότητα του ορίου

Λήμμα 4.14 (Μοναδικότητα ορίου). Αν μια πραγματική ακολουθία συγκλίνει, τότε το όριό της είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι

$$x_n \rightarrow \ell_1, \quad x_n \rightarrow \ell_2, \quad \ell_1 \neq \ell_2.$$

Θέτουμε

$$\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| > 0$$

και θεωρούμε τα διαστήματα

$$I_1 = \left(\ell_1 - \frac{\varepsilon}{3}, \ell_1 + \frac{\varepsilon}{3} \right), \quad I_2 = \left(\ell_2 - \frac{\varepsilon}{3}, \ell_2 + \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Τα δύο διαστήματα είναι ξένα.

Από $x_n \rightarrow \ell_1$, όλοι οι όροι εκτός από πεπερασμένο πλήθος βρίσκονται στο I_1 . Από $x_n \rightarrow \ell_2$, όλοι οι όροι εκτός από πεπερασμένο πλήθος βρίσκονται στο I_2 . Άρα, για αρκετά μεγάλο n , ο ίδιος όρος x_n θα έπρεπε να ανήκει και στα δύο ξένα διαστήματα, πράγμα αδύνατο. Συνεπώς $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Παρατήρηση 4.15. Η μοναδικότητα εξαρτάται ουσιαστικά από τη δομή των διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Σε γενικότερους χώρους απαιτείται κατάλληλη ιδιότητα διαχωρισμού.

4.6 Ποσοτικός έλεγχος του σφάλματος

Ο ορισμός του ορίου μπορεί να διαβαστεί ως εγγύηση ακρίβειας: αν $n \geq N(\varepsilon)$, τότε το σφάλμα προσέγγισης

$$e_n = |x_n - \ell|$$

είναι μικρότερο από την επιλεγμένη ανοχή ε .

4.6.1 Γεωμετρική σύγκλιση

Πρόταση 4.16. Αν $|q| < 1$, τότε $q^n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Για $q = 0$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Έστω $0 < |q| < 1$. Θέλουμε

$$|q^n| = |q|^n < \varepsilon.$$

Λαμβάνοντας λογαρίθμους και προσέχοντας ότι $\ln |q| < 0$, αρκεί να επιλέξουμε

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}.$$

Άρα υπάρχει κατάλληλος $N(\varepsilon)$, και $q^n \rightarrow 0$. □

Παράδειγμα 4.17. Αν

$$x_n = \ell + Cq^n, \quad |q| < 1,$$

τότε

$$|x_n - \ell| = |C| |q|^n \rightarrow 0,$$

οπότε $x_n \rightarrow \ell$.

Ερμηνεία

Η ποσότητα $|q|$ περιγράφει τον ρυθμό γεωμετρικής σύγκλισης. Μικρότερο $|q|$ σημαίνει ταχύτερη συρρίκνωση του σφάλματος. Όταν $q < 0$, οι όροι εναλλάσσονται γύρω από το όριο, αλλά το μέγεθος της απόκλισης συνεχίζει να μειώνεται.

4.7 Εφαρμογές στα οικονομικά

Εμβάθυνση: δυναμική προσαρμογή προς ισορροπία

Έστω μεταβλητή x_n που προσαρμόζεται προς μια μακροχρόνια τιμή x^* σύμφωνα με

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x^*, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Αφαιρώντας το x^* ,

$$x_{n+1} - x^* = \alpha(x_n - x^*).$$

Επαγωγικά,

$$x_n - x^* = \alpha^n(x_0 - x^*).$$

Επειδή $\alpha^n \rightarrow 0$,

$$\boxed{x_n \rightarrow x^*}.$$

Η παράμετρος α μετρά την αδράνεια της προσαρμογής: τιμές κοντά στο 1 συνεπάγονται βραδύτερη σύγκλιση.

Εμβάθυνση: προεξοφλητικός παράγοντας

Για $R > 0$, η παρούσα αξία μιας μονάδας που καταβάλλεται μετά από n περιόδους είναι

$$p_n = \frac{1}{(1+R)^n}.$$

Θέτοντας $q = 1/(1+R)$, έχουμε $0 < q < 1$, άρα

$$p_n = q^n \rightarrow 0.$$

Μια πληρωμή σταθερού μεγέθους που μετατίθεται αυθαίρετα μακριά στο μέλλον έχει παρούσα αξία που τείνει στο μηδέν.

Εμβάθυνση: λόγος χρέους προς προϊόν

Σε ένα απλοποιημένο υπόδειγμα,

$$d_{n+1} = ad_n + b, \quad |a| < 1.$$

Το σταθερό σημείο είναι

$$d^* = \frac{b}{1-a}.$$

Επειδή

$$d_{n+1} - d^* = a(d_n - d^*),$$

παίρνουμε

$$d_n - d^* = a^n(d_0 - d^*),$$

και συνεπώς $d_n \rightarrow d^*$. Για $a < 0$, η προσαρμογή είναι ταλαντωτική, αλλά εξακολουθεί να συγκλίνει όταν $|a| < 1$.

4.8 Εφαρμογές στη στατιστική**Εμβάθυνση: διαδοχικές εκτιμήσεις**

Έστω $\hat{\theta}_n$ μια εκτίμηση παραμέτρου θ που βασίζεται σε δείγμα μεγέθους n . Η ντετερμινιστική δήλωση

$$\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$$

σημαίνει ότι για κάθε ανοχή $\varepsilon > 0$, υπάρχει μέγεθος δείγματος $N(\varepsilon)$ μετά το οποίο

$$|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon.$$

Στη στατιστική, η ίδια ιδέα επεκτείνεται σε στοχαστικούς τρόπους σύγκλισης, όπως σύγκλιση κατά πιθανότητα ή σχεδόν βέβαιη σύγκλιση.

Εμβάθυνση: τρέχων μέσος

Για παρατηρήσεις $y_1, y_2, \dots$, ο τρέχων μέσος είναι

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Ικανοποιεί την αναδρομή

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{y_{n+1} - \bar{y}_n}{n+1}.$$

Η διόρθωση έχει βάρος $1/(n+1)$, το οποίο τείνει στο μηδέν. Αυτό εξηγεί γιατί οι νέες παρατηρήσεις επηρεάζουν όλο και λιγότερο τον τρέχοντα μέσο. Η σύγκλιση του μέσου απαιτεί πρόσθετες υποθέσεις για τις παρατηρήσεις.

Προσοχή

Η σύγκλιση μιας ακολουθίας σημειακών εκτιμήσεων δεν σημαίνει από μόνη της ότι κάθε πεπερασμένη εκτίμηση είναι ακριβής. Ο ορισμός εγγυάται τελική συμπεριφορά και όχι ομοιόμορφη ακρίβεια για όλους τους δείκτες.

4.9 Εφαρμογές στη μηχανική μάθηση**Εμβάθυνση: gradient descent σε τετραγωνική απώλεια**

Για

$$L(w) = \frac{1}{2}(w - w^*)^2,$$

ο gradient descent με σταθερό ρυθμό μάθησης η δίνει

$$w_{n+1} = w_n - \eta L'(w_n) = w_n - \eta(w_n - w^*).$$

Άρα

$$w_{n+1} - w^* = (1 - \eta)(w_n - w^*),$$

και

$$w_n - w^* = (1 - \eta)^n(w_0 - w^*).$$

Επομένως,

$$0 < \eta < 2 \implies |1 - \eta| < 1 \implies w_n \rightarrow w^*.$$

Για $0 < \eta < 1$ η προσέγγιση είναι μονόπλευρη, ενώ για $1 < \eta < 2$ είναι ταλαντωτική.

Εμβάθυνση: κριτήριο τερματισμού

Αν είναι γνωστό ότι ο αλγόριθμος παράγει

$$|w_n - w^*| \leq Cq^n, \quad 0 < q < 1,$$

τότε για επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon > 0$ αρκεί

$$Cq^n < \varepsilon.$$

Μια επαρκής επιλογή είναι

$$n > \frac{\ln(\varepsilon/C)}{\ln q}.$$

Ο ορισμός του ορίου μετατρέπεται έτσι σε πρακτικό υπολογισμό του αριθμού επαναλήψεων.

Εμβάθυνση: απώλεια εκπαίδευσης και όριο

Αν η ακολουθία απώλειας (L_n) είναι φθίνουσα και ικανοποιεί $L_n \geq 0$, τότε είναι κάτω φραγμένη. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$L_n \longrightarrow L_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} L_n.$$

Η ύπαρξη ορίου της απώλειας δεν εγγυάται από μόνη της ότι οι παράμετροι του μοντέλου συγκλίνουν ούτε ότι το όριο είναι καθολικά βέλτιστο.

4.10 Συνοπτικός οδηγός απόδειξης ορίου

Για να αποδείξουμε από τον ορισμό ότι $x_n \rightarrow \ell$:

1. Ξεκινάμε με αυθαίρετο $\varepsilon > 0$.
2. Μετασχηματίζουμε την ανισότητα

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$

σε επαρκή συνθήκη πάνω στο n .

3. Επιλέγουμε έναν ακέραιο $N(\varepsilon)$ που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη.
4. Αποδεικνύουμε ότι

$$n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Προσοχή

Δεν αρκεί να γράψουμε μόνο «καθώς $n \rightarrow \infty$, ο όρος πλησιάζει το ℓ ». Σε απόδειξη με τον ορισμό πρέπει να φαίνεται ρητά πώς επιλέγεται το N από το ε .

4.11 Ασκήσεις

Επίπεδο Α: βασικός ορισμός

Άσκηση 4.18. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$\frac{5}{n+2} \longrightarrow 0.$$

Δώστε μία ρητή επιλογή του $N(\varepsilon)$.

Άσκηση 4.19. Αποδείξτε ότι

$$3 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow 3.$$

Άσκηση 4.20. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$(-1)^n, \quad \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad 2 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Επίπεδο Β: μονοτονία και φραγή**Άσκηση 4.21.** Δείξτε ότι η

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και βρείτε το όριό της.

Άσκηση 4.22. Έστω $x_0 > 0$ και

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1.$$

Βρείτε το σταθερό σημείο, μελετήστε τη μονοτονία ανάλογα με το x_0 και αποδείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει.

Άσκηση 4.23. Αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα πραγματική ακολουθία είναι φραγμένη.**Επίπεδο Γ: εφαρμογές****Άσκηση 4.24.** Σε υπόδειγμα προσαρμογής τιμών,

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 0.2p^*.$$

α□. Βρείτε κλειστό τύπο για το $p_n - p^*$.

β□. Αποδείξτε ότι $p_n \rightarrow p^*$.

γ□. Βρείτε επαρκή αριθμό περιόδων ώστε $|p_n - p^*| < 0.01 |p_0 - p^*|$.

Άσκηση 4.25. Για gradient descent στην

$$L(w) = \frac{1}{2}(w - 4)^2,$$

με $w_0 = 0$, μελετήστε τη σύγκλιση για:

$$\eta = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{3}{2}, \quad \eta = 2, \quad \eta = 3.$$

Εξηγήστε ποια περίπτωση είναι μονόπλευρη, ποια ταλαντωτική και ποιες αποκλίνουν ή δεν συγκλίνουν.

Άσκηση 4.26. Έστω φθίνουσα ακολουθία απωλειών (L_n) με $L_n \geq 0$. Αποδείξτε ότι συγκλίνει. Μπορούμε να συμπεράνουμε μόνο από αυτό ότι το μοντέλο γενικεύει καλά σε νέα δεδομένα;

Κεφάλαιο 5

Περαιτέρω ιδιότητες ορίων

5.1 Σύγκλιση και φραγμένο

Λήμμα 5.1 (Η σύγκλιση συνεπάγεται φραγμένο). Αν η πραγματική ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη. Με σύμβολα,

$$x_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \implies \exists M > 0 : |x_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\varepsilon = 1$. Από τη σύγκλιση υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq N$,

$$|x_n - \ell| < 1.$$

Άρα, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|x_n| \leq |x_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|, \quad n \geq N.$$

Οι όροι που απομένουν είναι πεπερασμένοι. Αν

$$M = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |\ell| + 1\},$$

τότε $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως η (x_n) είναι φραγμένη. $\square$

Παρατήρηση 5.2. Η επιλογή $\varepsilon = 1$ είναι ενδεικτική. Κάθε σταθερό $\varepsilon > 0$ θα έδινε ένα τελικό φράγμα. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι οι εξαιρέσεις είναι πεπερασμένες και επομένως έχουν πεπερασμένο μέγιστο κατά απόλυτη τιμή.

Πόρισμα 5.3 (Χρήσιμη αντιθετοαντιστροφή). Αν η (x_n) είναι μη φραγμένη, τότε δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα 5.4. Η ακολουθία $x_n = n$ είναι μη φραγμένη. Συνεπώς δεν συγκλίνει σε κανένα $\ell \in \mathbb{R}$.

Προσοχή

Το αντίστροφο του λήμματος είναι ψευδές. Μια φραγμένη ακολουθία δεν είναι κατ' ανάγκην συγκλίνουσα. Για παράδειγμα,

$$x_n = (-1)^n$$

είναι φραγμένη, αφού $|x_n| = 1$, αλλά αποκλίνει λόγω ταλάντωσης.

Εμβάθυνση – Οικονομική δυναμική

Έστω ότι το κατά κεφαλήν κεφάλαιο μιας οικονομίας ακολουθεί

$$k_{n+1} = \alpha k_n + (1 - \alpha)k^*, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Τότε

$$k_n - k^* = \alpha^n(k_0 - k^*) \rightarrow 0,$$

άρα $k_n \rightarrow k^*$. Το λήμμα εγγυάται ότι ολόκληρη η τροχιά (k_n) είναι φραγμένη. Η σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση αποκλείει τη μακροχρόνια έκρηξη της μεταβλητής.

Εμβάθυνση – Επαναληπτικοί αλγόριθμοι

Αν οι παράμετροι ενός αλγορίθμου μηχανικής μάθησης ικανοποιούν $\theta_n \rightarrow \theta^*$ ως διανύσματα, τότε κάθε συντεταγμένη $\theta_{n,j}$ είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη. Η απλή παρατήρηση είναι αναγκαία για να δικαιολογηθούν πολλές μεταγενέστερες εκτιμήσεις, αλλά το φραγμένο από μόνο του δεν αποδεικνύει σύγκλιση.

5.2 Πεπερασμένες τροποποιήσεις και σχεδόν παντού ισότητα

Ορισμός 5.5 (Σχεδόν παντού ισότητα ακολουθιών). Λέμε ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι ίσες σχεδόν παντού, αν διαφέρουν το πολύ σε πεπερασμένο πλήθος δεικτών. Ισοδύναμα, υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$x_n = y_n \quad \text{για κάθε } n \geq N_0.$$

Λήμμα 5.6 (Σύγκλιση και σχεδόν παντού ισότητα). Αν $x_n \rightarrow \ell$ και οι $(x_n), (y_n)$ είναι ίσες σχεδόν παντού, τότε $y_n \rightarrow \ell$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n \rightarrow \ell$, υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n \geq N_1 \implies |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Από τη σχεδόν παντού ισότητα υπάρχει N_0 ώστε $y_n = x_n$ για κάθε $n \geq N_0$. Θέτουμε $N = \max\{N_0, N_1\}$. Τότε, για $n \geq N$,

$$|y_n - \ell| = |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Άρα $y_n \rightarrow \ell$. □

Παράδειγμα 5.7. Ορίζουμε

$$y_n = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 10^8, \\ \frac{1}{n+1}, & n > 10^8. \end{cases}$$

Η (y_n) διαφέρει από την $x_n = 1/(n+1)$ σε πεπερασμένο πλήθος θέσεων. Επομένως $y_n \rightarrow 0$, παρότι οι αρχικοί όροι της είναι εξαιρετικά μεγάλοι.

Εμβάθυνση – Στατιστική και πεπερασμένη επιμόλυνση

Έστω (T_n) συνεπής ακολουθία εκτιμητών μιας παραμέτρου θ , δηλαδή $T_n \rightarrow \theta$ στην εξεταζόμενη έννοια σύγκλισης. Αν διορθώσουμε ή αντικαταστήσουμε τους εκτιμητές

για ένα πεπερασμένο πλήθος μικρών μεγεθών δείγματος, η ασυμπτωτική δήλωση δεν αλλάζει. Η συνέπεια αφορά την τελική συμπεριφορά και όχι τις πρώτες πεπερασμένες περιπτώσεις.

Εμβάθυνση – Περίοδος προθέρμανσης

Σε μια επαναληπτική μέθοδο μπορούμε να αγνοήσουμε ένα πεπερασμένο *burn-in* ή να αλλάξουμε τις πρώτες ενημερώσεις χωρίς να μεταβληθεί το όριο, αρκεί από κάποιον δείκτη και μετά οι δύο τροχιές να ταυτίζονται. Αυτό δεν καλύπτει αλλαγές σε άπειρο πλήθος βημάτων, ακόμη και αν αυτές φαίνονται μικρές.

5.3 Διατήρηση της διάταξης στο όριο

Λήμμα 5.8 (Διατήρηση της διάταξης). Έστω $x_n \rightarrow \ell_x$ και $y_n \rightarrow \ell_y$. Αν

$$x_n \leq y_n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τότε

$$\ell_x \leq \ell_y.$$

Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει αν η ανισότητα ισχύει σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\ell_x > \ell_y$ και θέτουμε

$$\varepsilon = \frac{\ell_x - \ell_y}{2} > 0.$$

Τα ανοικτά διαστήματα

$$I_x = (\ell_x - \varepsilon, \ell_x + \varepsilon), \quad I_y = (\ell_y - \varepsilon, \ell_y + \varepsilon)$$

είναι ξένα μεταξύ τους: το κοινό τους συνοριακό σημείο είναι $(\ell_x + \ell_y)/2$, το οποίο δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο.

Από τις συγκλίσεις υπάρχουν $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n \geq N_x \implies x_n \in I_x, \quad n \geq N_y \implies y_n \in I_y.$$

Για $n \geq \max\{N_x, N_y\}$ προκύπτει

$$x_n > \ell_x - \varepsilon = \frac{\ell_x + \ell_y}{2} > y_n,$$

αντίφαση προς $x_n \leq y_n$. Άρα $\ell_x \leq \ell_y$.

Αν η αρχική ανισότητα ισχύει μόνο σχεδόν παντού, επιλέγουμε επιπλέον τον δείκτη μετά από τον οποίο ισχύει και τον ενσωματώνουμε στο μέγιστο των κατωφλίων. $\square$

Παρατήρηση 5.9. Από αυστηρές ανισότητες $x_n < y_n$ δεν συμπεραίνουμε γενικά $\ell_x < \ell_y$, αλλά μόνο $\ell_x \leq \ell_y$. Για παράδειγμα,

$$0 < \frac{1}{n+1} \quad \text{για κάθε } n,$$

ενώ και οι δύο πλευρές έχουν όριο 0.

Πρόταση 5.10 (Σταθερό άνω φράγμα). Αν $x_n \rightarrow \ell$ και υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x_n \leq c$ για κάθε n , τότε $\ell \leq c$. Αντίστοιχα, αν $x_n \geq c$, τότε $\ell \geq c$.

Απόδειξη. Θέτουμε $y_n = c$ για κάθε n . Τότε $y_n \rightarrow c$. Η πρώτη δήλωση προκύπτει από το λήμμα διατήρησης της διάταξης. Η δεύτερη προκύπτει με αντιστροφή της ανισότητας. $\square$

Εμβάθυνση – Συγκριτική στατική

Έστω q_n^A και q_n^B οι ποσότητες ισορροπίας δύο αγορών σε μια ακολουθία προσεγγιστικών υποδειγμάτων. Αν

$$q_n^A \leq q_n^B \quad \text{για κάθε } n, \quad q_n^A \rightarrow q^A, \quad q_n^B \rightarrow q^B,$$

τότε $q^A \leq q^B$. Μια κατά σημείο σύγκριση των πεπερασμένων υποδειγμάτων επιβιώνει στο όριο, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν και τα δύο όρια.

Εμβάθυνση – Κίνδυνος και προσεγγιστικές απώλειες

Αν για κάθε μέγεθος δείγματος η εμπειρική απώλεια δύο μεθόδων ικανοποιεί $L_n^A \leq L_n^B$, και οι δύο ακολουθίες έχουν όρια, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^B.$$

Η διάταξη μεταφέρεται στα ασυμπτωτικά επίπεδα απώλειας. Δεν επιτρέπεται όμως να παραλειφθεί η ύπαρξη των ορίων.

5.4 Η γεωμετρική μορφή του ορισμού του ορίου

Έστω $x_n \rightarrow \ell$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, το συμμετρικό ανοικτό διάστημα με κέντρο ℓ και ακτίνα ε είναι

$$(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - \ell| < \varepsilon\}.$$

Η συνθήκη

$$x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

είναι ισοδύναμη με

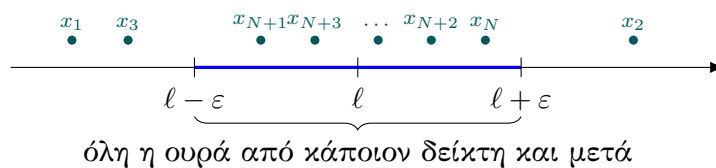
$$|x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Πρόταση 5.11 (Αναλυτικός ορισμός του ορίου). Ο αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$ είναι το όριο της (x_n) αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad n \geq N(\varepsilon) \implies |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ερμηνεία

Για κάθε ακρίβεια $\varepsilon > 0$ επιτρέπεται να υπάρχει ένα διαφορετικό κατώφλι $N(\varepsilon)$. Πριν από αυτό το κατώφλι μπορούν να βρίσκονται έξω από το διάστημα μόνο πεπερασμένοι όροι. Μετά από αυτό, όλοι οι όροι παραμένουν μέσα στο διάστημα.



Σχήμα 5.1: Η γεωμετρική έννοια του ορίου: όσο μικρή και αν γίνει η γειτονιά του ℓ , περιέχει τελικά ολόκληρη την ουρά της ακολουθίας.

5.4.1 Γιατί η τοπολογία είναι μέρος του ορισμού

Ο προηγούμενος ορισμός δεν χρησιμοποιεί ουσιαστικά τις αποστάσεις, αλλά τις γειτονιές του υποψήφιου ορίου. Σε έναν τοπολογικό χώρο X γράφουμε $x_n \rightarrow x$ όταν κάθε ανοικτή γειτονιά του x περιέχει όλους τους όρους από κάποιον δείκτη και μετά. Η επιλογή της τοπολογίας καθορίζει επομένως ποια όρια είναι ορατά.

Παράδειγμα 5.12 (Η αδιάκριτη τοπολογία). Αν τα μόνα ανοικτά σύνολα του X είναι $\emptyset$ και X , η μόνη γειτονιά που πρέπει να ελεγχθεί είναι το ίδιο το X . Συνεπώς κάθε ακολουθία συγκλίνει σε κάθε σημείο. Ο ορισμός παραμένει συνεπής, αλλά η τοπολογία είναι υπερβολικά αδρή για να ξεχωρίζει σημεία.

Παράδειγμα 5.13 (Η πραγματική ευθεία με διπλή αρχή). Αντικαθιστούμε το 0 από δύο σημεία 0_- και 0_+ . Οι γειτονιές τους έχουν τη μορφή

$$\{0_{\pm}\} \cup ((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}),$$

ενώ στα μη μηδενικά σημεία κρατούμε τις συνήθεις γειτονιές. Τότε η ακολουθία $x_n = 1/n$ συγκλίνει τόσο στο 0_- όσο και στο 0_+ . Ο χώρος δεν είναι Hausdorff: τα δύο αντίγραφα της αρχής δεν έχουν ξένες γειτονιές. Αυτό εξηγεί ακριβώς γιατί στους Hausdorff χώρους το όριο είναι μοναδικό και γιατί η μοναδικότητα δεν είναι καθαρά τυπική συνέπεια της λέξης «σύγκλιση».

5.4.2 Όριο και υπολογισιμότητα

Ο τύπος $N(\varepsilon)$ είναι ένα μέτρο σύγκλισης: μετατρέπει την ποιοτική ύπαρξη ορίου σε πιστοποιημένη αριθμητική ακρίβεια. Δεν υπάρχει όμως καθολικός αλγόριθμος ο οποίος, παίρνοντας ως είσοδο ένα αυθαίρετο πρόγραμμα που παράγει μια συγκλίνουσα υπολογίσιμη ακολουθία ρητών, να υπολογίζει πάντοτε το όριό της με οποιαδήποτε ζητούμενη ακρίβεια. Υπάρχουν ακόμη και υπολογίσιμες, αύξουσες και φραγμένες ακολουθίες ρητών με μη υπολογίσιμο όριο (ακολουθίες τύπου Specker). Η απόδειξη συνδέεται με το πρόβλημα τερματισμού.

Δεν σημαίνει ότι τα όρια «δεν υπολογίζονται». Όταν διαθέτουμε ενεργό φράγμα σφάλματος, γνωστό ρυθμό ή υπολογίσιμο μέτρο σύγκλισης, ο υπολογισμός είναι εφικτός. Σημαίνει ότι η απλή υπόσχεση «η ακολουθία συγκλίνει» δεν περιέχει αρκετή αλγοριθμική πληροφορία. Ένα μέρος της δυσκολίας του Λογισμού βρίσκεται ακριβώς στη μετάβαση από την ύπαρξη στην ποσοτική προσέγγιση.

Παρατήρηση 5.14. Η εξάρτηση $N = N(\varepsilon)$ είναι ουσιώδης. Μικρότερη ανοχή συνήθως απαιτεί μεγαλύτερο δείκτη. Επίσης, αν κάποιος δείκτης N λειτουργεί, τότε λειτουργεί και κάθε $N' \geq N$.

Παράδειγμα 5.15 (Ρητός δείκτης ακρίβειας). Για $x_n = 1/(n+1)$ και $\ell = 0$, θέλουμε

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Αρκεί να επιλέξουμε

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Πράγματι, αν $n \geq N(\varepsilon)$, τότε $n+1 > 1/\varepsilon$, άρα $1/(n+1) < \varepsilon$.

Εμβάθυνση – Ακρίβεια και αριθμός επαναλήψεων

Αν ένας αλγόριθμος ικανοποιεί το σφάλμα

$$|L_n - L^*| \leq C\rho^n, \quad C > 0, \quad 0 < \rho < 1,$$

τότε για να εξασφαλίσουμε $|L_n - L^*| < \varepsilon$ αρκεί

$$n > \frac{\log(C/\varepsilon)}{-\log \rho}.$$

Ο ορισμός του ορίου γίνεται έτσι πρακτικός κανόνας: συνδέει την επιθυμητή ανοχή με έναν επαρκή αριθμό επαναλήψεων.

5.5 Σύνθετα παραδείγματα

Παράδειγμα 5.16 (Προεξοφλημένη αξία). Έστω $r > 0$ και $P_n = C/(1+r)^n$, η παρούσα αξία μιας πληρωμής $C > 0$ που πραγματοποιείται στην περίοδο n . Επειδή $\rho = 1/(1+r) \in (0, 1)$, έχουμε $P_n = C\rho^n \rightarrow 0$. Άρα η παρούσα αξία είναι συγκλίνουσα και συνεπώς φραγμένη. Αν επίσης $C \leq D$, τότε

$$\frac{C}{(1+r)^n} \leq \frac{D}{(1+r)^n}$$

για κάθε n , και η διάταξη διατηρείται στα όρια.

Παράδειγμα 5.17 (Συνεπής εκτίμηση με περιορισμό). Έστω $T_n \rightarrow \theta$ και γνωρίζουμε ότι $T_n \geq 0$ για κάθε n . Από τη διατήρηση της διάταξης, $\theta \geq 0$. Επομένως, αν ένα μοντέλο απαιτεί μη αρνητική παράμετρο, οποιοδήποτε πραγματικό όριο μιας ακολουθίας εφικτών εκτιμητών παραμένει εφικτό ως προς αυτόν τον περιορισμό.

Παράδειγμα 5.18 (Περιορισμένες πιθανότητες). Αν $p_n \rightarrow p$ και $0 \leq p_n \leq 1$ για κάθε n , τότε, εφαρμόζοντας δύο φορές τη διατήρηση της διάταξης,

$$0 \leq p \leq 1.$$

Το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ διατηρείται κατά τη λήψη ορίων.

5.6 Ασκήσεις

Άσκηση 5.19. Αποδείξτε απευθείας από τον ορισμό ότι η ακολουθία $x_n = (3n+1)/(n+1)$ συγκλίνει στο 3. Βρείτε έναν ρητό δείκτη $N(\varepsilon)$.

Άσκηση 5.20. Κατασκευάστε μια φραγμένη αλλά αποκλίνουσα ακολουθία και εξηγήστε γιατί το παράδειγμα δεν αντιφάσκει με το λήμμα “σύγκλιση συνεπάγεται φραγμένο”.

Άσκηση 5.21. Έστω $x_n \rightarrow \ell$ και $x_n \in [a, b]$ για κάθε n . Με χρήση του λήμματος διατήρησης της διάταξης, αποδείξτε ότι $\ell \in [a, b]$.

Άσκηση 5.22. Έστω $x_n < y_n$ για κάθε n , $x_n \rightarrow \ell_x$ και $y_n \rightarrow \ell_y$. Δώστε παράδειγμα με $\ell_x = \ell_y$ και διατυπώστε μια πρόσθετη συνθήκη που θα εξασφάλιζε $\ell_x < \ell_y$.

Άσκηση 5.23. Μια μέθοδος μάθησης έχει σφάλμα $E_n \leq 5(0.9)^n$. Βρείτε επαρκή αριθμό επαναλήψεων ώστε $E_n < 10^{-3}$. Εξηγήστε πώς η απάντηση αποτελεί συγκεκριμένη επιλογή του $N(\varepsilon)$.

Έλεγχος κατανόησης

Μετά τη μελέτη της διάλεξης θα πρέπει να μπορείτε:

1. να αποδεικνύετε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη,
2. να εξηγείτε γιατί πεπερασμένες τροποποιήσεις δεν αλλάζουν το όριο,
3. να μεταφέρετε μη αυστηρές ανισότητες στα όρια,
4. να εντοπίζετε γιατί οι αυστηρές ανισότητες μπορεί να χαθούν στο όριο,
5. να μεταφράζετε τη γεωμετρική συνθήκη διαστήματος στην αναλυτική ανισότητα $|x_n - \ell| < \varepsilon$,
6. να ερμηνεύετε το $N(\varepsilon)$ ως κατώφλι ακρίβειας.

Εμβάθυνση – Εκτός ύλης: το πρόβλημα τερματισμού και οι ακολουθίες Specker

Η ενότητα αυτή είναι πληροφοριακή και βρίσκεται εκτός του κύριου εύρους και της εξεταστέας ύλης του μαθήματος. Σκοπός της είναι να διευκρινίσει γιατί η σύγκλιση μιας ακολουθίας δεν συνεπάγεται αυτομάτως ότι το όριό της μπορεί να υπολογιστεί αλγοριθμικά.

Το πρόβλημα του τερματισμού. Θεωρούμε ένα πρόγραμμα P και μια είσοδο w . Το πρόβλημα του τερματισμού ζητά να αποφασίσουμε αν η εκτέλεση του P με είσοδο w :

- θα σταματήσει έπειτα από πεπερασμένο πλήθος βημάτων ή
- θα συνεχίσει επ' άπειρον.

Για ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα μπορούμε να αρχίσουμε την εκτέλεσή του. Αν το πρόγραμμα τερματίσει, αυτό θα διαπιστωθεί μετά από πεπερασμένο χρόνο. Αν όμως δεν έχει ακόμη τερματίσει, δεν γνωρίζουμε γενικά αν δεν θα τερματίσει ποτέ ή αν απλώς χρειάζεται περισσότερο χρόνο.

Το θεώρημα μη επιλυσιμότητας του προβλήματος τερματισμού δηλώνει ότι δεν υπάρχει ένας καθολικός αλγόριθμος H ο οποίος να δέχεται ως είσοδο την περιγραφή οποιουδήποτε προγράμματος P και οποιαδήποτε είσοδο w , να τερματίζει πάντοτε και να απαντά σωστά αν το $P(w)$ θα τερματίσει.

Αν συμβολίσουμε με

$$K = \{e \in \mathbb{N} : P_e \text{ τερματίζει}\}$$

το σύνολο των δεικτών των προγραμμάτων που τερματίζουν, τότε το K είναι αλγοριθμικά απαριθμήσιμο: μπορούμε να προσομοιώνουμε παράλληλα τα προγράμματα και να καταγράφουμε όσα τερματίζουν. Δεν είναι όμως αποφασίσιμο: δεν υπάρχει αλγόριθμος που να αποφαινεται πάντοτε, για κάθε e , αν $e \in K$.

Κατασκευή μιας ακολουθίας τύπου Specker. Αριθμούμε όλα τα δυνατά προγράμματα ως

$$P_0, P_1, P_2, \dots$$

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, εξετάζουμε τα πρώτα $N + 1$ προγράμματα και τα εκτελούμε για το πολύ N βήματα. Ορίζουμε

$$s_N = \sum_{\substack{0 \leq e \leq N \\ P_e \text{ τερματίζει σε το πολύ } N \text{ βήματα}}} 4^{-(e+1)}.$$

Η (s_N) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Κάθε s_N είναι ρητός αριθμός.

Το s_N είναι πεπερασμένο άθροισμα ρητών αριθμών της μορφής $4^{-(e+1)}$.

2. Η ακολουθία είναι υπολογίσιμη.

Για δεδομένο N , χρειάζεται να εκτελέσουμε μόνο πεπερασμένα πολλά προγράμματα, και καθένα μόνο για πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Επομένως υπάρχει αλγόριθμος που υπολογίζει ακριβώς το s_N .

3. Η ακολουθία είναι αύξουσα.

Αν ένα πρόγραμμα έχει παρατηρηθεί ότι τερματίζει μέχρι το στάδιο N , η αντίστοιχη ποσότητα $4^{-(e+1)}$ περιλαμβάνεται και σε κάθε μεταγενέστερο άθροισμα. Επιπλέον, σε επόμενα στάδια μπορεί να ανακαλυφθούν νέα προγράμματα που τερματίζουν. Άρα

$$s_N \leq s_{N+1}.$$

4. Η ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

Για κάθε N ,

$$0 \leq s_N \leq \sum_{e=0}^{\infty} 4^{-(e+1)} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, η (s_N) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό

$$s = \sum_{e \in K} 4^{-(e+1)} \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Ο αριθμός s περιέχει, στην ανάπτυξή του με βάση το 4, την πληροφορία για το ποια προγράμματα τερματίζουν:

$$s = 0.d_0d_1d_2 \dots (4),$$

όπου

$$d_e = \begin{cases} 1, & \text{αν } P_e \text{ τερματίζει,} \\ 0, & \text{αν } P_e \text{ δεν τερματίζει.} \end{cases}$$

Η χρήση της βάσης 4, με ψηφία μόνο 0 και 1, αφήνει κενό ανάμεσα στις δύο δυνατές περιπτώσεις και αποφεύγει τα προβλήματα μεταφοράς ψηφίων που θα μπορούσαν να εμφανιστούν σε μια λιγότερο προσεκτική δυαδική κωδικοποίηση.

Αν το s ήταν υπολογίσιμος πραγματικός αριθμός, θα μπορούσαμε να τον προσεγγίζουμε με αρκετή ακρίβεια ώστε να ανακτούμε διαδοχικά τα ψηφία d_e . Θα μπορούσαμε τότε να αποφασίζουμε αν κάθε πρόγραμμα P_e τερματίζει, πράγμα που θα έλυνε το πρόβλημα του τερματισμού. Αυτό είναι αδύνατο. Επομένως το όριο s δεν είναι υπολογίσιμο.

Έχουμε έτσι μια ακολουθία η οποία είναι ταυτόχρονα:

υπολογίσιμη, ρητή, αύξουσα και άνω φραγμένη

αλλά έχει μη υπολογίσιμο όριο.

Πού ακριβώς βρίσκεται η δυσκολία; Για κάθε συγκεκριμένο N , το s_N μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Το πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει υπολογίσιμος καθολικός κανόνας που να μας λέει πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το N ώστε

$$|s - s_N| < \varepsilon.$$

Αν υπήρχε ένα υπολογίσιμο μέτρο σύγκλισης

$$N = N(\varepsilon),$$

θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το s με οποιαδήποτε ζητούμενη ακρίβεια και, τελικά, να ανακτήσουμε το σύνολο K .

Επομένως πρέπει να διακρίνουμε τις δηλώσεις:

«μπορώ να υπολογίσω κάθε όρο s_N »

και

«μπορώ να υπολογίσω το όριο με πιστοποιημένο σφάλμα».

Η πρώτη δεν συνεπάγεται γενικά τη δεύτερη.

Μπορεί μια οικονομία να λειτουργεί ως υπολογιστική μηχανή; Η σύγκριση μιας οικονομίας με υπολογιστική μηχανή πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μαθηματική αναλογία και όχι ως κυριολεκτική περιγραφή κάθε πραγματικής οικονομίας.

Μια οικονομία περιλαμβάνει:

- φορείς που επεξεργάζονται πληροφορίες,
- κανόνες απόφασης και στρατηγικές,
- διαδοχικές χρονικές καταστάσεις,
- μηχανισμούς ανατροφοδότησης,
- θεσμούς που μετασχηματίζουν εισροές πληροφοριών σε πράξεις και αποτελέσματα.

Για τον λόγο αυτό, ένα επαρκώς πλούσιο δυναμικό ή πράκτορο-κεντρικό υπόδειγμα μπορεί να αναπαραστήσει λογικές πράξεις και αλγοριθμικούς υπολογισμούς. Σε τέτοια υποδείγματα, ερωτήματα για τη μακροχρόνια συμπεριφορά μπορεί να κληρονομούν δυσκολίες παρόμοιες με εκείνες του προβλήματος τερματισμού.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μια οικονομική ροή ενεργοποιείται μόνο όταν ένας συγκεκριμένος υπολογιστικός ή θεσμικός μηχανισμός τερματίσει:

$$c_{e,t} = \begin{cases} 4^{-(e+1)}, & \text{αν ο μηχανισμός } e \text{ έχει τερματίσει μέχρι την περίοδο } t, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το συνολικό μέγεθος

$$S_t = \sum_{e=0}^t c_{e,t}$$

έχει τότε τη μορφή ακολουθίας Specker. Κάθε S_t μπορεί να υπολογιστεί από την πεπερασμένη ιστορία μέχρι τον χρόνο t , αλλά το μακροχρόνιο όριο μπορεί να κωδικοποιεί ένα μη αποφασίσιμο σύνολο γεγονότων.

Παρόμοια φαινόμενα μπορούν, τουλάχιστον σε αφηρημένα υποδείγματα, να συνδε-
ονται με:

- την τελική ενεργοποίηση μιας τεχνολογίας ή μιας στρατηγικής,
- την είσοδο επιχειρήσεων που ακολουθούν αλγοριθμικούς κανόνες,

- την εξέλιξη ενός δικτύου συμβάσεων,
- την εκτέλεση αποκεντρωμένων πρωτοκόλλων,
- τη μακροχρόνια συμπεριφορά πράκτορο-κεντρικών προσομοιώσεων,
- τη συσσώρευση προεξοφλημένων ροών που εξαρτώνται από αλγοριθμικά γεγονότα.

Αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε οικονομική πρόβλεψη είναι μη υπολογίσιμη ή ότι μια πραγματική οικονομία είναι κυριολεκτικά μια καθολική μηχανή Turing. Στα συνήθη πεπερασμένα, γραμμικά ή επαρκώς κανονικά οικονομικά υποδείγματα, οι λύσεις και οι προσεγγίσεις τους μπορεί να είναι πλήρως υπολογίσιμες.

Το συμπέρασμα είναι πιο περιορισμένο: όταν επιτρέπουμε αυθαίρετα πλούσιους κανόνες συμπεριφοράς και απεριόριστη χρονική εξέλιξη, δεν πρέπει να θεωρούμε δεδομένο ότι κάθε μακροχρόνιο ερώτημα διαθέτει καθολική αλγοριθμική λύση. Η οικονομική δομή του υποδείγματος πρέπει να παρέχει τις πρόσθετες κανονικότητες που καθιστούν το όριο υπολογίσιμο.

Κεφάλαιο 6

Στοιχεία άλγεβρας ορίων

6.1 Περαιτέρω εργαλεία για όρια ακολουθιών

6.1.1 Σύνοψη της γεωμετρικής κατασκευής

Πρόταση 6.1 (Γεωμετρικός χαρακτηρισμός της σύγκλισης). Για πραγματική ακολουθία (x_n) και $\ell \in \mathbb{R}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) $x_n \rightarrow \ell$,
- (ii) κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ περιέχει όλους τους όρους της (x_n) , εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος.

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ έχει τη μορφή $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Η ένταξη

$$x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

είναι ισοδύναμη με $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Άρα η δήλωση είναι ακριβώς ο αναλυτικός ορισμός του ορίου. $\square$

Πρόταση 6.2 (Γεωμετρικός χαρακτηρισμός της αποτυχίας). Ισχύει $x_n \not\rightarrow \ell$ αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ , έξω από το οποίο βρίσκονται άπειροι όροι της ακολουθίας.

Παρατήρηση 6.3. Η τελευταία φράση σημαίνει ότι έξω από το διάστημα βρίσκονται άπειροι όροι. Δεν σημαίνει ότι το διάστημα δεν περιέχει κανέναν όρο ούτε ότι αυτό το διάστημα δεν περιέχει άπειρους όρους.

6.1.2 Η άρνηση του ορισμού του ορίου

Πρόταση 6.4 (Αναλυτική άρνηση). Η άρνηση της πρότασης $x_n \rightarrow \ell$ είναι

$$x_n \not\rightarrow \ell \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |x_n - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Απόδειξη. Ο ορισμός της σύγκλισης είναι

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_n - \ell| < \varepsilon.$$

Αρνούμαστε διαδοχικά τους ποσοδείκτες και την τελική ανισότητα:

$$\neg(\forall \varepsilon) \equiv \exists \varepsilon, \quad \neg(\exists N) \equiv \forall N, \quad \neg(\forall n) \equiv \exists n,$$

ενώ $\neg(|x_n - \ell| < \varepsilon)$ ισοδυναμεί με $|x_n - \ell| \geq \varepsilon$. $\square$

Ερμηνεία

Για να αποδείξουμε ότι (x_n) δεν συγκλίνει στο ℓ , αρκεί να βρούμε μία σταθερή ακτίνα $\varepsilon_0 > 0$ τέτοια ώστε, όσο μακριά και αν μετακινήσουμε το κατώφλι N , να υπάρχει μεταγενέστερος όρος έξω από το διάστημα $(\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0)$.

Παράδειγμα 6.5. Έστω $x_n = 1/(n+1)$. Θα δείξουμε ότι $x_n \not\rightarrow 1$. Επιλέγουμε $\varepsilon_0 = 1/2$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, θέτουμε $n = \max\{N, 1\}$. Τότε

$$|x_n - 1| = 1 - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Άρα ικανοποιείται η άρνηση του ορισμού και $x_n \not\rightarrow 1$. Φυσικά, η ίδια ακολουθία συγκλίνει στο 0.

Προσοχή

Δεν χρειάζεται το ίδιο κατώφλι N να λειτουργεί για όλα τα ε . Αν απαιτούσαμε κάτι τέτοιο ο ορισμός του ορίου θα γινόταν απαγορευτικά απαιτητικός. Αντίθετα, το $N = N(\varepsilon)$ συνήθως μεγαλώνει καθώς απαιτούμε μικρότερη ανοχή.

6.1.3 Μοναδικότητα, φραγμένο και πεπερασμένες τροποποιήσεις

Θεώρημα 6.6 (Μοναδικότητα του ορίου). Αν $x_n \rightarrow \ell$ και $x_n \rightarrow m$, τότε $\ell = m$.

Απόδειξη. Αν $\ell \neq m$, θέτουμε $\varepsilon = |\ell - m|/3$. Για αρκετά μεγάλο n , ισχύουν ταυτόχρονα $|x_n - \ell| < \varepsilon$ και $|x_n - m| < \varepsilon$. Από την τριγωνική ανισότητα,

$$|\ell - m| \leq |\ell - x_n| + |x_n - m| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - m|,$$

άτοπο. □

Λήμμα 6.7 (Σύγκλιση και φραγμένο). Κάθε συγκλίνουσα πραγματική ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Αν $x_n \rightarrow \ell$, τότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει N ώστε $|x_n - \ell| < 1$ για $n \geq N$. Άρα $|x_n| < |\ell| + 1$ τελικά. Θέτοντας

$$M = \max\{|x_0|, \dots, |x_{N-1}|, |\ell| + 1\},$$

παίρνουμε $|x_n| \leq M$ για κάθε n . □

Παρατήρηση 6.8. Το αντίστροφο δεν ισχύει: η $(-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά όχι συγκλίνουσα. Με αντιθετοαντιστροφή, κάθε μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει.

Λήμμα 6.9 (Πεπερασμένες τροποποιήσεις). Αν $x_n \rightarrow \ell$ και οι $(x_n), (y_n)$ διαφέρουν σε πεπερασμένο πλήθος θέσεων, τότε $y_n \rightarrow \ell$.

Απόδειξη. Υπάρχει N_0 ώστε $x_n = y_n$ για $n \geq N_0$. Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει N_1 ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon$ για $n \geq N_1$. Για $n \geq \max\{N_0, N_1\}$, έχουμε $|y_n - \ell| = |x_n - \ell| < \varepsilon$. □

6.1.4 Κατασκευή ενός δείκτη ακρίβειας

Παράδειγμα 6.10 (Η ακολουθία $1/(n+1)$). Για να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

πρέπει, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, να εξασφαλίσουμε

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Αρκεί $n > 1/\varepsilon - 1$. Μια έγκυρη επιλογή είναι

$$N(\varepsilon) = \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1 \right\}.$$

Η επιλογή δεν είναι μοναδική. Οποιοδήποτε μεγαλύτερο κατώφλι λειτουργεί επίσης.

Παρατήρηση 6.11. Το $N(\varepsilon)$ είναι ο πρώτος δείκτης μετά από τον οποίο θέλουμε να ισχύει η επιθυμητή ακρίβεια. Δεν απαιτείται να είναι ο μικρότερος δυνατός δείκτης.

Εμβάθυνση – Υπολογιστική ανοχή

Αν μια επαναληπτική μέθοδος ικανοποιεί $|L_n - L^*| \leq C\rho^n$, όπου $0 < \rho < 1$, τότε αρκεί

$$n > \frac{\log(C/\varepsilon)}{-\log \rho}$$

για να έχουμε $|L_n - L^*| < \varepsilon$. Έτσι ο αφηρημένος δείκτης $N(\varepsilon)$ γίνεται αριθμός απαιτούμενων επαναλήψεων.

6.2 Άλγεβρα ορίων και συνεχής μεταφορά

6.2.1 Γραμμικές πράξεις

Έστω στο εξής

$$x_n \rightarrow \ell_x, \quad y_n \rightarrow \ell_y, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Λήμμα 6.12 (Πολλαπλασιασμός με σταθερά). *Ισχύει*

$$\lambda x_n \rightarrow \lambda \ell_x.$$

Απόδειξη. Αν $\lambda = 0$, η ακολουθία (λx_n) είναι σταθερά μηδενική. Αν $\lambda \neq 0$, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, η σύγκλιση της (x_n) δίνει N ώστε

$$n \geq N \implies |x_n - \ell_x| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Τότε

$$|\lambda x_n - \lambda \ell_x| = |\lambda| |x_n - \ell_x| < \varepsilon.$$

□

Λήμμα 6.13 (Άθροισμα ακολουθιών). *Ισχύει*

$$x_n + y_n \rightarrow \ell_x + \ell_y.$$

Απόδειξη. Για $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε N_x, N_y ώστε

$$|x_n - \ell_x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N_x), \quad |y_n - \ell_y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N_y).$$

Για $n \geq \max\{N_x, N_y\}$, από την τριγωνική ανισότητα,

$$|(x_n + y_n) - (\ell_x + \ell_y)| \leq |x_n - \ell_x| + |y_n - \ell_y| < \varepsilon.$$

□

Πόρισμα 6.14 (Διαφορά). *Ισχύει*

$$x_n - y_n \longrightarrow \ell_x - \ell_y.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τα δύο προηγούμενα λήμματα στη σχέση $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$. □

6.2.2 Γινόμενο και πηλίκο

Λήμμα 6.15 (Γινόμενο ακολουθιών). *Ισχύει*

$$x_n y_n \longrightarrow \ell_x \ell_y.$$

Απόδειξη. Επειδή (x_n) συγκλίνει, είναι φραγμένη. Υπάρχει λοιπόν $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε n . Γράφουμε

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \ell_x \ell_y| &= |x_n(y_n - \ell_y) + \ell_y(x_n - \ell_x)| \\ &\leq M|y_n - \ell_y| + |\ell_y||x_n - \ell_x|. \end{aligned}$$

Θέτουμε $K = M + |\ell_y| + 1$. Για αρκετά μεγάλο n , και οι δύο διαφορές είναι μικρότερες από ε/K . Τότε το δεξί μέλος είναι μικρότερο από ε . □

Πόρισμα 6.16 (Δυνάμεις). *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$x_n^k \longrightarrow \ell_x^k.$$

Πρόταση 6.17 (Αντίστροφο και πηλίκο). *Αν $\ell_y \neq 0$, τότε $y_n \neq 0$ τελικά και*

$$\frac{1}{y_n} \longrightarrow \frac{1}{\ell_y}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{\ell_x}{\ell_y}.$$

Απόδειξη. Για αρκετά μεγάλο n , $|y_n - \ell_y| < |\ell_y|/2$, οπότε $|y_n| > |\ell_y|/2$. Άρα

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{\ell_y} \right| = \frac{|y_n - \ell_y|}{|y_n||\ell_y|} \leq \frac{2}{|\ell_y|^2} |y_n - \ell_y| \longrightarrow 0.$$

Το αποτέλεσμα για το πηλίκο ακολουθεί από το λήμμα του γινομένου. □

Προσοχή

Οι αλγεβρικές πράξεις επιτρέπονται όταν γνωρίζουμε ότι τα επιμέρους όρια υπάρχουν. Η συμβολική αντικατάσταση σε εκφράσεις όπως $0/0$ ή $\infty - \infty$ δεν δίνει συμπέρασμα.

Εμβάθυνση – Χαρτοφυλάκιο

Αν οι αποδόσεις δύο τίτλων ικανοποιούν $r_n^A \rightarrow r^A$ και $r_n^B \rightarrow r^B$, τότε η απόδοση ενός σταθερού χαρτοφυλακίου

$$r_n^P = wr_n^A + (1-w)r_n^B$$

συγκλίνει στο $wr^A + (1-w)r^B$. Η γραμμικότητα των ορίων δικαιολογεί τη μεταφορά σταθερών βαρών στο ασυμπτωτικό επίπεδο.

Εμβάθυνση – Στατιστικές ροπές

Αν $m_{1,n} \rightarrow \mu$ και $m_{2,n} \rightarrow \nu$, τότε

$$m_{2,n} - m_{1,n}^2 \rightarrow \nu - \mu^2.$$

Αυτή είναι η αλγεβρική βάση της συνέπειας ενός εκτιμητή διακύμανσης, όταν οι αντίστοιχοι εκτιμητές πρώτης και δεύτερης ροπής είναι συνεπείς.

6.2.3 Αρχή της Συνεχούς Μεταφοράς

Θεώρημα 6.18 (Αρχή της Συνεχούς Μεταφοράς). Έστω $x_n \rightarrow \ell$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο ℓ . Τότε

$$g(x_n) \rightarrow g(\ell).$$

Ισοδύναμα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της g στο ℓ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - \ell| < \delta \implies |g(x) - g(\ell)| < \varepsilon.$$

Επειδή $x_n \rightarrow \ell$, υπάρχει N ώστε $|x_n - \ell| < \delta$ για $n \geq N$. Άρα $|g(x_n) - g(\ell)| < \varepsilon$ για $n \geq N$. $\square$

Παράδειγμα 6.19. Αν $x_n = 1/(n+1)$ και $g(x) = e^x$, τότε $x_n \rightarrow 0$ και η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής στο 0. Επομένως

$$e^{1/(n+1)} \rightarrow e^0 = 1.$$

Παρατήρηση 6.20. Η συνέχεια στο σημείο ℓ είναι επαρκής. Δεν απαιτείται η συνάρτηση να είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 6.21 (Γιατί χρειάζεται η συνέχεια). Ορίζουμε

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Η g είναι ασυνεχής στο 0.

(α) Για $x_n = 1/(n+1)$, έχουμε $x_n \rightarrow 0$ και $g(x_n) = 1 \rightarrow 1 = g(0)$. Άρα η συνέχεια είναι επαρκής, όχι αναγκαία για κάθε συγκεκριμένη ακολουθία.

(β) Για $x_n = (-1)^n/(n+1)$, έχουμε $x_n \rightarrow 0$, αλλά $g(x_n)$ εναλλάσσεται μεταξύ 1 και 0. Επομένως δεν συγκλίνει στο $g(0) = 1$.

Εμβάθυνση – Μετασχηματισμοί εκτιμητών

Αν $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ και g είναι συνεχής στο θ , τότε

$$g(\hat{\theta}_n) \rightarrow g(\theta).$$

Έτσι η συνέπεια διατηρείται υπό συνεχείς μετασχηματισμούς, όπως εκθετικοποίηση, λογάριθμος σε θετική παράμετρο και πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Εμβάθυνση – Μετασχηματισμός πρόβλεψης

Αν ένα γραμμικό σκορ μηχανικής μάθησης ικανοποιεί $s_n \rightarrow s$, τότε η λογιστική πιθανότητα

$$\sigma(s_n) = \frac{1}{1 + e^{-s_n}}$$

συγκλίνει στο $\sigma(s)$, επειδή η σ είναι συνεχής.

Κεφάλαιο 7

Εισαγωγή στις πραγματικές σειρές

7.1 Πραγματικές σειρές

7.1.1 Από μια ακολουθία στους μερικούς αθροιστές

Ορισμός 7.1 (Ακολουθία μερικών αθροισμάτων). Έστω πραγματική ακολουθία $(x_n)_{n \geq 0}$. Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι η (S_n) , όπου

$$S_n = \sum_{i=0}^n x_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_n.$$

Παρατήρηση 7.2. Η μετάβαση $(x_n) \mapsto (S_n)$ είναι μια διαδικασία μετασχηματισμού ακολουθιών. Η αρχική ακολουθία ανακτάται από τα μερικά αθροίσματα μέσω

$$x_0 = S_0, \quad x_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Ορισμός 7.3 (Πραγματική σειρά). Η συμβολική έκφραση

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

ονομάζεται πραγματική σειρά. Η σειρά *συγκλίνει* όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n) συγκλίνει. Τότε ορίζουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Αν το όριο δεν υπάρχει ως πραγματικός αριθμός, η σειρά αποκλίνει.

Προσοχή

Η σειρά δεν είναι η ακολουθία των όρων της. Είναι το όριο, όταν υπάρχει, της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Τα σύμβολα (x_n) , (S_n) και $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ περιγράφουν τρία διαφορετικά αντικείμενα. Το τελευταίο όταν υπάρχει είναι πραγματικός αριθμός.

7.1.2 Πρώτα παραδείγματα

Παράδειγμα 7.4 (Σταθεροί όροι). Έστω $x_0 = 0$ και $x_n = 1$ για $n \geq 1$. Τότε $x_n \rightarrow 1$, αλλά

$$S_n = n.$$

Η ακολουθία (S_n) είναι μη φραγμένη, άρα $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 7.5 (Εναλλασσόμενοι σταθεροί όροι). Για $x_n = (-1)^n$,

$$S_n = 1, 0, 1, 0, \dots$$

και συνεπώς η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 7.6 (Αρμονική σειρά). Για $x_n = 1/(n+1)$, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

είναι η αρμονική σειρά. Οι όροι της τείνουν στο μηδέν, αλλά η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 7.7 (Εναλλασσόμενη αρμονική σειρά). Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

συγκλίνει. Η απόδειξη απαιτεί κριτήριο εναλλασσόμενων σειρών, το οποίο δεν αναπτύσσεται σε αυτή τη διάλεξη.

Παράδειγμα 7.8 (p -αρμονικές σειρές). Για $p > 1$, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$$

συγκλίνει. Για $0 < p \leq 1$, αποκλίνει. Η περίπτωση $p = 1$ είναι η αρμονική σειρά.

Πρόταση 7.9 (Αναγκαία συνθήκη σύγκλισης). Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε

$$x_n \longrightarrow 0.$$

Απόδειξη. Αν $S_n \rightarrow S$, τότε και $S_{n-1} \rightarrow S$ (γιατί;). Για $n \geq 1$,

$$x_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0.$$

□

Προσοχή

Η συνθήκη $x_n \rightarrow 0$ είναι αναγκαία αλλά όχι επαρκής. Η αρμονική σειρά αποτελεί βασικό αντιπαράδειγμα.

7.1.3 Η γεωμετρική σειρά

Ορισμός 7.10. Για $\alpha \in \mathbb{R}$, η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$$

ονομάζεται γεωμετρική σειρά με λόγο α .

Λήμμα 7.11 (Τύπος πεπερασμένου γεωμετρικού αθροίσματος). Αν $\alpha \neq 1$, τότε

$$S_n = \sum_{i=0}^n \alpha^i = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε με α και αφαιρούμε:

$$\begin{aligned} S_n - \alpha S_n &= (1 + \alpha + \cdots + \alpha^n) - (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n+1}) \\ &= 1 - \alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

Επειδή $1 - \alpha \neq 0$, διαιρούμε και παίρνουμε τον τύπο. □

Θεώρημα 7.12 (Σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς). Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|\alpha| < 1$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Απόδειξη. Αν $|\alpha| < 1$, τότε $\alpha^{n+1} \rightarrow 0$. Από τον τύπο των μερικών αθροισμάτων και την Αρχή της Συνεχούς Μεταφοράς,

$$S_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \rightarrow \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Αν $\alpha = 1$, τότε $S_n = n + 1$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $\alpha = -1$, τότε τα μερικά αθροίσματα εναλλάσσονται μεταξύ 1 και 0. Αν $|\alpha| > 1$, οι όροι α^n δεν τείνουν στο μηδέν, οπότε η αναγκαία συνθήκη αποτυγχάνει. □

7.1.4 Άθροιση αποκλινουσών σειρών: η μέθοδος Cesàro

Η απόκλιση των μερικών αθροισμάτων δεν αποκλείει κάθε χρήσιμη έννοια «μέσης» τιμής, αρκεί να δηλώνουμε ρητά ότι αλλάζουμε μέθοδο άθροισης.

Ορισμός 7.13 (Cesàro-άθροισμα). Για μια σειρά με μερικά αθροίσματα $S_0, S_1, \dots$ θέτουμε

$$\sigma_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k.$$

Αν $\sigma_N \rightarrow S$, λέμε ότι η σειρά είναι Cesàro-αθροίσιμη στο S .

Κάθε συνήθως συγκλίνουσα σειρά είναι Cesàro-αθροίσιμη στο ίδιο άθροισμα, διότι οι αριθμητικοί μέσοι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας έχουν το ίδιο όριο. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για τη σειρά του Grandi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

τα μερικά αθροίσματα είναι $1, 0, 1, 0, \dots$ και δεν συγκλίνουν, ενώ οι μέσοι τους τείνουν στο $1/2$. Γράφουμε λοιπόν

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{(C)}{=} \frac{1}{2},$$

όχι ως ισότητα συνηθισμένου άθροισματος αλλά ως άθροιση κατά Cesàro.

Εμβάθυνση – Μέσοι, εξομάλυνση και οικονομικά δεδομένα

Ο μετασχηματισμός $S_k \mapsto \sigma_N$ είναι διαδοχικός αριθμητικός μέσος. Η ίδια αρχή εμφανίζεται σε κινητούς μέσους, εξομάλυνση χρονοσειρών και Polyak–Ruppert averaging σε στοχαστικούς αλγόριθμους: οι έντονες ταλαντώσεις μπορεί να μην εξαφανίζονται σημειακά, αλλά να ακυρώνονται στον μέσο. Η μέθοδος Cesàro δεν αθροίζει κάθε αποκλίνουσα σειρά και δεν επιτρέπεται να αντικαθιστά σιωπηρά τη συνήθη σύγκλιση.

Παράδειγμα 7.14. Για $\alpha = 1/2$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Για $\alpha = -1/2$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}.$$

Παρατήρηση 7.15 (Γεωμετρική ουρά). Για $|\alpha| < 1$ και $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=m}^{\infty} \alpha^i = \frac{\alpha^m}{1 - \alpha}.$$

Η σχέση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον έλεγχο σφάλματος όταν κρατάμε μόνο πεπερασμένο πλήθος όρων.

7.1.5 Εφαρμογές των σειρών

Εμβάθυνση – Παρούσα αξία μιας διηνεκούς ροής

Αν μια σταθερή πληρωμή $C > 0$ καταβάλλεται σε κάθε περίοδο και το επιτόκιο είναι $r > 0$, η παρούσα αξία είναι

$$PV = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^t}.$$

Με $\alpha = 1/(1+r) \in (0, 1)$, πρόκειται για γεωμετρική σειρά:

$$PV = \frac{C}{1 - 1/(1+r)} = \frac{C(1+r)}{r}.$$

Αν η πρώτη πληρωμή γίνεται στην περίοδο 1, τότε η αξία είναι C/r .

Εμβάθυνση – Προεξοφλημένη χρησιμότητα

Για σταθερή κατανάλωση c , προεξοφλητικό συντελεστή $\beta \in (0, 1)$ και στιγμιαία χρησιμότητα $u(c)$,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c) = \frac{u(c)}{1 - \beta}.$$

Η υπόθεση $\beta < 1$ δεν είναι μόνο οικονομική: είναι ακριβώς η μαθηματική συνθήκη σύγκλισης της γεωμετρικής σειράς.

Εμβάθυνση – Κατανεμημένες χρονικές υστερήσεις

Αν η επίδραση ενός σοκ μετά από t περιόδους είναι $\gamma\rho^t$, όπου $|\rho| < 1$, τότε η συνολική μακροχρόνια επίδραση είναι

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma\rho^t = \frac{\gamma}{1 - \rho}.$$

Η γεωμετρική φθορά μετατρέπει μια άπειρη δυναμική απόκριση σε πεπερασμένο πολλαπλασιαστή.

Εμβάθυνση – Σφάλμα αποκοπής σε επαναληπτικό αλγόριθμο

Αν οι διαδοχικές διορθώσεις ενός αλγορίθμου ικανοποιούν $|\Delta_t| \leq C\rho^t$, $0 < \rho < 1$, τότε το σφάλμα από τη διακοπή μετά το βήμα $m - 1$ φράσσεται από

$$\sum_{t=m}^{\infty} |\Delta_t| \leq \frac{C\rho^m}{1-\rho}.$$

Αυτό δίνει έναν σαφή κανόνα τερματισμού βάσει της επιθυμητής ανοχής.

Εμβάθυνση – Αναμενόμενη τιμή γεωμετρικού χρόνου

Αν μια διαδικασία επιτυγχάνει ανεξάρτητα σε κάθε δοκιμή με πιθανότητα $p \in (0, 1)$, η πιθανότητα να απαιτούνται περισσότερες από t αποτυχίες είναι $(1-p)^t$. Η γεωμετρική σειρά εξηγεί γιατί ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία είναι $1/p$.

7.1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 7.16. Γράψτε με ποσοδείκτες την άρνηση της δήλωσης $x_n \rightarrow 3$. Έπειτα αποδείξτε ότι $(-1)^n \not\rightarrow 3$ επιλέγοντας κατάλληλο ε_0 .

Άσκηση 7.17. Αποδείξτε από τον ορισμό ότι $(2n+1)/(n+1) \rightarrow 2$ και δώστε έναν ρητό δείκτη $N(\varepsilon)$.

Άσκηση 7.18. Έστω $x_n \rightarrow 2$ και $y_n \rightarrow -1$. Υπολογίστε, αιτιολογώντας κάθε βήμα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 3y_n}{x_n - y_n}.$$

Άσκηση 7.19. Δώστε παράδειγμα ασυνεχούς συνάρτησης g και ακολουθίας $x_n \rightarrow \ell$ για την οποία η $(g(x_n))$ παρ' όλα αυτά συγκλίνει στο $g(\ell)$. Δώστε και δεύτερη ακολουθία που δείχνει ότι η ιδιότητα δεν ισχύει γενικά χωρίς συνέχεια.

Άσκηση 7.20. Για καθεμία από τις ακολουθίες όρων

$$x_n = 1, \quad x_n = (-1)^n, \quad x_n = 2^{-n},$$

γράψτε τους πρώτους πέντε μερικούς αθροιστές και αποφασίστε αν η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 7.21. Βρείτε το άθροισμα

$$5 + 5(0.8) + 5(0.8)^2 + \dots$$

και το ελάχιστο m ώστε η απόλυτη τιμή της ουράς από τον δείκτη m και μετά να είναι μικρότερη από 10^{-2} .

Άσκηση 7.22. Μια επένδυση αποδίδει 100 ευρώ στο τέλος κάθε έτους για πάντα. Με ετήσιο επιτόκιο 5%, υπολογίστε την παρούσα αξία. Εξηγήστε ποια γεωμετρική σειρά χρησιμοποιείτε και γιατί συγκλίνει.

Έλεγχος κατανόησης

Μετά τη μελέτη των Διαλέξεων 10–13 θα πρέπει να μπορείτε:

1. να γράφετε σωστά την άρνηση του ορισμού της σύγκλισης,
2. να κατασκευάζετε έναν επαρκή δείκτη $N(\varepsilon)$,
3. να εφαρμόζετε την άλγεβρα των ορίων με έλεγχο των υποθέσεων,
4. να χρησιμοποιείτε την Αρχή της Συνεχούς Μεταφοράς,
5. να διακρίνετε όρους, μερικά αθροίσματα και άθροισμα σειράς,
6. να ελέγχετε την αναγκαία συνθήκη $x_n \rightarrow 0$,
7. να υπολογίζετε και να ερμηνεύετε γεωμετρικές σειρές,
8. να εφαρμόζετε γεωμετρικές ουρές σε οικονομικά και υπολογιστικά προβλήματα.

Κεφάλαιο 8

Κριτήρια σύγκλισης πραγματικών σειρών

8.1 Σειρές μη αρνητικών όρων

8.1.1 Σύντομη επανάληψη

Ορισμός 8.1 (Μερικά αθροίσματα και σειρά). Για πραγματική ακολουθία $(x_n)_{n \geq 0}$, ορίζουμε

$$S_n = \sum_{i=0}^n x_i.$$

Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει όταν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει. Τότε

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Πρόταση 8.2 (Αναγκαία συνθήκη). Αν η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει, τότε $x_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Αν $S_n \rightarrow S$, τότε και $S_{n-1} \rightarrow S$. Επειδή $x_n = S_n - S_{n-1}$, έχουμε $x_n \rightarrow S - S = 0$. $\square$

Προσοχή

Η συνθήκη $x_n \rightarrow 0$ δεν είναι επαρκής. Η αρμονική σειρά έχει όρους που τείνουν στο μηδέν, αλλά αποκλίνει.

Παράδειγμα 8.3 (Γεωμετρική σειρά). Για $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $|\alpha| < 1$, οπότε

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Για παράδειγμα,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2}{3}.$$

8.1.2 Θετικοί όροι και φραγμένα μερικά αθροίσματα

Λήμμα 8.4 (Σύγκλιση σειράς μη αρνητικών όρων). Έστω $x_i \geq 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Επειδή

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0,$$

η (S_n) είναι αύξουσα. Αν η σειρά συγκλίνει, τότε η (S_n) είναι συγκλίνουσα και συνεπώς φραγμένη. Αντίστροφα, αν η (S_n) είναι άνω φραγμένη, τότε, ως αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει. Άρα υπάρχει το άθροισμα της σειράς. $\square$

Ερμηνεία

Για σειρές μη αρνητικών όρων, δεν υπάρχουν ακυρώσεις. Τα μερικά αθροίσματα μπορούν μόνο να αυξάνονται. Επομένως το μοναδικό ζήτημα είναι αν παραμένουν κάτω από κάποιο σταθερό φράγμα.

Πόρισμα 8.5. Αν $x_i \geq 0$ και τα μερικά αθροίσματα είναι μη φραγμένα, τότε $S_n \rightarrow +\infty$ και η σειρά αποκλίνει.

8.1.3 Η αρμονική σειρά

Θεώρημα 8.6 (Απόκλιση της αρμονικής σειράς). Η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$$

αποκλίνει.

Απόδειξη. Για $i \geq 0$ και $x \in [i, i+1]$, ισχύει

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{i+1}.$$

Άρα

$$\int_i^{i+1} \frac{dx}{x+1} \leq \frac{1}{i+1}.$$

Αθροίζοντας από $i = 0$ έως n , παίρνουμε

$$\log(n+2) = \int_0^{n+1} \frac{dx}{x+1} \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} = S_n.$$

Αν η (S_n) ήταν φραγμένη, τότε και η $\log(n+2)$ θα ήταν φραγμένη, πράγμα αδύνατο. Επομένως η αρμονική σειρά αποκλίνει. $\square$

Παρατήρηση 8.7. Το γεγονός ότι $1/(n+1) \rightarrow 0$ δεν καθορίζει πόσο γρήγορα μικραίνουν οι όροι. Στην αρμονική σειρά η μείωση είναι υπερβολικά αργή για να παραμείνουν φραγμένα τα μερικά αθροίσματα.

Εμβάθυνση – Ρυθμός απόκλισης

Η προηγούμενη απόδειξη δίνει ήδη το κάτω φράγμα

$$S_n \geq \log(n+2).$$

Άρα η απόκλιση είναι αργή αλλά απεριόριστη. Ακριβέστερα, η $S_n - \log n$ συγκλίνει στη σταθερά Euler–Mascheroni ($C_{EM} \approx 0.5772156649$), όμως αυτό δεν χρειάζεται για την απόδειξη της απόκλισης.

8.1.4 Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Θεώρημα 8.8 (Κριτήριο ολοκληρώματος). Έστω $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ συνεχής και φθίνουσα. Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το κταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x) dx$. Για κάθε $N \geq 1$ ισχύει

$$\int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(x) dx.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φθίνουσα, στο διάστημα $[n, n+1]$ έχουμε $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Ολοκληρώνουμε και αθροίζουμε τις ανισότητες. Τα δύο άκρα συγκλίνουν ή αποκλίνουν μαζί, και το συμπέρασμα ακολουθεί με σύγκριση. $\square$

Αν η σειρά συγκλίνει και $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$, η ίδια γεωμετρία των ορθογωνίων δίνει

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_N \leq \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

Το κριτήριο δεν αποφασίζει μόνο τη σύγκλιση· παρέχει και πιστοποιημένο σφάλμα αποκοπής. Για $f(x) = x^{-p}$ αναγκούμε αμέσως ότι η p -σειρά συγκλίνει ακριβώς όταν $p > 1$.

8.1.5 Οι p -σειρές

Θεώρημα 8.9 (Ταξινόμηση των p -σειρών). Για $p > 0$, η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Απόδειξη. Αν $0 < p \leq 1$, τότε

$$\frac{1}{(i+1)^p} \geq \frac{1}{i+1},$$

οπότε η σειρά αποκλίνει με σύγκριση προς την αρμονική σειρά.

Έστω τώρα $p > 1$. Για $i \geq 1$ και $x \in [i, i+1]$,

$$\frac{1}{(i+1)^p} \leq \frac{1}{x^p}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^p} \\ &\leq 1 + \int_1^{n+1} x^{-p} dx \\ &= 1 + \frac{1 - (n+1)^{1-p}}{p-1} \leq 1 + \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

Τα μερικά αθροίσματα είναι αύξοντα και άνω φραγμένα, άρα συγκλίνουν. $\square$

Παρατήρηση 8.10. Το άνω φράγμα $1 + 1/(p-1)$ αποδεικνύει τη σύγκλιση, αλλά γενικά δεν είναι το ακριβές άθροισμα της σειράς. Το άθροισμα συμβολίζεται με $\zeta(p)$, όπου ζ είναι η συνάρτηση ζήτα του Riemann.

Εμβάθυνση – Βαριές ουρές στην πιθανότητα

Αν μια διακριτή κατανομή έχει πιθανότητες ανάλογες του n^{-p} , η κανονικοποίηση $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} < \infty$ είναι δυνατή μόνο για $p > 1$. Έτσι το κατώφλι των p -σειρών καθορίζει πότε ένας αυτού του είδους η ασυμπτωτική συμπεριφορά (Power Law) μπορεί να ορίσει κατανομή πιθανότητας.

8.2 Πράξεις, διάταξη και ουρές σειρών

8.2.1 Γραμμικότητα

Θεώρημα 8.11 (Άθροισμα και διαφορά σειρών). Αν οι σειρές $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ και $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ συγκλίνουν, τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} (ax_i + by_i)$$

και

$$\sum_{i=0}^{\infty} (ax_i + by_i) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i + b \sum_{i=0}^{\infty} y_i.$$

Απόδειξη. Για τα μερικά αθροίσματα ισχύει

$$\sum_{i=0}^n (ax_i + by_i) = a \sum_{i=0}^n x_i + b \sum_{i=0}^n y_i.$$

Λαμβάνοντας όρια και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα των ορίων ακολουθιών, προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Παράδειγμα 8.12. Υπολογίζουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i + 2^{i+1}}{6^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = 2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 5.$$

Προσοχή

Η γραμμικότητα εφαρμόζεται όταν οι επιμέρους σειρές συγκλίνουν. Η αφαίρεση δύο αποκλινουσών σειρών μπορεί να δημιουργήσει απροσδιόριστη έκφραση τύπου $\infty - \infty$.

8.2.2 Διάταξη και σύγκριση

Λήμμα 8.13 (Διατήρηση διάταξης). Έστω ότι οι σειρές $\sum x_i$ και $\sum y_i$ συγκλίνουν και $x_i \leq y_i$ για κάθε i . Τότε

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} y_i.$$

Απόδειξη. Οι όροι $y_i - x_i$ είναι μη αρνητικοί. Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum (y_i - x_i)$ είναι μη αρνητικά, ενώ από τη γραμμικότητα η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{i=0}^{\infty} (y_i - x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i - \sum_{i=0}^{\infty} x_i \geq 0.$$

□

Θεώρημα 8.14 (Κριτήριο σύγκρισης). Έστω $0 \leq x_i \leq y_i$ για κάθε i .

(i) Αν $\sum y_i$ συγκλίνει, τότε $\sum x_i$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\sum x_i$ αποκλίνει, τότε $\sum y_i$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Τα μερικά αθροίσματα ικανοποιούν

$$0 \leq \sum_{i=0}^n x_i \leq \sum_{i=0}^n y_i.$$

Αν η $\sum y_i$ συγκλίνει, τα δεξιά μερικά αθροίσματα είναι φραγμένα. Άρα είναι φραγμένα και τα αριστερά, οπότε η $\sum x_i$ συγκλίνει. Η δεύτερη δήλωση είναι η αντιθετοαντιστροφή της πρώτης. □

Εμβάθυνση – Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Αν $x_n, y_n > 0$ τελικά και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = c, \quad 0 < c < \infty,$$

τότε οι σειρές $\sum x_n$ και $\sum y_n$ είτε συγκλίνουν και οι δύο είτε αποκλίνουν και οι δύο. Πράγματι, τελικά ισχύει $(c/2)y_n \leq x_n \leq (3c/2)y_n$, οπότε εφαρμόζουμε δύο φορές το κριτήριο σύγκρισης.

8.2.3 Ουρές σειρών

Ορισμός 8.15 (Ουρά). Για $k \in \mathbb{N}$, η σειρά

$$\sum_{i=k}^{\infty} x_i$$

ονομάζεται ουρά της $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ από τον δείκτη k .

Λήμμα 8.16 (Αφαίρεση πεπερασμένου πλήθους όρων). Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει μια, και συνεπώς κάθε, ουρά της. Όταν συγκλίνει,

$$\sum_{i=k}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i.$$

Απόδειξη. Για $n \geq k$,

$$\sum_{i=k}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i.$$

Οι δύο ακολουθίες μερικών αθροισμάτων διαφέρουν κατά μια σταθερά, άρα η μία συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η άλλη. $\square$

Πόρισμα 8.17 (Οι ουρές τείνουν στο μηδέν). Αν $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει, τότε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^{\infty} x_i = 0.$$

Παράδειγμα 8.18 (Γεωμετρική ουρά). Αν $|\alpha| < 1$, τότε

$$\sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha}.$$

Για $\alpha = 1/2$ και $k = 10^{10}$,

$$\sum_{i=10^{10}}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{10^{10}-1}}.$$

Εμβάθυνση – Σφάλμα αποκοπής

Αν προσεγγίζουμε το άθροισμα μιας σειράς με το S_{k-1} , η ουρά

$$R_k = \sum_{i=k}^{\infty} x_i$$

είναι ακριβώς το σφάλμα αποκοπής. Για γεωμετρικά φθίνοντες όρους, το σφάλμα έχει κλειστή μορφή και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κανόνας τερματισμού αριθμητικού αλγορίθμου.

8.3 Απόλυτη σύγκλιση και αναδιατάξεις

8.3.1 Απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση

Ορισμός 8.19 (Απόλυτη σύγκλιση). Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|.$$

Ορισμός 8.20 (Υπό συνθήκη σύγκλιση). Μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη αν συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Παράδειγμα 8.21. Κάθε συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά συγκλίνει απολύτως, διότι για $|\alpha| < 1$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha^i| = \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha|^i = \frac{1}{1 - |\alpha|}.$$

Παράδειγμα 8.22. Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

συγκλίνει, αλλά όχι απολύτως, επειδή η σειρά των απόλυτων τιμών είναι η αρμονική σειρά. Επομένως συγκλίνει υπό συνθήκη.

Θεώρημα 8.23 (Απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται σύγκλιση). Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Για κάθε i ,

$$0 \leq x_i + |x_i| \leq 2|x_i|.$$

Επειδή $\sum 2|x_i|$ συγκλίνει, το κριτήριο σύγκρισης δείχνει ότι συγκλίνει και η $\sum (x_i + |x_i|)$. Από τη γραμμικότητα,

$$\sum x_i = \sum (x_i + |x_i|) - \sum |x_i|$$

υπάρχει ως πραγματικός αριθμός. □

Παρατήρηση 8.24. Το αντίστροφο είναι ψευδές, όπως δείχνει η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά. Άρα

$$\text{απόλυτη σύγκλιση} \implies \text{σύγκλιση},$$

αλλά όχι αντιστρόφως.

8.3.2 Αναδιατάξεις

Ορισμός 8.25 (Αναδιάταξη). Έστω $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ αμφιμονοσήμαντη. Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

λέγεται αναδιάταξη της $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Θεώρημα 8.26 (Σταθερότητα απόλυτα συγκλινουσών σειρών). Κάθε αναδιάταξη μιας απόλυτα συγκλίνουσας σειράς συγκλίνει στο ίδιο άθροισμα.

Παρατήρηση 8.27. Η σειρά των απόλυτων τιμών δεν επηρεάζεται από τη σειρά εμφάνισης των όρων. Αυτό καθιστά την απόλυτη σύγκλιση την ασφαλή μορφή σύγκλισης για αναδιατάξεις και ομαδοποιήσεις.

Θεώρημα 8.28 (Θεώρημα αναδιάταξης του Riemann). Αν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη των όρων της που συγκλίνει στο c . Υπάρχουν επίσης αναδιατάξεις που αποκλίνουν.

Παρατήρηση 8.29. Το αποτέλεσμα εξηγεί γιατί η σειρά εμφάνισης των όρων σε μια υπό συνθήκη συγκλίνουσα σειρά δεν είναι αθώα. Η απόλυτη σύγκλιση εξαλείφει αυτή την αστάθεια.

Εμβάθυνση – Αριθμητική άθροιση

Σε υπολογισμούς κινητής υποδιαστολής ακόμη και πεπερασμένα αθροίσματα επηρεάζονται από τη σειρά των πράξεων λόγω στρογγυλοποίησης. Η απόλυτη σύγκλιση δεν καταργεί τα αριθμητικά σφάλματα, αλλά παρέχει μαθηματική σταθερότητα ως προς την ιδανική αναδιάταξη των άπειρων όρων.

8.4 Κριτήριο του λόγου

8.4.1 Διατύπωση και ερμηνεία

Θεώρημα 8.30 (Κριτήριο του λόγου). Έστω σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ με $x_n \neq 0$ τελικά και έστω ότι υπάρχει το όριο

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|.$$

Τότε:

- (i) αν $L < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως,
- (ii) αν $L > 1$, η σειρά αποκλίνει,
- (iii) αν $L = 1$, το κριτήριο δεν δίνει συμπέρασμα.

Απόδειξη. Αν $L < 1$, επιλέγουμε q με $L < q < 1$. Από τον ορισμό του ορίου, υπάρχει N ώστε για $n \geq N$,

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq q.$$

Με επαγωγή,

$$|x_{N+k}| \leq |x_N| q^k.$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum |x_N| q^k$ συγκλίνει. Άρα, με το κριτήριο σύγκρισης, συγκλίνει η ουρά της $\sum |x_n|$, και επομένως η αρχική σειρά συγκλίνει απολύτως.

Αν $L > 1$, επιλέγουμε q με $1 < q < L$. Τελικά $|x_{n+1}| \geq q |x_n|$, οπότε οι απόλυτες τιμές δεν τείνουν στο μηδέν. Αποτυγχάνει η αναγκαία συνθήκη σύγκλισης. $\square$

Ερμηνεία

Το κριτήριο συγκρίνει ασυμπτωτικά διαδοχικούς όρους με μια γεωμετρική ακολουθία. Αν ο λόγος σταθεροποιείται κάτω από το 1, οι όροι φθίνουν τελικά τουλάχιστον γεωμετρικά.

Προσοχή

Όταν $L = 1$, δεν συμπεραίνουμε ούτε σύγκλιση ούτε απόκλιση. Για παράδειγμα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ αποκλίνει, } \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει,}$$

αλλά και για τις δύο σειρές ο λόγος διαδοχικών όρων τείνει στο 1.

8.4.2 Παραδείγματα του κριτηρίου λόγου

Παράδειγμα 8.31. Για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, θέτουμε $x_n = 1/n!$. Τότε

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Παράδειγμα 8.32. Για

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)^2},$$

έχουμε

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = e \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 \rightarrow e > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 8.33. Για $k > 0$, εξετάζουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^k}{n!}.$$

Τότε

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^k \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Παράδειγμα 8.34. Για

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{e^n},$$

έχουμε

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{e} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Παράδειγμα 8.35 (Γεωμετρική σειρά). Για $x_n = \alpha^n$, $\alpha \neq 0$,

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = |\alpha|.$$

Το κριτήριο ανακτά τη γνωστή ταξινόμηση όταν $|\alpha| \neq 1$. Στο οριακό $|\alpha| = 1$, δεν δίνει συμπέρασμα, αλλά η αναγκαία συνθήκη δείχνει απόκλιση.

Παράδειγμα 8.36 (Περίπτώσεις όπου $L = 1$). Για την εναλλασσόμενη αρμονική σειρά και για κάθε p -σειρά,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1.$$

Το κριτήριο λόγου παραμένει σιωπηλό, μολονότι οι σειρές μπορεί να συγκλίνουν ή να αποκλίνουν.

Εμβάθυνση – Παραγοντική έναντι εκθετικής αύξησης

Για κάθε σταθερό $a \in \mathbb{R}$, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

συγκλίνει απολύτως, αφού ο λόγος είναι $|a|/(n+1) \rightarrow 0$. Αυτό δείχνει ότι το παραγοντικό αυξάνεται τελικά ταχύτερα από κάθε σταθερή εκθετική δύναμη και οδηγεί στην ανάπτυξη της e^a .

8.4.3 Εφαρμογές

Εμβάθυνση – Προεξοφλημένες ροές

Έστω ροή c_t με $|c_{t+1}/c_t| \rightarrow g$ και προεξοφλητικός παράγοντας $\beta \in (0, 1)$. Για την παρούσα αξία

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t,$$

ο λόγος των απόλυτων τιμών τείνει στο βg . Αν $\beta g < 1$, η παρούσα αξία είναι απολύτως συγκλίνουσα. Έτσι η προεξόφληση πρέπει να υπερσχύει της ασυμπτωτικής αύξησης της ροής.

Εμβάθυνση – Αναμενόμενη προεξοφλημένη ζημία

Αν μια αναμενόμενη ζημία στην περίοδο t είναι $L_t \geq 0$ και $L_{t+1}/L_t \rightarrow g$, τότε το άπειρο άθροισμα $\sum \beta^t L_t$ είναι πεπερασμένο όταν $\beta g < 1$. Η ίδια δομή εμφανίζεται σε στοχαστικό έλεγχο και ενισχυτική μάθηση.

8.5 Ασκήσεις

Άσκηση 8.37. Αποδείξτε με ολοκληρωτική σύγκριση ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει και δώστε ένα ρητό κάτω φράγμα για το n -οστό μερικό άθροισμα.

Άσκηση 8.38. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

συγκλίνει και δώστε ένα απλό άνω φράγμα για το άθροισμά της.

Άσκηση 8.39. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης για να αποφασίσετε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 1}.$$

Άσκηση 8.40. Έστω ότι $\sum x_n$ και $\sum y_n$ συγκλίνουν. Αποδείξτε από τα μερικά αθροίσματα ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3x_n - 2y_n) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} x_n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Άσκηση 8.41. Βρείτε το άθροισμα της ουράς

$$\sum_{n=20}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

και χρησιμοποιήστε το για να φράξετε το σφάλμα προσέγγισης της αντίστοιχης γεωμετρικής σειράς με τους πρώτους είκοσι όρους.

Άσκηση 8.42. Εξετάστε με το κριτήριο λόγου τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}.$$

Άσκηση 8.43. Εξηγήστε γιατί το κριτήριο λόγου δεν αποφασίζει για τις σειρές $\sum 1/n$ και $\sum 1/n^2$, και χρησιμοποιήστε άλλο αποτέλεσμα της διάλεξης για να τις ταξινομήσετε.

Άσκηση 8.44. Μια ροή πληρωμών είναι $c_t = 100(1.03)^t$ και προεξοφλείται με $\beta = 1/1.05$. Αποφασίστε αν η παρούσα αξία είναι πεπερασμένη και, αν είναι, υπολογίστε την.

Έλεγχος κατανόησης

Μετά τη μελέτη των σημειώσεων θα πρέπει να μπορείτε:

1. να συνδέετε τη σύγκλιση σειράς μη αρνητικών όρων με το φραγμένο των μερικών αθροισμάτων,
2. να αποδεικνύετε την απόκλιση της αρμονικής σειράς,
3. να ταξινομείτε τις p -σειρές,
4. να εφαρμόζετε γραμμικότητα, διάταξη και σύγκριση,
5. να υπολογίζετε ουρές και σφάλματα αποκοπής,
6. να διακρίνετε απόλυτη και υπό συνθήκη σύγκλιση,
7. να εξηγείτε την επίδραση των αναδιατάξεων,
8. να εφαρμόζετε σωστά το κριτήριο λόγου και να αναγνωρίζετε την αδυναμία του όταν $L = 1$.

Εμβάθυνση – Εκτός ύλης: η συνάρτηση ζήτα του Riemann και οι πρώτοι αριθμοί

Η ενότητα αυτή είναι πληροφοριακή και βρίσκεται εκτός του κύριου εύρους και της εξεταστέας ύλης του μαθήματος. Σκοπός της είναι να παρουσιάσει μια εντυπωσιακή σύνδεση ανάμεσα στις p -σειρές, τη μιγαδική ανάλυση και την κατανομή των πρώτων αριθμών.

Από τις p -σειρές στη συνάρτηση ζήτα. Για πραγματικό $p > 1$, η συγκλίνουσα p -σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

ορίζει έναν πραγματικό αριθμό. Η ίδια κατασκευή μπορεί να επεκταθεί σε μιγαδικούς εκθέτες.

Αν

$$s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \quad \sigma = \Re(s),$$

ορίζουμε, αρχικά για $\Re(s) > 1$, τη συνάρτηση ζήτα του Riemann με

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Επειδή

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\Re(s)}} = \frac{1}{n^{\sigma}},$$

η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $\sigma > 1$. Πράγματι, τότε συγκρίνεται με τη συγκλίνουσα πραγματική p -σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Για πραγματικό $p > 1$, έχουμε απλώς

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Για παράδειγμα,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Η περίπτωση $p = 1$ αντιστοιχεί στην αρμονική σειρά,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει. Από την άποψη της μιγαδικής συνάρτησης, αυτή η απόκλιση εμφανίζεται ως πόλος της $\zeta(s)$ στο $s = 1$.

Το γινόμενο του Euler. Η θεμελιώδης σύνδεση με τους πρώτους αριθμούς δίνεται από την ταυτότητα

$$\zeta(s) = \prod_{q \text{ πρώτος}} \frac{1}{1 - q^{-s}}, \quad \Re(s) > 1.$$

Το γράμμα q χρησιμοποιείται εδώ για τους πρώτους αριθμούς ώστε να μη συγχέεται με τον εκθέτη p μιας p -σειράς.

Για κάθε πρώτο q , η γεωμετρική σειρά δίνει

$$\frac{1}{1 - q^{-s}} = 1 + q^{-s} + q^{-2s} + q^{-3s} + \dots$$

Πολλαπλασιάζοντας τυπικά τους παράγοντες για όλους τους πρώτους, επιλέγουμε από τον παράγοντα που αντιστοιχεί στον q μια δύναμη $q^{-k_q s}$. Το αντίστοιχο γινόμενο είναι

$$\prod_q q^{-k_q s} = \left(\prod_q q^{k_q} \right)^{-s}.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής, κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο δυνάμεων πρώτων:

$$n = \prod_q q^{k_q}.$$

Επομένως, κατά την ανάπτυξη του γινομένου του Euler, κάθε όρος n^{-s} εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Η απόλυτη σύγκλιση για $\Re(s) > 1$ δικαιολογεί τις σχετικές αναδιατάξεις.

Το γινόμενο του Euler δείχνει ότι η συνάρτηση ζ συμπυκνώνει πληροφορίες για όλους τους πρώτους αριθμούς. Οι φυσικοί αριθμοί εμφανίζονται στην αθροιστική αναπαράσταση

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s},$$

ενώ οι πρώτοι αριθμοί εμφανίζονται στην πολλαπλασιαστική αναπαράσταση

$$\zeta(s) = \prod_{q \text{ πρώτος}} (1 - q^{-s})^{-1}.$$

Μια εφαρμογή: υπάρχουν άπειροι πρώτοι. Αν υπήρχαν μόνο πεπερασμένοι πρώτοι αριθμοί

$$q_1, \dots, q_m,$$

τότε το γινόμενο

$$\prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - q_j^{-s}}$$

θα παρέμενε πεπερασμένο καθώς $s \downarrow 1$. Όμως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \rightarrow +\infty \quad \text{όταν } s \downarrow 1,$$

σε συμφωνία με την απόκλιση της αρμονικής σειράς. Άρα οι πρώτοι αριθμοί δεν μπορεί να είναι πεπερασμένοι.

Πιο ισχυρά, από το γινόμενο του Euler μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{q \text{ πρώτος}} \frac{1}{q}$$

αποκλίνει. Οι πρώτοι αριθμοί γίνονται ολοένα αραιότεροι, αλλά όχι αρκετά γρήγορα ώστε να συγκλίνει το άθροισμα των αντιστρόφων τους.

Αναλυτική συνέχεια. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

ορίζει άμεσα τη $\zeta(s)$ μόνο στο ημιεπίπεδο

$$\Re(s) > 1.$$

Ωστόσο, με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης, η συνάρτηση επεκτείνεται μοναδικά σε μερόμορφη συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$, με μοναδικό πόλο στο

$$s = 1.$$

Η επέκταση αυτή ονομάζεται *αναλυτική συνέχεια*. Εκτός της περιοχής $\Re(s) > 1$, το σύμβολο $\zeta(s)$ αναφέρεται σε αυτή την αναλυτική συνέχεια και όχι αναγκαστικά στο άθροισμα της αρχικής σειράς.

Προσοχή

Για $\Re(s) \leq 1$, η ισότητα

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

δεν ισχύει γενικά με την έννοια της συνήθους σύγκλισης. Για παράδειγμα, η έκφραση

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

δεν σημαίνει ότι η σειρά

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

συγκλίνει συνήθως στο $-1/12$. Η σειρά αυτή αποκλίνει στο $+\infty$. Η τιμή $-1/12$ προκύπτει από την αναλυτική συνέχεια της ζ , δηλαδή από διαφορετική μαθηματική κατασκευή.

Τα μηδενικά της ζ . Η αναλυτικά συνεχισμένη συνάρτηση έχει τα λεγόμενα τετριμμένα μηδενικά

$$s = -2, -4, -6, \dots$$

Τα υπόλοιπα μηδενικά ονομάζονται *μη τετριμμένα*. Μπορεί να αποδειχθεί ότι βρίσκονται στην κρίσιμη λωρίδα

$$0 < \Re(s) < 1.$$

Η ευθεία

$$\Re(s) = \frac{1}{2}$$

ονομάζεται *κρίσιμη ευθεία*.

Η Υπόθεση Riemann. Η Υπόθεση Riemann, που διατυπώθηκε το 1859, δηλώνει ότι κάθε μη τετριμμένο μηδενικό της ζ βρίσκεται πάνω στην κρίσιμη ευθεία:

$$\zeta(s) = 0, \quad 0 < \Re(s) < 1 \implies \Re(s) = \frac{1}{2}.$$

Η υπόθεση έχει επιβεβαιωθεί αριθμητικά για πολύ μεγάλο πλήθος μηδενικών, αλλά δεν έχει αποδειχθεί ούτε διαψευστεί. Αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα των μαθηματικών.

Η Υπόθεση Riemann δεν ισχυρίζεται ότι οι πρώτοι αριθμοί ακολουθούν έναν απλό περιοδικό τύπο. Αφορά την ακρίβεια με την οποία μπορεί να περιγραφεί η συνολική κατανομή τους.

Η συνάρτηση καταμέτρησης των πρώτων. Ορίζουμε

$$\pi(x) = \#\{q \leq x : q \text{ είναι πρώτος}\}.$$

Η $\pi(x)$ μετρά πόσοι πρώτοι αριθμοί δεν υπερβαίνουν το x .

Το θεώρημα πρώτων αριθμών δηλώνει ότι

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ισοδύναμα,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Επομένως, η πιθανότητα ένας μεγάλος ακέραιος κοντά στο x να είναι πρώτος είναι, σε μια χαλαρή ασυμπτωτική έννοια, περίπου

$$\frac{1}{\log x}.$$

Μια ακριβέστερη προσέγγιση της $\pi(x)$ παρέχεται από το λογαριθμικό ολοκλήρωμα

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Το θεώρημα πρώτων αριθμών μπορεί να γραφτεί και ως

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x).$$

Γιατί έχουν σημασία τα μηδενικά; Υπάρχουν τύποι που εκφράζουν σταθμισμένες συναρτήσεις καταμέτρησης των πρώτων μέσω των μηδενικών

$$\rho = \beta + i\gamma$$

της ζ . Σε σχηματική μορφή, οι τύποι αυτοί έχουν τη δομή πλῆθος πρώτων μέχρι το x = ομαλός κύριος όρος - $\sum_{\rho}$ ταλαντωτικός όρος που εξαρτάται από το x^{ρ} + διορθώσεις. Επειδή

$$|x^{\rho}| = x^{\Re(\rho)} = x^{\beta},$$

το πραγματικό μέρος β ενός μηδενικού ελέγχει το μέγεθος της αντίστοιχης διακύμανσης γύρω από τον κύριο ασυμπτωτικό όρο. Αν όλα τα μη τετριμμένα μηδενικά ικανοποιούν

$$\beta = \frac{1}{2},$$

τότε οι αποκλίσεις από την ομαλή προσέγγιση είναι πολύ καλύτερα ελεγχόμενες από ό,τι θα μπορούσαν να είναι αν υπήρχαν μηδενικά κοντά στην ευθεία $\Re(s) = 1$.

Ειδικότερα, η Υπόθεση Riemann συνεπάγεται ένα ισχυρό φράγμα της μορφής

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \log x).$$

Το σύμβολο $O(\sqrt{x} \log x)$ σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ και x_0 τέτοια ώστε

$$|\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq C\sqrt{x} \log x \quad \text{για κάθε } x \geq x_0.$$

Άρα η Υπόθεση Riemann αφορά το μέγεθος του σφάλματος στην προσέγγιση της κατανομής των πρώτων και όχι μόνο τον κύριο όρο $x/\log x$.

Μια συνοπτική αλυσίδα συνδέσεων. Η σχέση ανάμεσα στις p -σειρές και τους πρώτους αριθμούς μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} p\text{-σειρές} &\longrightarrow \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \\ &\longrightarrow \zeta(s) = \prod_{q \text{ πρώτος}} (1 - q^{-s})^{-1} \\ &\longrightarrow \text{μηδενικά της } \zeta \\ &\longrightarrow \text{ακρίβεια καταμέτρησης των πρώτων αριθμών.} \end{aligned}$$

Έτσι, ένα στοιχειώδες ερώτημα σύγκλισης πραγματικών σειρών οδηγεί σε μία από τις βαθύτερες συνδέσεις μεταξύ ανάλυσης και θεωρίας αριθμών.

Κεφάλαιο 9

Στοιχειώδεις οικονομικές εφαρμογές

9.1 Οικονομικές εφαρμογές πραγματικών σειρών

9.1.1 Διακριτός χρόνος και προεξόφληση

Θεωρούμε οικονομία διακριτού χρόνου, με χρονικό δείκτη $t \in \mathbb{N}$. Η περίοδος $t = 0$ είναι η παρούσα περίοδος και οι περίοδοι $t > 0$ είναι μελλοντικές. Πολλές οικονομικές μεταβλητές παριστάνονται ως ακολουθίες και η συνολική τους επίδραση ως άθροισμα προεξοφλημένων μελλοντικών ροών.

Ορισμός 9.1 (Παρούσα αξία). Έστω $A_t \geq 0$ η πληρωμή στην περίοδο t και $R > 0$ το σταθερό επιτόκιο ανά περίοδο. Η παρούσα αξία της ροής είναι

$$PV = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t}{(1+R)^t},$$

εφόσον η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση 9.2. Αν οι πληρωμές σταματούν μετά την περίοδο T , τότε η αξία είναι το πεπερασμένο άθροισμα

$$PV_T = \sum_{t=0}^T \frac{A_t}{(1+R)^t}.$$

Η σύγκλιση γίνεται ζήτημα μόνο όταν ο ορίζοντας είναι άπειρος.

9.1.2 Αποτίμηση τίτλου και θεμελιώδης αξία

Ορισμός 9.3 (Χρηματοοικονομικός τίτλος). Ένας τίτλος περιγράφεται από ακολουθία αποδόσεων

$$(A_0, A_1, A_2, \dots), \quad A_t \geq 0.$$

Η απόδοση μπορεί να είναι μέρισμα, τόκος ή άλλη χρηματική ροή.

Ορισμός 9.4 (Θεμελιώδης αξία). Η θεμελιώδης αξία στην περίοδο 0 ορίζεται ως

$$F_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t}{(1+R)^t},$$

όταν η σειρά συγκλίνει.

Πρόταση 9.5 (Γεωμετρικά αυξανόμενες αποδόσεις). Έστω $C > 0$, $\mu > -1$ και

$$A_0 = 0, \quad A_t = C(1 + \mu)^t, \quad t \geq 1.$$

Η θεμελιώδης αξία είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν

$$\left| \frac{1 + \mu}{1 + R} \right| < 1.$$

Όταν $\mu, R \geq 0$, η συνθήκη ισοδυναμεί με $\mu < R$, και τότε

$$F_0 = \frac{C(1 + \mu)}{R - \mu}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$F_0 = C \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \mu}{1 + R} \right)^t.$$

Πρόκειται για γεωμετρική σειρά με λόγο $q = (1 + \mu)/(1 + R)$. Αν $|q| < 1$,

$$F_0 = C \frac{q}{1 - q} = \frac{C(1 + \mu)}{R - \mu}.$$

Αν $|q| \geq 1$, οι προεξοφλημένοι όροι δεν τείνουν στο μηδέν ή η σειρά ταλαντώνεται, και συνεπώς δεν συγκλίνει. $\square$

Παράδειγμα 9.6. Αν $\mu = 0$, η ροή είναι σταθερή από την περίοδο 1 και

$$F_0 = \frac{C}{R}.$$

9.1.3 Από την εξίσωση τιμολόγησης στη no-bubble condition

Η σύγκλιση της σειράς των μερισμάτων δεν είναι από μόνη της ταυτόσημη με την απουσία κερδοσκοπικής φούσκας. Για να διαχωρίσουμε τις δύο έννοιες, ξεκινάμε από τη μονοπερίοδη εξίσωση τιμολόγησης.

Ορισμός 9.7 (Μονοπερίοδη εξίσωση τιμολόγησης). Έστω P_t η τιμή του τίτλου στην περίοδο t και D_{t+1} η πληρωμή στο τέλος της επόμενης περιόδου. Με σταθερό απαιτούμενο επιτόκιο $R > 0$, γράφουμε

$$P_t = \frac{D_{t+1} + P_{t+1}}{1 + R}.$$

Πρόταση 9.8 (Προώθηση της εξίσωσης). Για κάθε $T \geq 1$,

$$P_0 = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1 + R)^t} + \frac{P_T}{(1 + R)^T}.$$

Απόδειξη. Αντικαθιστούμε επαναληπτικά την τιμή της επόμενης περιόδου:

$$P_0 = \frac{D_1}{1 + R} + \frac{P_1}{1 + R} = \frac{D_1}{1 + R} + \frac{D_2}{(1 + R)^2} + \frac{P_2}{(1 + R)^2},$$

και συνεχίζουμε έως την περίοδο T . $\square$

Ορισμός 9.9 (Primitive no-bubble condition). Η primitive no-bubble condition, ή συνθήκη μεταβατικότητας, είναι

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_T}{(1+R)^T} = 0.$$

Δηλώνει ότι η προεξοφλημένη μεταπωλητική αξία του τίτλου εξαφανίζεται στον άπειρο ορίζοντα.

Θεώρημα 9.10 (Θεμελιώδης τιμή υπό no-bubble). Αν η σειρά των προεξοφλημένων πληρωμών συγκλίνει και ισχύει η primitive no-bubble condition, τότε

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t}.$$

Απόδειξη. Λαμβάνουμε το όριο $T \rightarrow \infty$ στην ταυτότητα της προηγούμενης πρότασης. Ο τελικός όρος μηδενίζεται από τη no-bubble condition. $\square$

Ερμηνεία

Η τιμή αποτελείται από δύο δυνητικά μέρη:

$$\text{τιμή} = \text{θεμελιώδης αξία πληρωμών} + \text{φούσκα}.$$

Η no-bubble condition αποκλείει το δεύτερο μέρος. Δεν είναι απλώς ένα τεχνικό κριτήριο σύγκλισης της σειράς των πληρωμών.

Η συνιστώσα της φούσκας

Πρόταση 9.11. Έστω F_t η θεμελιώδης αξία των πληρωμών από την περίοδο $t+1$ και μετά, και ορίστε

$$B_t = P_t - F_t.$$

Αν τόσο η τιμή όσο και η θεμελιώδης αξία ικανοποιούν την ίδια μονοπερίοδη εξίσωση, τότε

$$B_{t+1} = (1+R)B_t, \quad B_t = (1+R)^t B_0.$$

Απόδειξη. Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις τιμολόγησης, οι πληρωμές ακυρώνονται και μένει $B_t = B_{t+1}/(1+R)$. $\square$

Πόρισμα 9.12. Αν $B_0 \neq 0$, τότε

$$\frac{B_T}{(1+R)^T} = B_0$$

για κάθε T , οπότε η no-bubble condition αποτυγχάνει. Αν ισχύει η no-bubble condition, αναγκαστικά $B_0 = 0$.

Επαρκείς πρωτογενείς συνθήκες

Πρόταση 9.13 (Ρυθμός αύξησης μικρότερος από την προεξόφληση). Αν υπάρχουν $K > 0$ και $g < R$ τέτοια ώστε

$$0 \leq P_T \leq K(1+g)^T$$

για κάθε αρκετά μεγάλο T , τότε ισχύει η primitive no-bubble condition.

Απόδειξη. Έχουμε

$$0 \leq \frac{P_T}{(1+R)^T} \leq K \left(\frac{1+g}{1+R} \right)^T \rightarrow 0.$$

□

Προσοχή

Η συνθήκη $\mu < R$ στο παράδειγμα των μερισμάτων εξασφαλίζει ότι η θεμελιώδης αξία των μερισμάτων είναι πεπερασμένη. Η no-bubble condition αφορά επιπλέον την ίδια την πορεία των τιμών P_T . Οι δύο συνθήκες συνδέονται, αλλά δεν είναι λογικά ταυτόσημες.

Εμβάθυνση – Στοχαστική γενίκευση

Σε υποδείγματα με αβεβαιότητα, η συνθήκη γράφεται συνήθως με στοχαστικό προ-εξοφλητικό παράγοντα $M_{0,T}$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0[M_{0,T} P_T] = 0.$$

Η οικονομική ιδέα παραμένει ίδια: καμία θετική σημερινή αξία δεν πρέπει να στηρίζεται αποκλειστικά στη δυνατότητα μεταπώλησης όλο και μακρύτερα στο μέλλον.

9.1.4 Δημιουργία χρήματος και γεωμετρική σειρά

Θεωρούμε ένα απλουστευμένο τραπεζικό σύστημα κλασματικών διαθεσίμων. Η Κεντρική Τράπεζα δημιουργεί αρχική νομισματική βάση $C > 0$, η οποία κατατίθεται σε εμπορική τράπεζα. Οι τράπεζες διακρατούν ποσοστό $\alpha \in [0, 1]$ κάθε νέας κατάθεσης ως αποθεματικό και δανείζουν το υπόλοιπο $1 - \alpha$.

Παρατήρηση 9.14 (Υποθέσεις του απλού υποδείγματος). Ο πολλαπλασιαστής $1/\alpha$ απαιτεί:

- (i) ενιαίο και σταθερό ποσοστό αποθεματικών α ,
- (ii) μηδενικά πλεονάζοντα αποθεματικά,
- (iii) πλήρη επανακατάθεση κάθε νέου δανείου στο τραπεζικό σύστημα,
- (iv) μηδενική διαρροή προς μετρητά,
- (v) επαρκή ζήτηση και προσφορά δανείων.

Οι υποθέσεις είναι σκόπιμα ισχυρές και περιγράφουν έναν λογιστικό μηχανισμό, όχι πλήρες εμπειρικό μοντέλο τραπεζικής συμπεριφοράς.

Η ακολουθία των νέων καταθέσεων

Η αρχική κατάθεση είναι C . Μετά τον πρώτο γύρο, το νέο δάνειο και η επόμενη κατάθεση είναι $(1 - \alpha)C$. Μετά τον δεύτερο γύρο είναι $(1 - \alpha)^2 C$. Άρα οι νέες καταθέσεις είναι

$$C, (1 - \alpha)C, (1 - \alpha)^2 C, \dots$$

και το σωρευτικό σύνολο μετά τον γύρο T είναι

$$M_T = C \sum_{t=0}^T (1 - \alpha)^t.$$

Πρόταση 9.15 (Πεπερασμένος πολλαπλασιασμός). Για $\alpha \in (0, 1]$,

$$M_T = C \frac{1 - (1 - \alpha)^{T+1}}{\alpha}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον τύπο του πεπερασμένου γεωμετρικού αθροίσματος με λόγο $q = 1 - \alpha$. □

Θεώρημα 9.16 (Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής καταθέσεων). Αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε

$$M = \lim_{T \rightarrow \infty} M_T = \frac{C}{\alpha}.$$

Ο πολλαπλασιαστής ως προς την αρχική βάση είναι

$$m = \frac{M}{C} = \frac{1}{\alpha}.$$

Απόδειξη. Επειδή $0 \leq 1 - \alpha < 1$, έχουμε $(1 - \alpha)^{T+1} \rightarrow 0$. Το αποτέλεσμα ακολουθεί από τον πεπερασμένο τύπο. □

Προσέγγιση και σφάλμα ουράς

Πρόταση 9.17 (Απόλυτο και σχετικό σφάλμα). Για $0 < \alpha \leq 1$, το ποσό που δεν έχει ακόμη δημιουργηθεί μετά τον γύρο T είναι

$$E_T = M - M_T = \frac{C(1 - \alpha)^{T+1}}{\alpha}.$$

Το σχετικό σφάλμα ως προς το τελικό σύνολο είναι

$$\frac{E_T}{M} = (1 - \alpha)^{T+1}.$$

Απόδειξη. Αφαιρούμε τον πεπερασμένο τύπο από το όριο $M = C/\alpha$, ή ισοδύναμα υπολογίζουμε τη γεωμετρική ουρά

$$C \sum_{t=T+1}^{\infty} (1 - \alpha)^t.$$

□

Πόρισμα 9.18 (Αριθμός γύρων για δεδομένη ακρίβεια). Για επιθυμητό σχετικό σφάλμα $0 < \varepsilon < 1$, αρκεί να επιλέξουμε T ώστε

$$(1 - \alpha)^{T+1} \leq \varepsilon.$$

Για $0 < \alpha < 1$, αυτό ισοδυναμεί με

$$T + 1 \geq \frac{\log \varepsilon}{\log(1 - \alpha)}.$$

Παράδειγμα 9.19. Αν $C = 100$ και $\alpha = 0.10$, τότε το θεωρητικό τελικό σύνολο καταθέσεων είναι $M = 1000$. Μετά τον γύρο $T = 20$,

$$M_{20} = 1000(1 - 0.9^{21}) \approx 890.58,$$

ενώ το υπόλοιπο είναι περίπου 109.42, δηλαδή 10.94% του τελικού συνόλου. Για σχετικό σφάλμα κάτω από 1% απαιτούνται τουλάχιστον 44 γύροι, δηλαδή $T \geq 43$.

Παρατήρηση 9.20 (Οριακές περιπτώσεις). Αν $\alpha = 1$, δεν πραγματοποιείται νέος δανεισμός και $M = C$. Αν $\alpha = 0$, ο ιδεατός μηχανισμός δίνει $M_T = C(T + 1)$, που δεν είναι φραγμένο. Η απόκλιση υποδεικνύει ότι χωρίς διαρροή ή θετικό περιορισμό αποθεματικών το απλό υπόδειγμα δεν παράγει πεπερασμένο πολλαπλασιαστή.

Εμβάθυνση – Διαρροή προς μετρητά και πλεονάζοντα αποθεματικά

Αν, σε κάθε γύρο, μόνο ένα σταθερό ποσοστό $q \in [0, 1)$ της προηγούμενης κατάθεσης επιστρέφει ως νέα κατάθεση, τότε

$$M = C \sum_{t=0}^{\infty} q^t = \frac{C}{1-q}.$$

Ο βασικός τύπος αντιστοιχεί στο $q = 1 - \alpha$. Διαρροές προς μετρητά ή πλεονάζοντα αποθεματικά μειώνουν το q και συνεπώς τον πραγματικό πολλαπλασιαστή.

Εμβάθυνση – Οικονομικές εφαρμογές των p -σειρών

Οι p -σειρές εμφανίζονται φυσικά σε οικονομικά υποδείγματα στα οποία η επίδραση του χρόνου, του μεγέθους ή της κατάταξης φθίνει σύμφωνα με έναν νόμο δύναμης. Σε αντίθεση με τη γεωμετρική φθορά, η οποία είναι εκθετικά γρήγορη, η φθορά της μορφής

$$\frac{1}{(n+1)^p}$$

είναι πολύ βραδύτερη και μπορεί να δημιουργήσει σημαντικές μακροχρόνιες επιδράσεις.

Προεξόφληση άπειρου ορίζοντα με νόμο δύναμης

Έστω μια μη αρνητική ροή απολαβών

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

και συντελεστές προεξόφλησης

$$D_t = \frac{1}{(t+1)^p}, \quad p > 0.$$

Η συνολική προεξοφλημένη αξία είναι

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u_t}{(t+1)^p}.$$

Αν η ροή είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 \leq u_t \leq M \quad \text{για κάθε } t,$$

τότε

$$0 \leq \frac{u_t}{(t+1)^p} \leq \frac{M}{(t+1)^p}.$$

Επομένως, αν $p > 1$, το κριτήριο σύγκρισης δίνει

$$V \leq M \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^p} = M\zeta(p) < \infty.$$

Άρα:

$$p > 1 \implies \text{κάθε μη αρνητική φραγμένη ροή έχει πεπερασμένη αξία.}$$

Αντίθετα, αν η απολαβή είναι σταθερή και θετική,

$$u_t = \bar{u} > 0,$$

τότε

$$V = \bar{u} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^p}.$$

Συνεπώς

$$V \begin{cases} < \infty, & p > 1, \\ = +\infty, & 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

Το κατώφλι $p = 1$ αποκτά επομένως άμεση οικονομική ερμηνεία. Αν η προεξόφληση μειώνεται πολύ αργά, ακόμη και μια σταθερή περιοδική απολαβή έχει άπειρη συνολική αξία.

Σύγκριση με την εκθετική προεξόφληση

Στη συνήθη εκθετική προεξόφληση χρησιμοποιούμε

$$D_t = \beta^t, \quad 0 < \beta < 1.$$

Τότε

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \frac{1}{1-\beta} < \infty.$$

Η εκθετική προεξόφληση εξασφαλίζει επομένως πεπερασμένη αξία κάθε φραγμένης ροής.

Με προεξόφληση νόμου δύναμης,

$$D_t = (t+1)^{-p},$$

η σχετική βαρύτητα δύο διαδοχικών περιόδων είναι

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} = \left(\frac{t+1}{t+2} \right)^p.$$

Καθώς $t \rightarrow \infty$,

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} \rightarrow 1.$$

Άρα η επιπλέον προεξόφληση μεταξύ δύο πολύ μακρινών περιόδων γίνεται ολοένα ασθενέστερη.

Αντίθετα, στην εκθετική περίπτωση,

$$\frac{D_{t+1}}{D_t} = \beta$$

για κάθε t . Η σχετική υποτίμηση της επόμενης περιόδου παραμένει σταθερή.

Η προεξόφληση νόμου δύναμης αποτελεί μορφή φθίνουσας ανυπομονησίας: ο οικονομικός φορέας διακρίνει έντονα το παρόν από το εγγύς μέλλον, αλλά διακρίνει πολύ λιγότερο δύο περιόδους που βρίσκονται και οι δύο στο μακρινό μέλλον.

Παρατήρηση 9.21 (Χρονική συνέπεια). Αν ένας οικονομικός φορέας επανυπολογίζει σε κάθε ημερομηνία τις προτιμήσεις του χρησιμοποιώντας την ίδια συνάρτηση της χρονικής απόστασης

$$D(\tau) = \frac{1}{(1 + \tau)^p},$$

οι σχετικές αξιολογήσεις μελλοντικών επιλογών μπορεί να αλλάζουν καθώς περνά ο χρόνος. Η εκθετική προεξόφληση έχει τη διακριτή ιδιότητα

$$D(t + s) = D(t)D(s),$$

ενώ η προεξόφληση νόμου δύναμης δεν την έχει γενικά. Για τον λόγο αυτό μπορεί να εμφανιστεί χρονική ασυνέπεια.

Παράδειγμα: η αξία μιας μόνιμης περιβαλλοντικής ζημίας

Έστω ότι μια οικονομική δραστηριότητα δημιουργεί σταθερή κοινωνική ζημία $d > 0$ σε κάθε μελλοντική περίοδο. Με προεξόφληση νόμου δύναμης, η παρούσα αξία της ζημίας είναι

$$C(p) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d}{(t+1)^p} = d\zeta(p).$$

Αν $p > 1$, τότε

$$C(p) < \infty.$$

Αν $0 < p \leq 1$, τότε

$$C(p) = +\infty.$$

Επομένως η επιλογή του εκθέτη δεν αποτελεί απλή τεχνική λεπτομέρεια. Καθορίζει αν μια μόνιμη, έστω και μικρή, ζημία έχει πεπερασμένη ή άπειρη κοινωνική αποτίμηση. Το ζήτημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε εφαρμογές κλιματικής πολιτικής και διαγενεακής ευημερίας, όπου οι επιπτώσεις εκτείνονται σε πολύ μεγάλο χρονικό ορίζοντα.

Προσοχή

Η απόκλιση της προεξοφλημένης σειράς δεν σημαίνει ότι μια πολιτική έχει κυριολεκτικά «άπειρο χρηματικό κόστος». Σημαίνει ότι το συγκεκριμένο μαθηματικό κριτήριο δεν αποδίδει πεπερασμένη συνολική αξία στη ροή. Το υπόδειγμα ή το κριτήριο ευημερίας χρειάζεται τότε πρόσθετη κανονικοποίηση ή διαφορετική διατύπωση.

Εμβάθυνση – Κατανομές Pareto–Zipf και ύπαρξη ροπών

Οι p -σειρές εμφανίζονται επίσης σε διακριτές κατανομές νόμου δύναμης. Έστω ότι μια θετική ακέραια τυχαία μεταβλητή X έχει πιθανότητες της μορφής

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{C}{n^p}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Για να πρόκειται για κατανομή πιθανότητας, πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

Άρα απαιτείται

$$C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1.$$

Η κανονικοποίηση είναι δυνατή αν και μόνο αν $p > 1$, οπότε

$$C = \frac{1}{\zeta(p)}$$

και

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(p)n^p}.$$

Η αναμενόμενη τιμή είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) \\ &= \frac{1}{\zeta(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^p} \\ &= \frac{1}{\zeta(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff p - 1 > 1 \iff p > 2.$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathbb{P}(X = n) \\ &= \frac{1}{\zeta(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-2}}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbb{E}[X^2] < \infty \iff p > 3.$$

Συνεπώς η διακύμανση είναι πεπερασμένη ακριβώς όταν $p > 3$.

Συνοψίζοντας:

Τιμές του p	Ιδιότητες
$0 < p \leq 1$	δεν μπορεί να κανονικοποιηθεί η κατανομή
$1 < p \leq 2$	υπάρχει κατανομή, αλλά $\mathbb{E}[X] = +\infty$
$2 < p \leq 3$	$\mathbb{E}[X] < \infty$, $\text{Var}(X) = +\infty$
$p > 3$	$\mathbb{E}[X] < \infty$, $\text{Var}(X) < \infty$

Κατανομές αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται ως απλουστευτικά υποδείγματα για μεγέθη επιχειρήσεων, πόλεων, περιουσιών, δικτύων και ακραίων οικονομικών απωλειών. Ένας σχετικά μικρός εκθέτης παράγει βαριά ουρά: πολύ μεγάλες παρατηρήσεις παραμένουν σπάνιες, αλλά όχι αρκετά σπάνιες ώστε όλες οι ροπές να είναι πεπερασμένες.

Παρατήρηση 9.22 (Νόμος του Zipf). Στην εμπειρική μελέτη μεγεθών πόλεων ή επιχειρήσεων εμφανίζεται συχνά μια σχέση κατάταξης της μορφής

$$S_r \approx Cr^{-\alpha},$$

όπου S_r είναι το μέγεθος της μονάδας με κατάταξη r . Το άθροισμα των μεγεθών

$$\sum_{r=1}^{\infty} S_r$$

συμπεριφέρεται τότε όπως η p -σειρά

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{\alpha}}.$$

Στο οριακό καθεστώς $\alpha = 1$, η αρμονική απόκλιση δείχνει ότι μια ακριβής σχέση Zipf δεν μπορεί να επεκτείνεται χωρίς περιορισμό σε άπειρο πλήθος μονάδων με σταθερό συντελεστή C και ταυτόχρονα να έχει πεπερασμένο συνολικό μέγεθος.

Εμβάθυνση – Εκτός ύλης: βραδεία μεταβολή και αβελιανά-ταουμπεριανά θεωρήματα

Η ενότητα αυτή είναι πληροφοριακή και βρίσκεται εκτός του κύριου εύρους και της εξεταστέας ύλης του μαθήματος. Παρουσιάζει, σε απλή μορφή, ορισμένα αποτελέσματα που επιτρέπουν όχι μόνο να αποφασίζουμε αν μια σειρά συγκλίνει, αλλά και να υπολογίζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων ή των ουρών της.

Ασυμπτωτική ισοδυναμία

Ορισμός 9.23 (Ασυμπτωτική ισοδυναμία). Για δύο θετικές συναρτήσεις f, g , γράφουμε

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Αντίστοιχα, για δύο θετικές ακολουθίες (a_n) και (b_n) , γράφουμε

$$a_n \sim b_n$$

αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Η σχέση $a_n \sim b_n$ είναι ισχυρότερη από το να έχουν οι δύο ακολουθίες απλώς την ίδια τάξη μεγέθους. Προσδιορίζει και την ασυμπτωτική πολλαπλασιαστική σταθερά.

Βραδέως μεταβαλλόμενες συναρτήσεις

Ορισμός 9.24 (Βραδεία μεταβολή στο άπειρο). Μια μετρήσιμη θετική συνάρτηση

$$L : [x_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

λέγεται βραδέως μεταβαλλόμενη στο άπειρο αν, για κάθε σταθερά $\lambda > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Η ιδιότητα δηλώνει ότι ο πολλαπλασιασμός του επιχειρήματος με μια σταθερά δεν μεταβάλλει ασυμπτωτικά τη συνάρτηση σε σχετικούς όρους.

Παράδειγμα 9.25. Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι βραδέως μεταβαλλόμενες:

$$L(x) = C, \quad C > 0,$$

$$L(x) = (\log x)^q, \quad q \in \mathbb{R},$$

$$L(x) = (\log x)^q (\log \log x)^r,$$

και, γενικότερα, πεπερασμένα γινόμενα δυνάμεων διαδοχικών λογαρίθμων, όταν τα επιχειρήματα είναι αρκετά μεγάλα.

Για παράδειγμα,

$$\frac{\log(\lambda x)}{\log x} = 1 + \frac{\log \lambda}{\log x} \rightarrow 1.$$

Παράδειγμα 9.26 (Μια συνάρτηση που δεν μεταβάλλεται βραδέως). Η συνάρτηση

$$L(x) = x^\gamma, \quad \gamma \neq 0,$$

δεν είναι βραδέως μεταβαλλόμενη, επειδή

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \lambda^\gamma,$$

το οποίο δεν τείνει στο 1 για κάθε $\lambda > 0$.

Κανονική μεταβολή

Ορισμός 9.27 (Κανονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση). Μια θετική συνάρτηση f λέγεται κανονικά μεταβαλλόμενη με δείκτη $\rho \in \mathbb{R}$ αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\rho \quad \text{για κάθε } \lambda > 0.$$

Μια τέτοια συνάρτηση γράφεται, υπό ήπιες τεχνικές προϋποθέσεις, ως

$$f(x) = x^\rho L(x),$$

όπου η L μεταβάλλεται βραδέως. Ο όρος x^ρ δίνει τον κύριο ρυθμό μεταβολής, ενώ η $L(x)$ παρέχει μια βραδεία διόρθωση.

Παραδείγματα είναι

$$x^\rho (\log x)^q, \quad x^\rho (\log x)^q (\log \log x)^r.$$

Ασυμπτωτική παραγοντοποίηση μερικών αθροισμάτων

Έστω

$$a_n = n^\rho L(n),$$

όπου η L είναι θετική και βραδέως μεταβαλλόμενη. Υπό τις συνήθεις υποθέσεις κανονικότητας, αν

$$\rho > -1,$$

τότε μια διακριτή μορφή του θεωρήματος του Karamata δίνει

$$\sum_{k=1}^n k^{\rho} L(k) \sim \frac{n^{\rho+1} L(n)}{\rho+1}.$$

Η σχέση μπορεί να γραφτεί και ως

$$\sum_{k=1}^n k^{\rho} L(k) \sim L(n) \sum_{k=1}^n k^{\rho},$$

επειδή

$$\sum_{k=1}^n k^{\rho} \sim \frac{n^{\rho+1}}{\rho+1}.$$

Αυτή είναι η επιθυμητή ασυμπτωτική παραγοντοποίηση: παρότι το $L(k)$ μεταβάλλεται μέσα στο άθροισμα, μεταβάλλεται αρκετά αργά ώστε, στην πρώτη ασυμπτωτική τάξη, να μπορεί να αντικατασταθεί από την τελική τιμή $L(n)$.

Παράδειγμα 9.28. Για $\rho > -1$ και $q \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=2}^n k^{\rho} (\log k)^q \sim \frac{n^{\rho+1} (\log n)^q}{\rho+1}.$$

Ειδικότερα,

$$\sum_{k=2}^n \log k \sim n \log n.$$

Η ακριβέστερη σχέση

$$\log(n!) = n \log n - n + O(\log n)$$

απαιτεί ισχυρότερη ανάλυση, αλλά ο κύριος όρος προκύπτει ήδη από τη βραδεία μεταβολή του $\log x$.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά των ουρών

Αν

$$a_n = n^{\rho} L(n)$$

και

$$\rho < -1,$$

τότε η σειρά συγκλίνει και η ουρά της ικανοποιεί

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\rho} L(k) \sim -\frac{n^{\rho+1} L(n)}{\rho+1}.$$

Γράφοντας

$$\rho = -p, \quad p > 1,$$

παίρνουμε την ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{L(k)}{k^p} \sim \frac{L(n)}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Άρα το ακριβές σφάλμα αποκοπής μιας σειράς με όρους $L(n)/n^p$ μπορεί να προσεγγιστεί από έναν απλό τύπο.

Παράδειγμα 9.29 (Λογαριθμική διόρθωση μιας p -σειράς). Για $p > 1$ και $q \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\log k)^q}{k^p} \sim \frac{(\log n)^q}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Η λογαριθμική συνιστώσα εμφανίζεται στην ουρά ουσιαστικά ως πολλαπλασιαστικός παράγοντας αξιολογημένος στο σημείο αποκοπής n .

Παράδειγμα 9.30. Για

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^2},$$

το υπόλοιπο μετά τον n -οστό όρο ικανοποιεί

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \sim \frac{\log n}{n}.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει, αλλά το σφάλμα αποκοπής περιέχει έναν λογαριθμικό παράγοντα και φθίνει βραδύτερα από το $1/n$.

Το κρίσιμο σύνορο $\rho = -1$

Οι προηγούμενοι τύποι δεν εφαρμόζονται απευθείας όταν

$$\rho = -1.$$

Στην κρίσιμη αυτή περίπτωση, η βραδέως μεταβαλλόμενη συνιστώσα μπορεί να καθορίσει αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

Το βασικό παράδειγμα είναι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^q}.$$

Από το κριτήριο του ολοκληρώματος,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^q} \begin{cases} \text{συγκλίνει,} & q > 1, \\ \text{αποκλίνει,} & q \leq 1. \end{cases}$$

Όταν $q > 1$, η ουρά ικανοποιεί

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^q} \sim \frac{1}{(q-1)(\log n)^{q-1}}.$$

Όταν $q = 1$, τα μερικά αθροίσματα αυξάνονται με εξαιρετικά αργό ρυθμό:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} \sim \log \log n.$$

Επομένως, μακριά από το κρίσιμο εκθετικό κατώφλι, ο όρος n^ρ κυριαρχεί στην ταξινόμηση. Ακριβώς στο κατώφλι, όμως, ακόμη και μια λογαριθμική διόρθωση μπορεί να αλλάξει τη σύγκλιση.

Αβελιανή κατεύθυνση

Έστω μια ακολουθία (a_n) και η γεννήτριά της

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad 0 \leq r < 1.$$

Ένα αβελιανό θεώρημα ξεκινά από πληροφορίες για τους συντελεστές ή τα μερικά άθροισμα και εξάγει πληροφορίες για τη συμπεριφορά της $A(r)$ καθώς

$$r \uparrow 1.$$

Μια βασική περίπτωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 9.31 (Αβελιανό θεώρημα για κανονικά μεταβαλλόμενους όρους). Έστω $\rho > 0$, $C > 0$ και L θετική, βραδέως μεταβαλλόμενη. Αν

$$a_n \sim Cn^{\rho-1}L(n),$$

τότε

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \sim C\Gamma(\rho)(1-r)^{-\rho}L\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

καθώς $r \uparrow 1$.

Η ποσότητα

$$\frac{1}{1-r}$$

λειτουργεί ως ο αποτελεσματικός αριθμός όρων που συμβάλλουν ουσιαστικά στο άθροισμα. Η βραδέως μεταβαλλόμενη συνιστώσα μεταφέρεται από το $L(n)$ στο

$$L\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Παράδειγμα 9.32. Αν

$$a_n = (\log(n+1))^q,$$

τότε, σχηματικά,

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (\log(n+1))^q r^n \sim \frac{1}{1-r} \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^q.$$

Εδώ έχουμε $\rho = 1$ και $\Gamma(1) = 1$.

Παράδειγμα 9.33. Αν

$$a_n \sim n^{\rho-1}, \quad \rho > 0,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sim \Gamma(\rho)(1-r)^{-\rho}.$$

Η δύναμη αύξησης των συντελεστών μετατρέπεται σε δύναμη της ιδιομορφίας της γεννήτριάς στο $r = 1$.

Ταουμπεριανή κατεύθυνση

Ένα ταουμπεριανό θεώρημα επιχειρεί την αντίστροφη μετάβαση: ξεκινά από τη συμπεριφορά της γεννήτριας $A(r)$ κοντά στο $r = 1$ και εξάγει πληροφορίες για τους συντελεστές ή τα μερικά αθροίσματα.

Η αντίστροφη κατεύθυνση απαιτεί πρόσθετες υποθέσεις. Η συμπεριφορά μιας αναλυτικής συνάρτησης κοντά στο σύνορο δεν αρκεί πάντοτε για να ελέγξει ισχυρές ταλαντώσεις ή ακυρώσεις των συντελεστών της.

Θεώρημα 9.34 (Ταουμπεριανή μορφή Hardy–Littlewood–Karamata). Έστω

$$a_n \geq 0, \quad A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n,$$

και έστω $\rho > 0$. Αν

$$A(r) \sim C(1-r)^{-\rho} L\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

καθώς $r \uparrow 1$, όπου $C > 0$ και L είναι βραδέως μεταβαλλόμενη, τότε τα μερικά αθροίσματα ικανοποιούν

$$\sum_{k=0}^n a_k \sim \frac{C}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n).$$

Η μη αρνητικότητα των συντελεστών εμποδίζει τις ακυρώσεις. Χωρίς κάποια τέτοια ταουμπεριανή υπόθεση, η συμπεριφορά της $A(r)$ μπορεί να μην προσδιορίζει τη συμπεριφορά των μερικών αθροισμάτων.

Αν επιπλέον οι συντελεστές έχουν κατάλληλη τελική μονοτονία, ένα θεώρημα μονοτονικής πυκνότητας επιτρέπει σε πολλές περιπτώσεις να περάσουμε από τα μερικά αθροίσματα στους ίδιους τους συντελεστές:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sim \frac{C}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n)$$

συνεπάγεται

$$a_n \sim \frac{C}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n).$$

Η πρόσθετη υπόθεση μονοτονίας είναι ουσιώδης. Τα μερικά αθροίσματα μπορεί να έχουν ομαλή ασυμπτωτική συμπεριφορά ακόμη και όταν οι μεμονωμένοι όροι ταλαντώνονται έντονα.

Αβελιανά και ταουμπεριανά θεωρήματα

Η λογική των δύο κατευθύνσεων μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

συντελεστές ή μερικά αθροίσματα	$\xrightarrow{\text{Αβελιανό}}$	γεννήτρια κοντά στο σύνορο
συντελεστές ή μερικά αθροίσματα	$\xleftarrow{\text{Ταουμπεριανό} + \text{πρόσθετες υποθέσεις}}$	γεννήτρια κοντά στο σύνορο.

Τα αβελιανά θεωρήματα συνήθως μεταφέρουν γνωστή ασυμπτωτική πληροφορία προς μια εξομαλυμένη ή αναλυτική αναπαράσταση. Τα ταουμπεριανά θεωρήματα ανακτούν πληροφορία από αυτή την εξομαλυμένη αναπαράσταση, αλλά χρειάζονται υποθέσεις που αποκλείουν ακραίες ταλαντώσεις.

Σχέση με το κλασικό θεώρημα του Abel

Αν η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει στο S , το κλασικό θεώρημα του Abel δίνει

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = S.$$

Αυτή είναι επίσης αβελιανή κατεύθυνση: από τη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων περνάμε στη συνοριακή συμπεριφορά της γεννήτριας.

Ένα ταουμπεριανό ερώτημα είναι το αντίστροφο:

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = S \quad \stackrel{?}{\implies} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

Η συνεπαγωγή δεν ισχύει χωρίς πρόσθετη υπόθεση. Ένα κλασικό θεώρημα του Tauber δηλώνει ότι ισχύει αν, για παράδειγμα,

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ισχυρότερες εκδοχές αντικαθιστούν αυτή την υπόθεση με άλλους ελέγχους της ταλάντωσης των συντελεστών.

Οικονομική ερμηνεία: βραδέως φθίνουσες επιδράσεις

Έστω ότι μια μοναδιαία διαταραχή έχει επίδραση στην περίοδο n ίση με

$$h_n = \frac{L(n)}{n^p},$$

όπου η L μεταβάλλεται βραδέως. Η συνολική μακροχρόνια επίδραση είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

Αν $p > 1$, η συνολική επίδραση είναι πεπερασμένη και η επίδραση που παραμένει μετά την περίοδο N ικανοποιεί

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} h_n \sim \frac{L(N)}{(p-1)N^{p-1}}.$$

Αν $0 < p < 1$, τα μερικά αθροίσματα αυξάνονται ως

$$\sum_{n=1}^N h_n \sim \frac{N^{1-p} L(N)}{1-p}.$$

Παρότι κάθε μεμονωμένη επίδραση h_n τείνει στο μηδέν, η σωρευτική επίδραση δεν σταθεροποιείται.

Στην κρίσιμη περίπτωση $p = 1$, η ακριβής μορφή της L καθορίζει το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα,

$$h_n = \frac{1}{n \log n}$$

οδηγεί σε απόκλιση, ενώ

$$h_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$$

οδηγεί σε σύγκλιση.

Τέτοιες ακολουθίες εμφανίζονται σε υποδείγματα:

- μακράς μνήμης,
- σταδιακής διάχυσης πληροφορίας,
- επίμονων τεχνολογικών ή δημοσιονομικών διαταραχών,
- δικτυακών επιδράσεων,
- βραδέως φθινόντων συντελεστών προεξόφλησης,
- και κατανομών με βαριές ουρές.

Η διάκριση μεταξύ $p > 1$, $p < 1$ και $p = 1$ εκφράζει επομένως αν μια φθίνουσα επίδραση είναι συνολικά παροδική ή αν αφήνει απεριόριστα αυξανόμενο σωρευτικό αποτύπωμα.

Συνοπτική εικόνα

Για όρους της μορφής

$$a_n = n^\rho L(n),$$

όπου η L μεταβάλλεται βραδέως, ισχύει σχηματικά:

Δείκτης	Κύρια συμπεριφορά
$\rho > -1$	$\sum_{k \leq n} a_k \sim \frac{n^{\rho+1} L(n)}{\rho + 1}$
$\rho < -1$	$\sum_{k > n} a_k \sim -\frac{n^{\rho+1} L(n)}{\rho + 1}$
$\rho = -1$	κρίσιμη περίπτωση: απαιτείται λεπτομερέστερη μελέτη της L

Η βραδεία μεταβολή επιτρέπει, μακριά από την κρίσιμη περίπτωση, την ασυμπτωτική εξαγωγή του παράγοντα L από τη σειρά. Τα αβελιανά θεωρήματα μεταφέρουν αυτή την πληροφορία στις γεννήτριες συναρτήσεις, ενώ τα ταουμπεριανά θεωρήματα επιτρέπουν, με πρόσθετες υποθέσεις, την αντίστροφη ανάκτηση της συμπεριφοράς των συντελεστών.

Κεφάλαιο 10

Ακολουθίες συναρτήσεων

10.1 Ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων

10.1.1 Από τις πραγματικές ακολουθίες σε γενικότερα στοιχεία

Μια πραγματική ακολουθία είναι απεικόνιση

$$x : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n.$$

Η ουσιαστική γενίκευση δεν είναι να αλλάξουμε τον τρόπο δεικτοδότησης, αλλά το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι όροι. Για οποιοδήποτε σύνολο E , μια ακολουθία με τιμές στο E είναι

$$x : \mathbb{N}_0 \rightarrow E, \quad n \mapsto x_n.$$

Ακολουθίες διανυσμάτων

Αν $E = \mathbb{R}^d$, κάθε όρος είναι διάνυσμα

$$x_n = (x_{n1}, \dots, x_{nd}).$$

Η συνολική ακολουθία μπορεί να παρασταθεί ως μήτρα με αριθμήσιμα άπειρες γραμμές και d στήλες:

$$\begin{pmatrix} x_{01} & \cdots & x_{0d} \\ x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ x_{21} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Η σύγκλιση $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^d$ ισοδυναμεί με τη σύγκλιση κάθε συντεταγμένης $x_{nj} \rightarrow x_j$. Στα οικονομικά, το x_n μπορεί να είναι διάνυσμα τιμών ή ποσοτήτων στην περίοδο n . Στη μηχανική μάθηση μπορεί να είναι η παράμετρος ενός επαναληπτικού αλγορίθμου.

Ακολουθίες πραγματικών ακολουθιών και διπλές ακολουθίες

Αν $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, κάθε όρος x_n είναι ο ίδιος πραγματική ακολουθία:

$$x_n = (x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \dots).$$

Έτσι προκύπτει οικογένεια

$$(x_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2},$$

δηλαδή διπλή ακολουθία ή άπειρος πίνακας. Τώρα υπάρχουν διαφορετικές έννοιες ορίου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{nm}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nm},$$

καθώς και κοινό όριο όταν (n, m) τείνει στο άπειρο. Τα διαδοχικά όρια δεν είναι πάντοτε ίσα.

Παρατήρηση 10.1 (Δείκτες στο $\mathbb{Z}$). Η αντικατάσταση του $\mathbb{N}_0$ από το $\mathbb{Z}$ δίνει διπλής κατεύθυνσης ακολουθία

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots).$$

Η έννοια της διπλής ακολουθίας προκύπτει όταν το σύνολο δεικτών είναι $\mathbb{N}_0^2$ ή $\mathbb{Z}^2$, όχι απλώς το $\mathbb{Z}$. Οι δύο κατασκευές μπορούν να συνδυαστούν σε $(x_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$.

Ακολουθίες συναρτήσεων ως η ενιαία κατασκευή

Αν $E = \mathbb{R}^X$, δηλαδή το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων στο X , τότε

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^X, \quad n \mapsto f_n,$$

είναι ακολουθία συναρτήσεων. Για κάθε $x \in X$, η αξιολόγηση

$$(f_n(x))_{n \geq 0}$$

είναι πραγματική ακολουθία. Οι ακολουθίες διανυσμάτων και οι διπλές ακολουθίες είναι ειδικές περιπτώσεις:

$$\mathbb{R}^d = \{f : \{1, \dots, d\} \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \{f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Εμβάθυνση – στοχαστικές διαδικασίες και χρονοσειρές

Αν οι «συναρτησιακοί όροι» είναι τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, τότε μια οικογένεια

$$(X_t)_{t \in T}, \quad X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

είναι στοχαστική διαδικασία. Για $T = \mathbb{Z}$ ή $T = \mathbb{N}_0$ έχουμε διακριτού χρόνου διαδικασία, το βασικό μαθηματικό αντικείμενο της ανάλυσης χρονοσειρών. Για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto X_t(\omega)$ είναι μια τροχιά. Για κάθε σταθερό t , η X_t είναι τυχαία μεταβλητή. Η διάκριση αυτή είναι ανάλογη με το «παγώνουμε πρώτα το x » στη σημειακή σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

10.1.2 Ορισμός και σημειακή σύγκλιση

Ορισμός 10.2 (Ακολουθία συναρτήσεων). Έστω μη κενό σύνολο X . Μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων είναι

$$(f_0, f_1, f_2, \dots), \quad f_n : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Για κάθε σταθερό $x \in X$, οι τιμές

$$(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots)$$

αποτελούν πραγματική ακολουθία.

Ορισμός 10.3 (Σημειακή σύγκλιση). Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σημειακά στη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, αν για κάθε $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Ορισμός 10.4 (Σύνολο σημειακής σύγκλισης). Το σύνολο

$$X^* = \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ υπάρχει στο } \mathbb{R} \right\}$$

ονομάζεται σύνολο σημειακής σύγκλισης. Η οριακή συνάρτηση είναι

$$f : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Αν $X^* = \emptyset$, δεν υπάρχει πραγματική οριακή συνάρτηση.

Παρατήρηση 10.5. Η μεταβλητή x παγώνει πρώτα και κατόπιν αφήνουμε $n \rightarrow \infty$. Διαφορετικά σημεία του πεδίου μπορούν να έχουν διαφορετική οριακή συμπεριφορά.

10.1.3 Παραδείγματα σημειακών ορίων

Παράδειγμα 10.6. Για $X = \mathbb{R}$ και $f_n(x) = e^{n+x}$, έχουμε $f_n(x) \rightarrow +\infty$ για κάθε x . Άρα $X^* = \emptyset$.

Παράδειγμα 10.7. Για $X = \mathbb{R}$ και $f_n(x) = e^{nx}$,

$$X^* = (-\infty, 0], \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Η οριακή συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0, παρότι κάθε f_n είναι συνεχής.

Παράδειγμα 10.8. Για $X = \mathbb{R}$ και

$$f_n(x) = \exp\left(\frac{x}{n+1}\right),$$

έχουμε $X^* = \mathbb{R}$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 10.9. Για $X = \mathbb{R}$ και

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1} + x,$$

η σύγκλιση είναι σημειακή σε όλο το $\mathbb{R}$ και η οριακή συνάρτηση είναι $f(x) = x$.

Παράδειγμα 10.10. Για $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και

$$f_n(x) = \frac{x^{-n}}{n+1},$$

η ακολουθία συγκλίνει στο 0 όταν $|x| \geq 1$. Όταν $0 < |x| < 1$, οι απόλυτες τιμές δεν είναι φραγμένες. Άρα

$$X^* = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad f(x) = 0.$$

Προσοχή

Το σημειακό όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι κατ' ανάγκην συνεχές. Για τη διατήρηση της συνέχειας απαιτούνται ισχυρότερες μορφές σύγκλισης, όπως η ομοιόμορφη σύγκλιση.

Εμβάθυνση – Προσεγγίσεις συναρτήσεων στην οικονομετρία

Μια ακολουθία εκτιμημένων συναρτήσεων $\hat{m}_n(x)$ μπορεί να συγκλίνει για κάθε σταθερό x στην πραγματική συνάρτηση $m(x)$. Η σημειακή σύγκλιση όμως δεν εξασφαλίζει κοινό έλεγχο του σφάλματος για όλα τα x , κάτι σημαντικό για διαστήματα εμπιστοσύνης ομοιόμορφα ως προς τις συμμεταβλητές.

10.2 Σειρές πραγματικών συναρτήσεων**10.2.1 Ορισμός**

Ορισμός 10.11 (Σειρά συναρτήσεων). Έστω $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. Τα μερικά αθροίσματα είναι οι συναρτήσεις

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x).$$

Η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

ορίζεται σημειακά στα x για τα οποία συγκλίνει η πραγματική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$.

Ορισμός 10.12 (Πεδίο σύγκλισης και συνάρτηση αθροίσματος). Το πεδίο σύγκλισης είναι

$$X^* = \left\{ x \in X : \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \text{ συγκλίνει} \right\}.$$

Η συνάρτηση αθροίσματος είναι

$$S : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x).$$

Παρατήρηση 10.13. Για κάθε σταθερό x , εφαρμόζονται όλα τα κριτήρια πραγματικών σειρών. Το αποτέλεσμα του ελέγχου όμως μπορεί να εξαρτάται από το x , και αυτή ακριβώς η εξάρτηση καθορίζει το X^* .

10.2.2 Η γεωμετρία των συνόλων σύγκλισης

Για μια γενική σειρά συναρτήσεων το πεδίο σύγκλισης μπορεί να έχει πολύ πιο σύνθετη γεωμετρία από ένα διάστημα. Θέτουμε, για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

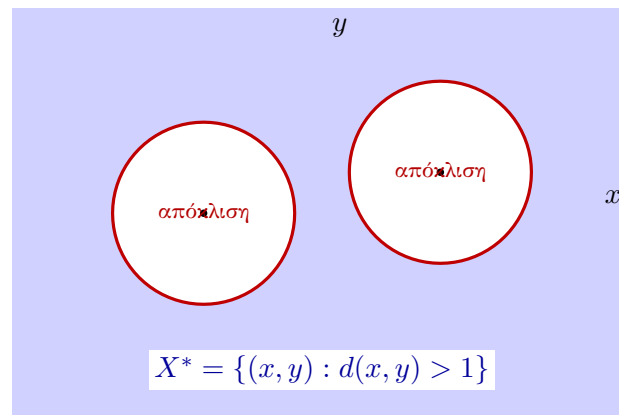
$$d(x, y) = \min \left\{ \sqrt{(x + 1.3)^2 + y^2}, \sqrt{(x - 1.3)^2 + (y - 0.45)^2} \right\}$$

και $f_n(x, y) = \exp(n(1 - d(x, y)))$. Επειδή πρόκειται σημειακά για γεωμετρική σειρά με λόγο $q = e^{1-d}$, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y) \text{ συγκλίνει} \iff d(x, y) > 1.$$

Άρα το σύνολο σύγκλισης είναι το επίπεδο αφού αφαιρέσουμε δύο κλειστούς δίσκους: διαθέτει δύο πραγματικές «οπές».

Η ελευθερία είναι ακόμη μεγαλύτερη αν επιτρέπονται ασυνεχείς όροι: με κατάλληλες χαρακτηριστικές συναρτήσεις μπορούν να κωδικοποιηθούν εξαιρετικά ακανόνιστα σύνολα. Αντίθετα, για μια δυναμοσειρά μίας μεταβλητής $\sum a_n(x - a)^n$, το θεώρημα Cauchy–Hadamard επιβάλλει ότι το εσωτερικό του πεδίου σύγκλισης είναι πάντοτε το διάστημα



Σχήμα 10.1: Μια σειρά συναρτήσεων δύο μεταβλητών με σύνολο σύγκλισης που έχει δύο οπές. Και οι συνοριακοί κύκλοι ανήκουν στην περιοχή απόκλισης.

$(a - R, a + R)$ (ή, στο μιγαδικό επίπεδο, δίσκος με κέντρο a). Δεν μπορούν να εμφανιστούν εσωτερικές οπές: μόνο τα δύο πραγματικά άκρα, ή τα σημεία του μιγαδικού συνοριακού κύκλου, χρειάζονται χωριστή εξέταση. Αυτή η ακαμψία είναι ειδικό προνόμιο των δυναμοσειρών και όχι των σειρών συναρτήσεων γενικά.

10.2.3 Αλγόριθμος με το κριτήριο λόγου

Για σειρά $\sum f_n(x)$, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Για σημεία όπου ο λόγος έχει νόημα, υπολογίζουμε

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|.$$

2. Αν $L(x) < 1$, η αριθμητική σειρά συγκλίνει απολύτως στο συγκεκριμένο x .
3. Αν $L(x) > 1$, η σειρά αποκλίνει στο x .
4. Αν $L(x) = 1$, εξετάζουμε το σημείο χωριστά με άλλο κριτήριο.
5. Εξετάζουμε επίσης ξεχωριστά σημεία όπου ο λόγος δεν ορίζεται ή όπου η αρχική συνάρτηση έχει ειδική μορφή.

10.2.4 Βασικά παραδείγματα

Παράδειγμα 10.14 (Γεωμετρική σειρά συναρτήσεων). Για $X = \mathbb{R}$ και $f_n(x) = x^n$,

$$L(x) = |x| \quad (x \neq 0).$$

Η σειρά συγκλίνει για $|x| < 1$, αποκλίνει για $|x| > 1$, ενώ στα $x = \pm 1$ αποκλίνει. Άρα

$$X^* = (-1, 1), \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Παράδειγμα 10.15 (Εκθετική σειρά). Για $f_n(x) = x^n/n!$,

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $X^* = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αθροίσματος είναι η εκθετική:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Παράδειγμα 10.16. Για

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{n+1}, \quad X = \mathbb{R},$$

έχουμε $L(x) = e^x$. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα όταν $x < 0$. Για $x = 0$ γίνεται η αρμονική σειρά, ενώ για $x > 0$ οι όροι δεν τείνουν στο μηδέν. Άρα

$$X^* = (-\infty, 0).$$

Παράδειγμα 10.17. Για

$$f_n(x) = n!e^{nx}, \quad X = \mathbb{R},$$

ο λόγος των απόλυτων τιμών είναι

$$(n+1)e^x \rightarrow +\infty$$

για κάθε σταθερό x . Επομένως η σειρά δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο και $X^* = \emptyset$.

Παράδειγμα 10.18 (Οριακά σημεία με διαφορετική συμπεριφορά). Για

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{x^n}, \quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

έχουμε $L(x) = 1/|x|$. Υπάρχει απόλυτη σύγκλιση όταν $|x| > 1$, απόκλιση όταν $0 < |x| < 1$, ενώ τα δύο οριακά σημεία εξετάζονται χωριστά:

- για $x = 1$, προκύπτει η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά, η οποία συγκλίνει,
- για $x = -1$, προκύπτει η αρμονική σειρά, η οποία αποκλίνει.

Άρα

$$X^* = (-\infty, -1) \cup [1, \infty).$$

Παράδειγμα 10.19 (Διδιάστατο πεδίο). Για $X = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ και

$$f_n(x) = \frac{e^{nx_1+x_2}}{n+1},$$

έχουμε $L(x) = e^{x_1}$. Η σύγκλιση εξαρτάται μόνο από το x_1 :

$$X^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}.$$

Πράγματι, στο $x_1 = 0$ μένει θετικό πολλαπλάσιο της αρμονικής σειράς, ενώ για $x_1 > 0$ οι όροι δεν τείνουν στο μηδέν.

Εμβάθυνση – Ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς

Για δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

αν υπάρχει

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $|x - x_0| < 1/\rho$ και αποκλίνει για $|x - x_0| > 1/\rho$. Τα άκρα πρέπει πάντοτε να εξετάζονται χωριστά.

Προσοχή

Το κριτήριο λόγου δεν αποφασίζει όταν $L(x) = 1$. Η απόρριψη ή η αποδοχή όλων των οριακών σημείων χωρίς χωριστό έλεγχο μπορεί να δώσει λανθασμένο πεδίο σύγκλισης.

Εμβάθυνση – Προσεγγίσεις με δυναμοσειρές

Η εκθετική ανάπτυξη

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

επιτρέπει προσεγγίσεις με πεπερασμένα πολυώνυμα. Για $x \geq 0$, το υπόλοιπο μετά τον όρο N μπορεί να φραχθεί μέσω του θεωρήματος Taylor ή με σύγκριση της ουράς προς κατάλληλη γεωμετρική σειρά. Η ίδια ιδέα χρησιμοποιείται σε αριθμητικές μεθόδους και σε προσεγγίσεις συναρτήσεων ενεργοποίησης.

10.3 Ασκήσεις

Άσκηση 10.20. Ένας τίτλος πληρώνει $D_t = 10(1.02)^t$ στην περίοδο $t \geq 1$. Με $R = 0.05$, υπολογίστε τη θεμελιώδη αξία του. Τι συμβαίνει αν ο ρυθμός αύξησης γίνει 6%;

Άσκηση 10.21. Από τη μονοπερίοδη εξίσωση τιμολόγησης, αποδείξτε με επαγωγή ότι

$$P_0 = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1+R)^t} + \frac{P_T}{(1+R)^T}.$$

Εξηγήστε ποιον όρο εξαλείφει η no-bubble condition.

Άσκηση 10.22. Έστω $P_T = K(1+g)^T$. Βρείτε τις τιμές του g για τις οποίες ισχύει η primitive no-bubble condition, όταν $R > 0$.

Άσκηση 10.23. Με αρχική βάση $C = 500$ και ποσοστό αποθεματικών $\alpha = 0.08$, υπολογίστε το θεωρητικό τελικό σύνολο καταθέσεων, το σύνολο μετά από 25 γύρους και το σχετικό σφάλμα.

Άσκηση 10.24. Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό γύρων ώστε η πεπερασμένη προσέγγιση του πολλαπλασιαστή χρέματος να έχει σχετικό σφάλμα κάτω από 0.5%, όταν $\alpha = 0.12$.

Άσκηση 10.25. Για καθεμία από τις ακολουθίες

$$f_n(x) = x^n, \quad f_n(x) = \frac{x}{n+1}, \quad f_n(x) = e^{-nx^2},$$

βρείτε το σύνολο σημειακής σύγκλισης και την οριακή συνάρτηση.

Άσκηση 10.26. Βρείτε το πεδίο σύγκλισης της σειράς συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Εξετάστε χωριστά τα σημεία $x = 1$ και $x = -1$.

Άσκηση 10.27. Με το κριτήριο λόγου, βρείτε το πεδίο σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n!}.$$

Αναγνωρίστε τη συνάρτηση αθροίσματος.

Έλεγχος κατανόησης

Μετά τη μελέτη των σημειώσεων θα πρέπει να μπορείτε:

1. να υπολογίζετε παρούσες αξίες γεωμετρικά αυξανόμενων ροών,
2. να διακρίνετε τη σύγκλιση της θεμελιώδους αξίας από τη primitive no-bubble condition,
3. να παράγετε την προωθημένη εξίσωση τιμολόγησης και να εντοπίζετε τη συνιστώσα φούσκας,
4. να υπολογίζετε τον πολλαπλασιαστή καταθέσεων και το ακριβές σφάλμα πεπερασμένης προσέγγισης,
5. να δηλώνετε τις θεσμικές υποθέσεις του απλού νομισματικού υποδείγματος,
6. να βρίσκετε σημειακά όρια ακολουθιών συναρτήσεων,
7. να κατασκευάζετε το πεδίο σύγκλισης μιας σειράς συναρτήσεων,
8. να εφαρμόζετε το κριτήριο λόγου χωρίς να παραλείπετε τα οριακά ή εξαιρετικά σημεία.

Κεφάλαιο 11

Διαχρονική χρησιμότητα και σύγκλιση

11.1 Το πρόβλημα του άπειρου χρονικού ορίζοντα

Ο χρόνος είναι διακριτός, $t \in \mathbb{N}_0$. Σε κάθε περίοδο ο καταναλωτής επιλέγει κατανάλωση $c_t \geq 0$. Ένα πλήρες σχέδιο κατανάλωσης είναι η άπειρη ακολουθία

$$c = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}_0}.$$

Το αντικείμενο επιλογής δεν είναι ένας αριθμός, αλλά ολόκληρη η διαχρονική ροή.

11.1.1 Εφικτές ροές σε ένα απλό υπόδειγμα μεγέθυνσης

Έστω αρχικό κεφάλαιο $k_0 > 0$ και τεχνολογία

$$f(k) = k^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Σε κάθε περίοδο η παραγωγή k_t^α κατανέμεται ανάμεσα σε κατανάλωση και κεφάλαιο της επόμενης περιόδου:

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^\alpha, \quad c_t \geq 0, \quad k_{t+1} \geq 0.$$

Ορισμός 11.1 (Εφικτό σύνολο). Το σύνολο των εφικτών ροών κατανάλωσης είναι

$$\mathcal{C}(k_0, \alpha) = \left\{ c \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}_0} : \begin{array}{l} \text{υπάρχει } (k_t)_{t \geq 1} \text{ με } k_t \geq 0, \\ c_t + k_{t+1} \leq k_t^\alpha \text{ για κάθε } t \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Πρόταση 11.2 (Μη κενότητα). Το σύνολο $\mathcal{C}(k_0, \alpha)$ είναι μη κενό.

Απόδειξη. Μπορούμε να καταναλώσουμε όλη την αρχική παραγωγή και τίποτε στο μέλλον:

$$c = (k_0^\alpha, 0, 0, \dots), \quad k_t = 0 \quad (t \geq 1).$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να θέσουμε $c_t = 0$ για κάθε t και $k_{t+1} = k_t^\alpha$. □

Πρόταση 11.3 (Ομοιόμορφο φράγμα των εφικτών ροών). Για κάθε $c \in \mathcal{C}(k_0, \alpha)$,

$$0 \leq c_t \leq k_0^{\alpha^{t+1}} \leq \max\{1, k_0\} \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Άρα το εφικτό σύνολο είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Απόδειξη. Από τον περιορισμό πόρων,

$$c_t \leq k_t^\alpha, \quad k_{t+1} \leq k_t^\alpha.$$

Με επαγωγή,

$$k_t \leq k_0^{\alpha^t}, \quad c_t \leq k_t^\alpha \leq k_0^{\alpha^{t+1}}.$$

Επειδή $0 < \alpha^{t+1} \leq 1$, η τελευταία ποσότητα δεν υπερβαίνει το $\max\{1, k_0\}$. □

11.1.2 Το δένδρο των αποφάσεων συσσώρευσης

Σε κάθε περίοδο, το διαθέσιμο κεφάλαιο k_t προσδιορίζει την παραγωγή

$$y_t = f(k_t) = k_t^\alpha.$$

Ο οικονομικός φορέας επιλέγει πόσο από το παραγόμενο προϊόν θα καταναλωθεί και πόσο θα μεταφερθεί ως κεφάλαιο στην επόμενη περίοδο.

Αν δεν υπάρχει σκόπιμη καταστροφή ή αχρησιμοποίητο προϊόν και η χρησιμότητα είναι γνησίως αύξουσα ως προς την κατανάλωση, ο περιορισμός πόρων θα ισχύει με ισότητα:

$$c_t + k_{t+1} = k_t^\alpha.$$

Μπορούμε τότε να περιγράψουμε την απόφαση με ένα ποσοστό αποταμίευσης $s_t \in [0, 1]$:

$$k_{t+1} = s_t k_t^\alpha, \quad c_t = (1 - s_t) k_t^\alpha.$$

Για κάθε δεδομένο k_t , διαφορετικές επιλογές του s_t οδηγούν σε διαφορετικό κεφάλαιο k_{t+1} . Αυτό με τη σειρά του αλλάζει την παραγωγή και το σύνολο των εφικτών αποφάσεων στην επόμενη περίοδο. Η διαδοχική αυτή δομή μπορεί να αναπαρασταθεί ως δένδρο αποφάσεων.

11.2 Από τις προτιμήσεις στη χρησιμότητα

11.2.1 Αναπαράσταση προτιμήσεων

Έστω $\succeq$ μια δυαδική σχέση στο $\mathcal{C}(k_0, \alpha)$. Η γραφή $c \succeq d$ σημαίνει ότι η ροή c θεωρείται τουλάχιστον εξίσου καλή με τη ροή d .

Ορισμός 11.4 (Συνάρτηση χρησιμότητας). Μια συνάρτηση $U : \mathcal{C}(k_0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ αναπαριστά τις προτιμήσεις αν

$$c \succeq d \iff U(c) \geq U(d).$$

Η πληρότητα και η μεταβατικότητα είναι απαραίτητες για ορθολογική διάταξη των εναλλακτικών, αλλά σε έναν χώρο άπειρων ακολουθιών δεν αρκούν μόνες τους για την ύπαρξη πραγματικής συνάρτησης χρησιμότητας. Χρειάζονται κατάλληλες συνθήκες συνέχειας ή αριθμησιμότητας. Στις παρούσες σημειώσεις θεωρούμε ότι υπάρχει συνεχής αριθμητική αναπαράσταση και εστιάζουμε στο πρόσθετο οικονομικό περιεχόμενο που οδηγεί σε μορφή σειράς.

11.2.2 Γιατί εμφανίζεται άθροισμα;

Η γενική μορφή

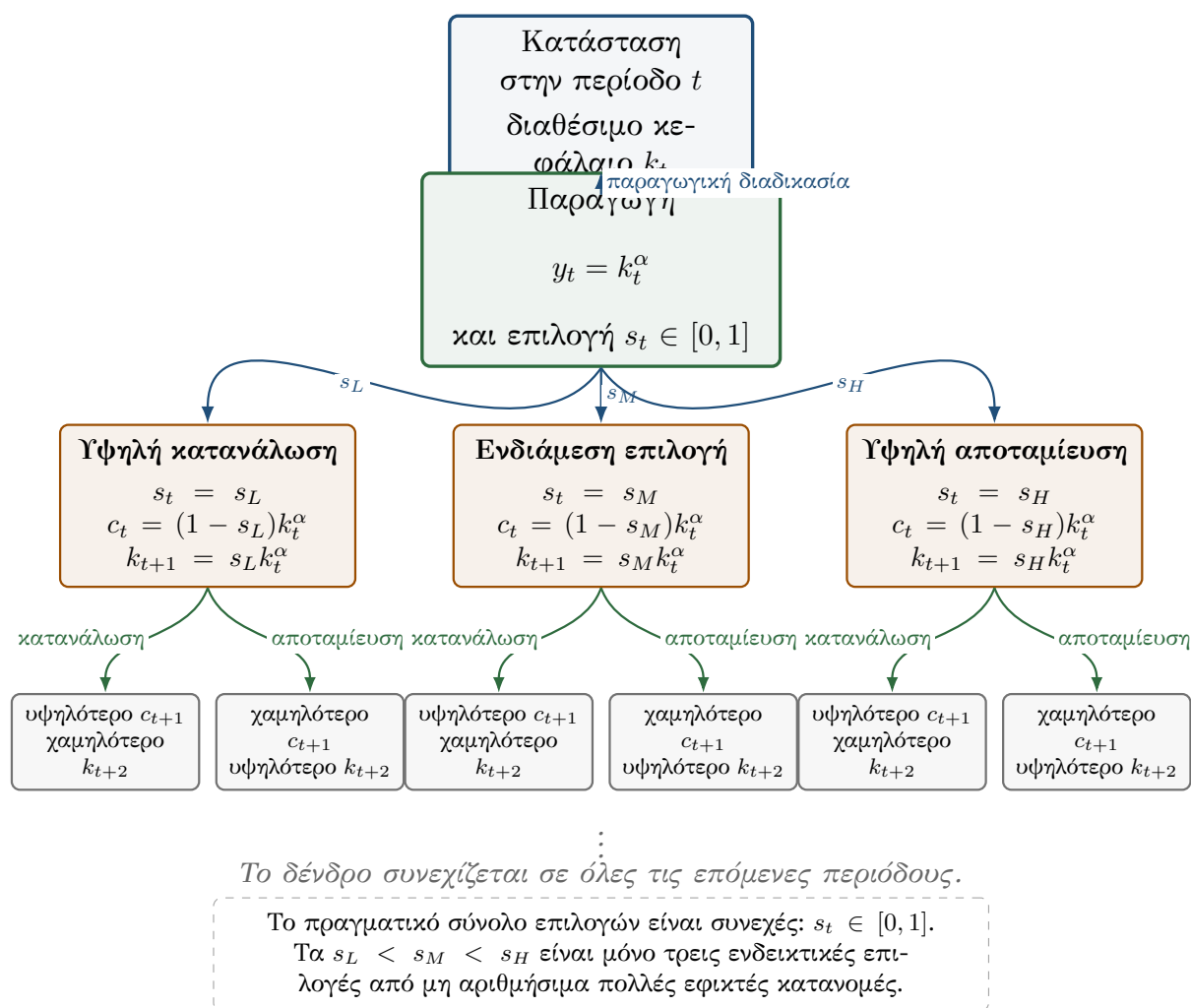
$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} V_t(c)$$

δεν είναι λογιστική ταυτότητα. Αποτελεί περιορισμό στη δομή των προτιμήσεων.

Ορισμός 11.5 (Χρονικός διαχωρισμός). Οι προτιμήσεις είναι χρονικά διαχωρίσιμες όταν η συμβολή της κατανάλωσης στην περίοδο t μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση μόνο της c_t , όχι της κατανάλωσης σε άλλες περιόδους. Τότε

$$V_t(c) = w_t u_t(c_t)$$

για κατάλληλα βάρη $w_t \geq 0$ και στιγμιαίες συναρτήσεις χρησιμότητας u_t .



Σχήμα 11.1: Σχηματικό δένδρο κατανομής της παραγωγής μεταξύ τρέχουσας κατανάλωσης και κεφαλαίου της επόμενης περιόδου. Κάθε επιλογή μεταβάλλει το σύνολο δυνατοτήτων που θα είναι διαθέσιμο στην επόμενη περίοδο.

Μια οικονομική βάση του χρονικού διαχωρισμού είναι η *προτιμησησική ανεξαρτησία*: η κατάταξη δύο επιπέδων κατανάλωσης σε μια δεδομένη ημερομηνία δεν μεταβάλλεται όταν οι καταναλώσεις σε όλες τις άλλες ημερομηνίες παραμένουν ίδιες και αλλάζουν από κοινού. Με κατάλληλες συνθήκες κανονικότητας, αυτή η ιδέα οδηγεί σε προσθετικά διαχωρίσιμη αναπαράσταση.

Εμβάθυνση – τι ακριβώς υποθέτουμε

Η προσθετική μορφή αποκλείει συνήθειες, εθισμό, κόστη προσαρμογής και άμεσες συμπληρωματικότητες μεταξύ c_t και c_{t+1} . Για παράδειγμα,

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t - \eta c_{t-1})$$

περιγράφει σχηματισμό συνηθειών και δεν είναι χρονικά διαχωρίσιμη ως προς την ακατέργαστη κατανάλωση c_t .

11.2.3 Στασιμότητα και εκθετική προεξόφληση

Αν η στιγμιαία αξιολόγηση δεν εξαρτάται από την ημερομηνία, τότε $u_t = u$. Αν επιπλέον οι προτιμήσεις είναι σταθερές ως προς τη μετατόπιση του χρόνου, ο σχετικός συντελεστής μεταξύ δύο διαδοχικών περιόδων είναι σταθερός. Γράφουμε

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = \beta, \quad 0 < \beta < 1.$$

Με κανονικοποίηση $w_0 = 1$, προκύπτει $w_t = \beta^t$ και

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

Εμβάθυνση – αξιωματική διαδρομή τύπου Koopmans

Σε μια τυπική θεωρητική θεμελίωση, η προεξοφλημένη χρησιμότητα δεν υποτίθεται εξ αρχής. Προκύπτει από έναν συνδυασμό ιδιοτήτων:

1. **Ασθενής διάταξη**: πληρότητα και μεταβατικότητα επιτρέπουν συνεπή κατάταξη των ροών.
2. **Συνέχεια**: μικρές μεταβολές μιας ροής δεν προκαλούν αυθαίρετα άλματα στην κατάταξη.
3. **Ευαισθησία**: η κατανάλωση σε κάποια ημερομηνία επηρεάζει πράγματι την ευημερία.
4. **Χρονική διαχωρισιμότητα**: η σύγκριση δύο καταναλώσεων σε μια ημερομηνία είναι ανεξάρτητη από ένα κοινό σχέδιο κατανάλωσης στις υπόλοιπες ημερομηνίες.
5. **Στασιμότητα**: η κατάταξη δύο μελλοντικών συνεχειών δεν αλλάζει όταν και οι δύο μετατοπίζονται κατά μία περίοδο.
6. **Ανυπομονησία**: μια ευνοϊκή μεταβολή προτιμάται, υπό τα λοιπά ίδια, νωρίτερα αντί αργότερα.

Με κατάλληλες τεχνικές συνθήκες, οι ιδιότητες αυτές οδηγούν σε σταθερή στιγμιαία χρησιμότητα u και σταθερό λόγο βαρών $w_{t+1}/w_t = \beta$. Η συνθήκη σύγκλισης που ακολουθεί δεν είναι πρόσθετο αξίωμα προτιμήσεων: είναι η μαθηματική απαίτηση ώστε η αναπαράσταση να παίρνει πραγματικές τιμές.

Ερμηνεία

Ο παράγοντας β είναι ο συντελεστής χρονικής προτίμησης. Μικρότερο β σημαίνει μικρότερη σημερινή βαρύτητα της μελλοντικής χρησιμότητας. Αν $\rho > 0$ είναι ο καθαρός ρυθμός χρονικής προτίμησης ανά περίοδο, συνήθης παραμετροποίηση είναι

$$\beta = \frac{1}{1 + \rho}.$$

Η προεξόφληση χρησιμότητας είναι προτιμησιακή υπόθεση και δεν ταυτίζεται αναγκαστικά με την προεξόφληση χρηματικών ροών με το επιτόκιο αγοράς.

Εμβάθυνση – αναδρομική μορφή

Η εκθετική προεξόφληση ισοδυναμεί με τη χρονικά συνεπή αναδρομή

$$U(c_0, c_1, \dots) = u(c_0) + \beta U(c_1, c_2, \dots).$$

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η συγκεκριμένη μορφή είναι συμβατή με τη δυναμική βελτιστοποίηση και την εξίσωση Bellman.

Παρατήρηση 11.6 (Κανονικοποιημένη μορφή). Η συνάρτηση

$$\tilde{U}(c) = (1 - \beta) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

αναπαριστά ακριβώς τις ίδιες προτιμήσεις, επειδή πολλαπλασιάζει το U με θετική σταθερά. Τα βάρη της αθροίζουν στη μονάδα και μπορούν να ερμηνευθούν ως πιθανότητες γεωμετρικής τυχαίας ημερομηνίας.

Προσοχή

Δεν αρκεί να γράψουμε το σύμβολο $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό για κάθε ροή του πεδίου ορισμού. Η οικονομική αναπαράσταση και η μαθηματική σύγκλιση είναι δύο διαφορετικά βήματα.

11.3 Πότε η σειρά χρησιμότητας είναι καλώς ορισμένη;

11.3.1 Το γενικό κριτήριο του Weierstrass

Θεώρημα 11.7 (Φραγμένη στιγμιαία χρησιμότητα). Έστω ότι

$$|u(c_t)| \leq M$$

για κάθε εφικτή ροή και κάθε t , όπου το M δεν εξαρτάται ούτε από τη ροή ούτε από τον χρόνο. Αν $0 < \beta < 1$, τότε η σειρά

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο εφικτό σύνολο.

Απόδειξη. Για κάθε c και t ,

$$|\beta^t u(c_t)| \leq M\beta^t.$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{t=0}^{\infty} M\beta^t$ συγκλίνει. Το κριτήριο του Weierstrass δίνει απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση. $\square$

Πόρισμα 11.8 (Σφάλμα πεπερασμένου ορίζοντα). Αν

$$U_T(c) = \sum_{t=0}^T \beta^t u(c_t),$$

τότε

$$\sup_{c \in \mathcal{C}(k_0, \alpha)} |U(c) - U_T(c)| \leq \frac{M\beta^{T+1}}{1 - \beta}.$$

Το αποτέλεσμα δίνει όχι μόνο σύγκλιση αλλά και ενιαίο έλεγχο του σφάλματος για όλες τις εφικτές πολιτικές.

11.3.2 Η βασική περίπτωση $u(c) = c^p$

Θεωρούμε

$$u(c) = c^p, \quad 0 < p < 1.$$

Η συνάρτηση είναι αύξουσα και γνησίως κοίλη: ο καταναλωτής προτιμά περισσότερη κατανάλωση, αλλά έχει φθίνουσα οριακή χρησιμότητα.

Θεώρημα 11.9 (Σύγκλιση στο υπόδειγμα μεγέθυνσης). Για $k_0 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < p < 1$ και $0 < \beta < 1$, η συνάρτηση

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^p$$

είναι πεπερασμένη για κάθε $c \in \mathcal{C}(k_0, \alpha)$. Μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο εφικτό σύνολο.

Απόδειξη. Από το φράγμα εφικτότητας,

$$0 \leq c_t^p \leq k_0^{p\alpha^{t+1}} \leq M_p := \max\{1, k_0^p\}.$$

Άρα

$$0 \leq \beta^t c_t^p \leq M_p \beta^t.$$

Το κριτήριο σύγκρισης με τη γεωμετρική σειρά ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Η απόδειξη των χειρόγραφων σημειώσεων μπορεί επίσης να γραφεί με το κριτήριο του λόγου. Για τη μείζονα σειρά

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_0^{p\alpha^{t+1}},$$

ο λόγος διαδοχικών όρων είναι

$$\frac{\beta^{t+1} k_0^{p\alpha^{t+2}}}{\beta^t k_0^{p\alpha^{t+1}}} = \beta k_0^{p\alpha^{t+1}(\alpha-1)} \rightarrow \beta.$$

Εφόσον $\beta < 1$, η μείζων σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 11.10 (Ποσοτικό σφάλμα αποκοπής). Αν $k_0 = 4$, $p = 1/2$, $\beta = 0.95$ και χρησιμοποιούμε ορίζοντα T , τότε $M_p = 2$ και

$$|U(c) - U_T(c)| \leq \frac{2(0.95)^{T+1}}{0.05} = 40(0.95)^{T+1}$$

για κάθε εφικτή ροή. Το φράγμα είναι συντηρητικό, αλλά ισχύει ομοιόμορφα.

11.3.3 Τι αλλάζει όταν $\beta = 1$;

Αν $\beta = 1$, το προηγούμενο γενικό επιχείρημα αποτυγχάνει: οι όροι της μείζονος σειράς $k_0^{p\alpha^{t+1}}$ τείνουν στο (1), άρα η μείζων σειρά αποκλίνει. Αυτό δεν σημαίνει ότι η χρησιμότητα αποκλίνει για κάθε εφικτή ροή. Σημαίνει ότι δεν είναι εγγυημένα πεπερασμένη σε ολόκληρο το εφικτό σύνολο.

Παράδειγμα 11.11 (Εφικτή ροή με πεπερασμένη απροεξόφλητη χρησιμότητα). Έστω $\alpha = 1$ και

$$c_t = \frac{k_0}{2^{t+1}}, \quad k_t = \frac{k_0}{2^t}.$$

Τότε $c_t + k_{t+1} = k_t$, άρα η ροή είναι εφικτή. Για κάθε $p > 0$,

$$\sum_{t=0}^{\infty} c_t^p = \frac{k_0^p}{2^p} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{k_0^p}{2^p - 1} < \infty.$$

Παράδειγμα 11.12 (Εφικτή ροή με άπειρη απροεξόφλητη χρησιμότητα). Έστω πάλι $\alpha = 1$. Επιλέγουμε

$$c_t = \frac{A}{(t+1)^q}, \quad q > 1,$$

όπου το $A > 0$ επιλέγεται ώστε $\sum_{t=0}^{\infty} c_t \leq k_0$. Η ροή είναι εφικτή, αν το υπόλοιπο κεφάλαιο μεταφέρεται στην επόμενη περίοδο. Αν $1 < q \leq 1/p$, τότε

$$\sum_{t=0}^{\infty} c_t^p = A^p \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(t+1)^{pq}} = +\infty.$$

Άρα για $\beta = 1$ η U δεν είναι πραγματική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathcal{C}(k_0, 1)$.

11.3.4 Μη φραγμένη στιγμιαία χρησιμότητα

Η προεξόφληση $\beta < 1$ δεν εγγυάται από μόνη της σύγκλιση όταν η $u(c_t)$ μπορεί να αυξάνεται χωρίς φράγμα.

Πρόταση 11.13 (Ρυθμός αύξησης και προεξόφληση). Αν υπάρχουν $K > 0$ και $a > 0$ τέτοια ώστε

$$|u(c_t)| \leq K a^t$$

για κάθε εφικτή ροή και κάθε t , τότε η διαχρονική χρησιμότητα συγκλίνει απόλυτα όταν

$$\beta a < 1.$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$|\beta^t u(c_t)| \leq K(\beta a)^t,$$

και εφαρμόζουμε το κριτήριο σύγκρισης με γεωμετρική σειρά. □

Παράδειγμα 11.14 (CRRA και αυξανόμενη κατανάλωση). Για $0 < \sigma < 1$, έστω

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

και $c_t \leq C(1+g)^t$. Τότε η σειρά συγκλίνει αν

$$\beta(1+g)^{1-\sigma} < 1.$$

Η συνθήκη συγκρίνει την υπομονή με τον ρυθμό αύξησης της στιγμιαίας χρησιμότητας.

Παρατήρηση 11.15 (Λογαριθμική χρησιμότητα). Για $u(c) = \log c$ απαιτείται έλεγχος τόσο της αύξησης όσο και της προσέγγισης στο μηδέν. Αν σε όλες τις εφικτές ροές του πεδίου ορισμού ισχύει

$$|\log c_t| \leq A + Bt,$$

τότε για $0 < \beta < 1$ η σειρά συγκλίνει, επειδή συγκλίνουν οι $\sum \beta^t$ και $\sum t\beta^t$.

11.4 Υπερβολική προεξόφληση

Μια εναλλακτική μορφή είναι

$$U_H(c) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(c_t)}{(t+1)^\kappa}, \quad \kappa > 0.$$

Τα βάρη μειώνονται πολύ πιο αργά από τα γεωμετρικά. Ο λόγος διαδοχικών βαρών,

$$\frac{(t+1)^\kappa}{(t+2)^\kappa},$$

εξαρτάται από το t και αυξάνεται προς το (1). Επομένως η σχετική ανυπομονησία είναι εντονότερη για κοντινές ημερομηνίες και ασθενέστερη για μακρινές.

Ερμηνεία

Η υπερβολική προεξόφληση μπορεί να αποδώσει την εμπειρική τάση για αντιστροφή προτιμήσεων: σήμερα το άτομο προτιμά μια μικρότερη άμεση ανταμοιβή, αλλά όταν και οι δύο ανταμοιβές μεταφερθούν αρκετά στο μέλλον προτιμά τη μεγαλύτερη και καθυστερημένη. Σε αντίθεση με την εκθετική προεξόφληση, γενικά δεν παράγει χρονικά συνεπείς επιλογές.

Θεώρημα 11.16 (Σύγκλιση με υπερβολικά βάρη). Αν $|u(c_t)| \leq M$ ομοιόμορφα, τότε

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(c_t)}{(t+1)^\kappa}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα για $\kappa > 1$.

Απόδειξη.

$$\left| \frac{u(c_t)}{(t+1)^\kappa} \right| \leq \frac{M}{(t+1)^\kappa},$$

και η σειρά p συγκλίνει αν και μόνο αν $\kappa > 1$. □

Για $\kappa \leq 1$, η σύγκλιση μπορεί να ισχύει για ειδικές ροές που τείνουν αρκετά γρήγορα στο μηδέν, αλλά δεν εξασφαλίζεται σε ολόκληρο το εφικτό σύνολο μόνο από τη φραγμένη κατανάλωση.

11.5 Από τη σύγκλιση στην ύπαρξη άριστης ροής

Προσοχή

Το ότι $U(c) \in \mathbb{R}$ για κάθε εφικτό c αποδεικνύει ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη. Δεν αποδεικνύει ότι το μέγιστο επιτυγχάνεται. Για την ύπαρξη λύσης χρειαζόμαστε επιπλέον συμπάγεια του εφικτού συνόλου και συνέχεια της U .

Θεώρημα 11.17 (Υπαρξη άριστης ροής). Έστω $k_0 > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < p < 1$ και $0 < \beta < 1$. Τότε το πρόβλημα

$$\max_{c \in C(k_0, \alpha)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^p$$

έχει τουλάχιστον μία λύση.

Ιδέα της απόδειξης. Θεωρούμε συγχρόνως τις ακολουθίες κατανάλωσης και κεφαλαίου. Από τα προηγούμενα φράγματα, όλες οι συντεταγμένες ανήκουν σε ένα κοινό συμπαγές διάστημα $[0, B]$. Το γινόμενο $[0, B]^{\mathbb{N}_0} \times [0, B]^{\mathbb{N}_0}$, με την τοπολογία κατά συντεταγμένη σύγκλισης, είναι συμπαγές. Οι περιορισμοί

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^\alpha$$

ορίζουν κλειστό υποσύνολο, άρα το επαυξημένο εφικτό σύνολο είναι συμπαγές.

Κάθε πεπερασμένο άθροισμα

$$U_T(c) = \sum_{t=0}^T \beta^t c_t^p$$

είναι συνεχές. Η σύγκλιση $U_T \rightarrow U$ είναι ομοιόμορφη, άρα η U είναι συνεχής. Επομένως το θεώρημα Weierstrass εξασφαλίζει ότι η U λαμβάνει μέγιστη τιμή στο εφικτό σύνολο. $\square$

Παρατήρηση 11.18 (Πότε η λύση είναι μοναδική;). Αν το εφικτό σύνολο είναι κυρτό και η u είναι γνησίως κοίλη, τότε η U είναι γνησίως κοίλη και η άριστη ροή κατανάλωσης είναι μοναδική. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα είναι διαφορετικές ιδιότητες.

11.5.1 Προσέγγιση με πεπερασμένο ορίζοντα

Έστω V η άριστη τιμή του άπειρου προβλήματος και V_T η άριστη τιμή του προβλήματος με αντικειμενική συνάρτηση U_T στο ίδιο εφικτό σύνολο. Αν $|u(c_t)| \leq M$, τότε

$$|V - V_T| \leq \frac{M\beta^{T+1}}{1 - \beta}.$$

Άρα η αποκοπή του ορίζοντα δεν είναι απλώς υπολογιστικό τέχνασμα: συνοδεύεται από ρητό και ομοιόμορφο σφάλμα.

Εμβάθυνση – Εξίσωση Euler και άριστη συσσώρευση κεφαλαίου

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t \geq 0}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \quad 0 < \beta < 1,$$

υπό τους περιορισμούς

$$c_t + k_{t+1} = f(k_t), \quad c_t \geq 0, \quad k_{t+1} \geq 0,$$

και δεδομένο αρχικό κεφάλαιο $k_0 > 0$.

Υποθέτουμε ότι:

- η u είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως κοίλη και διαφορίσιμη,
- η f είναι αύξουσα, κοίλη και διαφορίσιμη,
- η άριστη λύση είναι εσωτερική:

$$c_t > 0, \quad k_{t+1} > 0,$$

- και ισχύει κατάλληλη συνθήκη εγκαρσιότητας.

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό πόρων, γράφουμε

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1}.$$

Μια μονάδα επιπλέον κεφαλαίου στην περίοδο $t + 1$ μειώνει την τρέχουσα κατανάλωση κατά μία μονάδα:

$$\frac{\partial c_t}{\partial k_{t+1}} = -1.$$

Ταυτόχρονα αυξάνει την παραγωγή της επόμενης περιόδου κατά

$$f'(k_{t+1}),$$

και επομένως επιτρέπει, στο περιθώριο, αύξηση της επόμενης κατανάλωσης κατά $f'(k_{t+1})$.

Η οριακή απώλεια χρησιμότητας στην περίοδο t είναι

$$u'(c_t),$$

ενώ η προεξοφλημένη οριακή ωφέλεια στην περίοδο $t + 1$ είναι

$$\beta u'(c_{t+1}) f'(k_{t+1}).$$

Στην εσωτερική άριστη λύση οι δύο ποσότητες πρέπει να είναι ίσες.

Θεώρημα 11.19 (Εξίσωση Euler). Κάθε εσωτερική άριστη τροχιά ικανοποιεί

$$\boxed{u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1}) f'(k_{t+1})} \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε μια μικρή μεταβολή ε του κεφαλαίου k_{t+1} , κρατώντας τις υπόλοιπες επιλογές σταθερές στο πρώτο βήμα.

Η αύξηση

$$k_{t+1} \mapsto k_{t+1} + \varepsilon$$

μειώνει την κατανάλωση της περιόδου t σε

$$c_t - \varepsilon.$$

Η μεταβολή της τρέχουσας χρησιμότητας είναι, σε πρώτη τάξη,

$$-u'(c_t)\varepsilon.$$

Στην επόμενη περίοδο, το πρόσθετο κεφάλαιο αυξάνει την παραγωγή κατά

$$f'(k_{t+1})\varepsilon.$$

Αν η πρόσθετη παραγωγή μετατραπεί σε κατανάλωση, η προεξοφλημένη μεταβολή της χρησιμότητας είναι, σε πρώτη τάξη,

$$\beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1})\varepsilon.$$

Η συνολική μεταβολή πρώτης τάξης είναι επομένως

$$[-u'(c_t) + \beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1})]\varepsilon.$$

Σε μια εσωτερική άριστη λύση, τόσο μια μικρή θετική όσο και μια μικρή αρνητική μεταβολή πρέπει να μην αυξάνουν την αντικειμενική συνάρτηση. Άρα ο συντελεστής του ε πρέπει να είναι μηδέν:

$$-u'(c_t) + \beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1}) = 0.$$

Συνεπώς

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1}).$$

□

Οικονομική ερμηνεία

Διαιρώντας την εξίσωση Euler με $u'(c_{t+1})$, παίρνουμε

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta f'(k_{t+1}).$$

Το αριστερό μέλος είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης ανάμεσα στην κατανάλωση σήμερα και την κατανάλωση αύριο. Το δεξιό μέλος είναι η προεξοφλημένη οριακή απόδοση της επένδυσης.

Αν

$$u'(c_t) > \beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1}),$$

η οριακή απώλεια από τη μείωση της σημερινής κατανάλωσης είναι μεγαλύτερη από την προεξοφλημένη μελλοντική ωφέλεια. Ο φορέας πρέπει να μειώσει την αποταμίευση και να αυξήσει το c_t .

Αντίθετα, αν

$$u'(c_t) < \beta u'(c_{t+1})f'(k_{t+1}),$$

η οριακή μελλοντική ωφέλεια υπερβαίνει το σημερινό οριακό κόστος. Ο φορέας πρέπει να αυξήσει την αποταμίευση και το k_{t+1} .

CRRA χρησιμότητα και παραγωγή Cobb–Douglas

Θεωρούμε

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1,$$

και

$$f(k) = k^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Τότε

$$u'(c) = c^{-\sigma}, \quad f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}.$$

Η εξίσωση Euler γίνεται

$$c_t^{-\sigma} = \beta c_{t+1}^{-\sigma} \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}.$$

Ισοδύναμα,

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\sigma} = \beta \alpha k_{t+1}^{\alpha-1},$$

και επομένως

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = (\beta \alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{1/\sigma}.$$

Ο ρυθμός αύξησης της κατανάλωσης εξαρτάται από:

- την υπομονή β ,
- την οριακή παραγωγικότητα $\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$,
- και την παράμετρο καμπυλότητας σ .

Μεγαλύτερο σ σημαίνει ισχυρότερη επιθυμία εξομάλυνσης της κατανάλωσης και μικρότερη ανταπόκριση του λόγου c_{t+1}/c_t στις μεταβολές της απόδοσης.

Η σταθερή κατάσταση

Σε μια εσωτερική σταθερή κατάσταση ισχύει

$$k_{t+1} = k_t = k^*, \quad c_{t+1} = c_t = c^*.$$

Η εξίσωση Euler γίνεται

$$u'(c^*) = \beta u'(c^*) f'(k^*).$$

Επειδή $u'(c^*) > 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε και να πάρουμε

$$1 = \beta f'(k^*).$$

Για $f(k) = k^{\alpha}$,

$$1 = \beta \alpha (k^*)^{\alpha-1}.$$

Άρα

$$(k^*)^{1-\alpha} = \alpha \beta$$

και συνεπώς

$$k^* = (\alpha \beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Η αντίστοιχη κατανάλωση είναι

$$c^* = f(k^*) - k^* = (k^*)^{\alpha} - k^*.$$

Επειδή

$$k^* = \alpha \beta (k^*)^{\alpha},$$

μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$c^* = (1 - \alpha \beta) (k^*)^{\alpha}.$$

Η συνθήκη

$$\beta f'(k^*) = 1$$

δηλώνει ότι, στη σταθερή κατάσταση, η ακαθάριστη οριακή απόδοση του κεφαλαίου είναι

$$f'(k^*) = \frac{1}{\beta}.$$

Παρατήρηση 11.20. Η σταθερή κατάσταση k^* δεν εξαρτάται από την παράμετρο σ , επειδή στη σταθερή κατάσταση η κατανάλωση είναι σταθερή και ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων είναι ίσος με 1. Η παράμετρος σ επηρεάζει όμως τη μεταβατική τροχιά προς τη σταθερή κατάσταση.

Η εξίσωση Euler δεν αρκεί από μόνη της

Για γενική CRRA χρησιμότητα, η εξίσωση Euler

$$c_t^{-\sigma} = \beta \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} c_{t+1}^{-\sigma}$$

πρέπει να συνδυαστεί με

$$c_t + k_{t+1} = k_t^\alpha$$

και το δεδομένο k_0 .

Σε πρόβλημα άπειρου ορίζοντα χρειάζεται επίσης μια συνθήκη εγκαρσιότητας, όπως

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0,$$

υπό τις κατάλληλες τεχνικές υποθέσεις. Η συνθήκη αποκλείει τροχιές στις οποίες παραμένει στο όριο κεφάλαιο με θετική οριακή αξία το οποίο δεν μετατρέπεται ποτέ σε ωφέλιμη κατανάλωση.

Επομένως η εξίσωση Euler είναι αναγκαία συνθήκη τοπικής αριστότητας, αλλά δεν προσδιορίζει πάντοτε μόνη της τη μοναδική άριστη τροχιά.

11.6 Συνοπτικός χάρτης των λογικών βημάτων

Βήμα	Τι πρέπει να αιτιολογηθεί
Εφικτότητα	Η ροή ικανοποιεί τους διαχρονικούς περιορισμούς πόρων.
Αναπαράσταση	Οι προτιμήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν αριθμητικά.
Διαχωρισμός	Η χρησιμότητα κάθε περιόδου εξαρτάται μόνο από την κατανάλωση της ίδιας περιόδου.
Στασιμότητα	Η ίδια στιγμιαία συνάρτηση u χρησιμοποιείται σε κάθε ημερομηνία.
Προεξόφληση	Η σταθερή σχετική βαρύτητα διαδοχικών περιόδων δίνει $w_t = \beta^t$.
Σύγκλιση	Η σειρά είναι πεπερασμένη για κάθε ροή του πεδίου ορισμού.
Υπαρξη λύσης	Η συνέχεια και η συμπάγεια εξασφαλίζουν ότι το supremum επιτυγχάνεται.

11.7 Ασκήσεις

Άσκηση 11.21 (Γενικά βάρη). Έστω $w_t \geq 0$, η u συνεχής και $|u(c_t)| \leq M$ για κάθε εφικτή ροή. Δείξτε ότι αν $\sum_{t=0}^{\infty} w_t < \infty$, τότε

$$U(c) = \sum_{t=0}^{\infty} w_t u(c_t)$$

ορίζει πραγματική και συνεχή συνάρτηση στο εφικτό σύνολο.

Άσκηση 11.22 (Απροεξόφλητη χρησιμότητα). Για $\alpha = 1$, $0 < p < 1$ και $\beta = 1$, κατασκευάστε:

(α□) μία εφικτή ροή για την οποία $\sum c_t^p < \infty$,

(β□) μία εφικτή ροή για την οποία $\sum c_t^p = +\infty$.

Εξηγήστε γιατί τα δύο παραδείγματα δεν αντιφάσκουν.

Άσκηση 11.23 (Επιλογή χρονικού ορίζοντα). Έστω $|u(c_t)| \leq 10$ και $\beta = 0.9$. Βρείτε τον μικρότερο T που εξασφαλίζει

$$\sup_c |U(c) - U_T(c)| \leq 0.1.$$

Άσκηση 11.24 (Υπερβολική προεξόφληση). Έστω $u(c) = c^p$, $0 < p < 1$, στο εφικτό σύνολο του υποδείγματος.

(α□) Δείξτε ότι η υπερβολική χρησιμότητα είναι καλώς ορισμένη για κάθε εφικτή ροή όταν $\kappa > 1$.

(β□) Εξετάστε γιατί το ίδιο επιχείρημα δεν αρκεί όταν $0 < \kappa \leq 1$.

Έλεγχος κατανόησης

Πριν χρησιμοποιήσουμε μια άπειρη διαχρονική χρησιμότητα, ελέγχουμε με τη σειρά:

1. ποιο είναι ακριβώς το εφικτό σύνολο,
2. ποιες προτιμησιακές υποθέσεις δικαιολογούν την προσθετική μορφή,
3. αν η σειρά συγκλίνει για κάθε εφικτή ροή,
4. αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη,
5. και αν υπάρχουν οι τοπολογικές συνθήκες για την επίτευξη του μεγίστου.

Εμβάθυνση – Εκτός ύλης: χρονική ασυνέπεια και αντιστροφή προτιμήσεων

Η ενότητα αυτή είναι πληροφοριακή και βρίσκεται εκτός του κύριου εύρους και της εξεταστέας ύλης του μαθήματος. Σκοπός της είναι να εξηγήσει γιατί ένα σχέδιο κατανάλωσης και αποταμίευσης που επιλέγεται σήμερα μπορεί να αναθεωρηθεί όταν φτάσει η στιγμή της εφαρμογής του.

Διαχρονική αξιολόγηση. Έστω μια ροή κατανάλωσης

$$(c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, \dots).$$

Στην ημερομηνία t , ο οικονομικός φορέας αξιολογεί τη ροή με

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} D(j)u(c_{t+j}),$$

όπου

$$D(0) = 1, \quad D(j) > 0, \quad D(j+1) \leq D(j).$$

Η συνάρτηση $D(j)$ εκφράζει το βάρος μιας απολαβής που απέχει j περιόδους από την ημερομηνία αξιολόγησης.

Ορισμός 11.25 (Χρονική συνέπεια). Οι διαχρονικές προτιμήσεις λέγονται χρονικά συνεπείς όταν ένα σχέδιο που θεωρείται άριστο σε μια αρχική ημερομηνία εξακολουθεί να θεωρείται άριστο στις μεταγενέστερες ημερομηνίες, εφόσον δεν έχουν μεταβληθεί οι διαθέσιμες επιλογές ή οι σχετικές πληροφορίες.

Η χρονική συνέπεια απαιτεί η πάροδος του χρόνου να μην αλλάζει τη σχετική κατάταξη δύο μελλοντικών απολαβών μόνο και μόνο επειδή αυτές πλησίασαν στο παρόν.

Εκθετική προεξόφληση

Στην εκθετική προεξόφληση,

$$D(j) = \delta^j, \quad 0 < \delta < 1.$$

Η αξιολόγηση στην ημερομηνία t είναι

$$U_t = u(c_t) + \delta u(c_{t+1}) + \delta^2 u(c_{t+2}) + \dots$$

Το σχετικό βάρος μιας απολαβής στην περίοδο $t + j + 1$ έναντι μιας απολαβής στην περίοδο $t + j$ είναι πάντοτε

$$\frac{D(j+1)}{D(j)} = \delta.$$

Δεν εξαρτάται από το πόσο μακριά βρίσκονται οι δύο περίοδοι από το παρόν. Επιπλέον,

$$D(j+k) = D(j)D(k).$$

Χάρη σε αυτή την πολλαπλασιαστική ιδιότητα,

$$U_t = u(c_t) + \delta U_{t+1}.$$

Η ίδια συνάρτηση συνέχειας χρησιμοποιείται σε κάθε ημερομηνία και η αρχή του δυναμικού προγραμματισμού εφαρμόζεται φυσικά.

Πρόταση 11.26 (Διατήρηση της σχετικής αξιολόγησης). Έστω δύο απολαβές A και B , διαθέσιμες έπειτα από j και k περιόδους αντίστοιχα, όπου $j < k$. Με εκθετική προεξόφληση, η σύγκριση είναι

$$\delta^j u(A) \text{ έναντι } \delta^k u(B).$$

Μία περίοδο αργότερα, εφόσον και οι δύο επιλογές παραμένουν μελλοντικές, η σύγκριση γίνεται

$$\delta^{j-1} u(A) \text{ έναντι } \delta^{k-1} u(B).$$

Οι δύο ποσότητες έχουν πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο θετικό παράγοντα $1/\delta$. Επομένως η κατάταξή τους δεν αλλάζει.

Μη εκθετική προεξόφληση

Έστω τώρα προεξόφληση νόμου δύναμης,

$$D(j) = \frac{1}{(1+j)^p}, \quad p > 0.$$

Τότε

$$\frac{D(j+1)}{D(j)} = \left(\frac{j+1}{j+2} \right)^p,$$

το οποίο εξαρτάται από το j . Η σχετική προεξόφληση δύο διαδοχικών περιόδων είναι ισχυρότερη κοντά στο παρόν και ασθενέστερη στο μακρινό μέλλον.

Η ιδιότητα

$$D(j+k) = D(j)D(k)$$

δεν ισχύει γενικά. Συνεπώς η μετατόπιση της ημερομηνίας αξιολόγησης μπορεί να μεταβάλει τη σχετική κατάταξη δύο επιλογών.

Αριθμητικό παράδειγμα αντιστροφής

Θεωρούμε γραμμική στιγμιαία χρησιμότητα

$$u(c) = c$$

και υπερβολική προεξόφληση

$$D(j) = \frac{1}{1+j}.$$

Στην ημερομηνία 0, ο φορέας επιλέγει μεταξύ:

A : 10 μονάδες κατανάλωσης στην ημερομηνία 1,

B : 16 μονάδες κατανάλωσης στην ημερομηνία 2.

Οι προεξοφλημένες αξίες είναι

$$V_0(A) = \frac{10}{2} = 5,$$

και

$$V_0(B) = \frac{16}{3} > 5.$$

Άρα, στην ημερομηνία 0, ο φορέας προτιμά το B .

Όταν φτάσει η ημερομηνία 1, η ίδια επιλογή συγκρίνεται πλέον ως:

A : 10 μονάδες αμέσως,

B : 16 μονάδες έπειτα από μία περίοδο.

Οι νέες αξίες είναι

$$V_1(A) = 10,$$

και

$$V_1(B) = \frac{16}{2} = 8.$$

Άρα, στην ημερομηνία 1, ο φορέας προτιμά το A .

Έχουμε επομένως αντιστροφή προτιμήσεων:

$$B \succ_0 A, \quad A \succ_1 B.$$

Το σχέδιο αναμονής που επιλέχθηκε στην ημερομηνία 0 εγκαταλείπεται όταν η μικρότερη και εγγύτερη απολαβή γίνει άμεσα διαθέσιμη.

Οιονεί υπερβολική προεξόφληση

Στα συμπεριφορικά οικονομικά χρησιμοποιείται συχνά η β - δ προεξόφληση:

$$U_t = u(c_t) + \beta \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j u(c_{t+j}), \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 0 < \delta < 1.$$

Η παράμετρος δ περιγράφει τη συνήθη μακροχρόνια προεξόφληση, ενώ η παράμετρος β περιγράφει μια πρόσθετη υποτίμηση όλων των απολαβών που δεν ανήκουν στο παρόν.

Αν

$$\beta = 1,$$

ανακτούμε την εκθετική προεξόφληση. Αν

$$\beta < 1,$$

υπάρχει μεροληψία υπέρ του παρόντος: η άμεση κατανάλωση λαμβάνει δυσανάλογα μεγάλο βάρος σε σχέση με κάθε μελλοντική κατανάλωση.

Σύνδεση με το δένδρο συσσώρευσης

Στο υπόδειγμα κεφαλαιακής συσσώρευσης, ένα σχέδιο στην ημερομηνία 0 είναι μια ακολουθία

$$(s_0, s_1, s_2, \dots)$$

ή, ισοδύναμα, ένα μονοπάτι μέσα στο δένδρο αποφάσεων.

Ένας φορέας μπορεί αρχικά να σχεδιάζει υψηλή μελλοντική αποταμίευση:

$$s_1 = s_H.$$

Όταν όμως φτάσει η περίοδος 1, η κατανάλωση c_1 είναι πλέον άμεση. Αν υπάρχει μεροληψία υπέρ του παρόντος, ο φορέας μπορεί να αναθεωρήσει το σχέδιο και να επιλέξει

$$s_1 = s_L < s_H.$$

Άρα πρέπει να διακρίνουμε:

το σχέδιο που επιλέγεται στην ημερομηνία 0

από

τις αποφάσεις που πράγματι εφαρμόζονται σε κάθε ημερομηνία.

Με χρονικά συνεπείς προτιμήσεις, το άριστο αρχικό μονοπάτι παραμένει άριστο σε κάθε μελλοντικό υποπρόβλημα. Με χρονικά ασυνεπείς προτιμήσεις, οι μελλοντικές εκδοχές του ίδιου φορέα μπορεί να επιθυμούν διαφορετικές συνέχειες.

Αφελής και εξελιγμένος φορέας

Ένας χρονικά ασυνεπής φορέας μπορεί να αντιμετωπίζει τη μελλοντική αναθεώρηση με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Ορισμός 11.27 (Αφελής φορέας). Ένας φορέας είναι *αφελής* όταν δεν προβλέπει ότι οι μελλοντικές του προτιμήσεις θα διαφέρουν από τις σημερινές. Κατασκευάζει ένα σχέδιο θεωρώντας λανθασμένα ότι οι μελλοντικές εκδοχές του θα το εφαρμόσουν.

Ορισμός 11.28 (Εξελιγμένος φορέας). Ένας φορέας είναι *εξελιγμένος* όταν προβλέπει τη μελλοντική αντιστροφή των προτιμήσεών του. Αντιμετωπίζει τις μελλοντικές εκδοχές του εαυτού του ως διαδοχικούς φορείς λήψης αποφάσεων και επιλέγει λαμβάνοντας υπόψη τις μελλοντικές αντιδράσεις τους.

Στη δεύτερη περίπτωση, το πρόβλημα μοιάζει με δυναμικό παίγνιο μεταξύ των διαδοχικών «εαυτών» του ίδιου οικονομικού φορέα.

Μηχανισμοί δέσμευσης

Αν ο φορέας προβλέπει ότι θα αναθεωρήσει ένα επιθυμητό μακροχρόνιο σχέδιο, μπορεί να αναζητήσει έναν *μηχανισμό δέσμευσης*. Παραδείγματα είναι:

- συνταξιοδοτικοί λογαριασμοί με περιορισμούς πρόωρης ανάληψης,
- συμβόλαια αποταμίευσης με κόστος ακύρωσης,
- αυτόματες κρατήσεις από τον μισθό,
- προθεσμιακές καταθέσεις,

- προαναγγελία ή νομοθετική δέσμευση μιας δημόσιας πολιτικής,
- ανεξάρτητες αρχές στις οποίες εκχωρείται μέρος της μελλοντικής διακριτικής ευχέρειας.

Η ζήτηση για δέσμευση αποτελεί χαρακτηριστική οικονομική συνέπεια της χρονικής ασυνέπειας. Ο φορέας αποδέχεται σήμερα έναν περιορισμό των μελλοντικών επιλογών του, επειδή προβλέπει ότι η μελλοντική ελευθερία επιλογής μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητη αναθεώρηση.

Προσοχή

Η χρονική ασυνέπεια δεν πρέπει να συγχέεται με την ορθολογική αναθεώρηση μιας απόφασης λόγω νέων πληροφοριών. Αν μεταβληθούν η τεχνολογία, οι τιμές, το εισόδημα ή οι πιθανότητες, είναι φυσικό να μεταβληθεί και η άριστη επιλογή.

Χρονική ασυνέπεια υπάρχει όταν η κατάταξη αλλάζει αποκλειστικά λόγω της μετατόπισης της ημερομηνίας αξιολόγησης, ενώ οι απολαβές, οι δυνατότητες και οι διαθέσιμες πληροφορίες παραμένουν κατά τα άλλα ίδιες.

Σχέση με την εξίσωση Bellman

Με εκθετική προεξόφληση, η αναδρομική δομή γράφεται σχηματικά ως

$$V(k) = \max_{0 \leq k' \leq k^\alpha} \{u(k^\alpha - k') + \delta V(k')\}.$$

Η συνάρτηση V περιγράφει με τον ίδιο τρόπο το πρόβλημα κάθε μελλοντικής ημερομηνίας.

Με χρονικά ασυνεπείς προτιμήσεις, η απλή αυτή εξίσωση Bellman δεν μεταφέρεται αυτούσια, επειδή ο σημερινός φορέας και ο αυριανός φορέας δεν αξιολογούν με τον ίδιο τρόπο τη συνέχεια. Χρειάζεται είτε:

- ένας μηχανισμός δέσμευσης,
- μια κατάλληλα διευρυμένη περιγραφή της κατάστασης ή
- μια έννοια ισορροπίας μεταξύ διαδοχικών εαυτών.

Έτσι η χρονική συνέπεια δεν είναι μόνο συμπεριφορική υπόθεση. Είναι και η ιδιότητα που επιτρέπει την απλή αναδρομική διάσπαση ενός προβλήματος άπειρου ορίζοντα.

Κεφάλαιο 12

Σύντομη εισαγωγή στις δυναμοσειρές

12.1 Δυναμοσειρές και βασική γεωμετρία σύγκλισης

Ορισμός 12.1 (Δυναμοσειρά). Δυναμοσειρά με κέντρο $a \in \mathbb{R}$ και συντελεστές $(c_n)_{n \geq 0}$ είναι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο αντικαθιστούμε x με $z \in \mathbb{C}$.

Η δυναμοσειρά πάντοτε συγκλίνει στο κέντρο, επειδή η τιμή της εκεί είναι c_0 . Η ουσιαστική ερώτηση είναι για ποιες άλλες τιμές συγκλίνει.

Θεώρημα 12.2 (Γεωμετρία του συνόλου σύγκλισης). Για κάθε δυναμοσειρά υπάρχει μοναδικό $R \in [0, +\infty]$ τέτοιο ώστε:

- (i) συγκλίνει απόλυτα όταν $|x - a| < R$,
- (ii) αποκλίνει όταν $|x - a| > R$,
- (iii) στα σημεία $|x - a| = R$ απαιτείται χωριστός έλεγχος.

Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης.

Στο $\mathbb{R}$, το εσωτερικό του συνόλου σύγκλισης είναι το διάστημα $(a - R, a + R)$. Στο $\mathbb{C}$, είναι ο ανοικτός δίσκος $\{z : |z - a| < R\}$.

Παράδειγμα 12.3 (Η γεωμετρική σειρά).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

Η ακτίνα είναι $R = 1$. Στα δύο άκρα $x = \pm 1$ η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 12.4 (Διαφορετική συμπεριφορά στα δύο άκρα). Για

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^n$$

έχουμε $R = 1$. Στο $x = 0$ προκύπτει η αρμονική σειρά και υπάρχει απόκλιση, ενώ στο $x = 2$ προκύπτει η εναλλάσσουσα αρμονική και υπάρχει σύγκλιση. Άρα το σύνολο σύγκλισης είναι $(0, 2]$.

12.2 Το θεώρημα Cauchy–Hadamard

Θεώρημα 12.5 (Cauchy–Hadamard). Για τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

θέτουμε

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}.$$

Τότε

$$\boxed{\frac{1}{R} = L},$$

με τις συμβάσεις $1/0 = +\infty$ και $1/(+\infty) = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $u_n = c_n (z - a)^n$. Τότε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} = |z - a| \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = L |z - a|.$$

Αν $L |z - a| < 1$, το ριζικό κριτήριο δίνει απόλυτη σύγκλιση. Αν $L |z - a| > 1$, υπάρχει υπακολουθία για την οποία $|u_n|^{1/n} > 1 + \varepsilon$, οπότε οι όροι u_n δεν τείνουν στο μηδέν και η σειρά αποκλίνει. Το όριο μεταξύ των δύο περιοχών είναι $|z - a| = 1/L$. $\square$

Εμβάθυνση – γιατί χρησιμοποιούμε $\limsup$

Το απλό όριο $\lim |c_n|^{1/n}$ μπορεί να μην υπάρχει. Το $\limsup$ καταγράφει τον μεγαλύτερο ασυμπτωτικό εκθετικό ρυθμό των συντελεστών και συνεπώς ελέγχει ακόμη και αραιές υπακολουθίες μεγάλων όρων. Για παράδειγμα, αν

$$c_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ άρτιος,} \\ 3^n, & n \text{ περιττός,} \end{cases}$$

τότε $|c_n|^{1/n}$ δεν συγκλίνει, αλλά $\limsup |c_n|^{1/n} = 3$, άρα $R = 1/3$.

Πρόταση 12.6 (Κριτήριο λόγου ως ειδική περίπτωση). Αν υπάρχει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \ell,$$

τότε $R = 1/\ell$, με τις ίδιες συμβάσεις για 0 και $+\infty$.

Προσοχή

Το κριτήριο λόγου μπορεί να μην εφαρμόζεται όταν κάποιοι συντελεστές μηδενίζονται ή όταν ο λόγος δεν έχει όριο. Το Cauchy–Hadamard εξακολουθεί να εφαρμόζεται χωρίς αυτές τις προϋποθέσεις.

Παράδειγμα 12.7 (Τρεις ακραίες περιπτώσεις).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n : \quad |c_n|^{1/n} &= (n!)^{1/n} \rightarrow +\infty, & R &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} : \quad |c_n|^{1/n} &= (n!)^{-1/n} \rightarrow 0, & R &= +\infty, \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} : \quad c_n &\in \{0, 1\}, \quad \limsup |c_n|^{1/n} = 1, & R &= 1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 12.8 (Το σύνολο δεν καθορίζεται από το Hadamard). Για $R = 1$, οι σειρές

$$\sum x^n, \quad \sum \frac{x^n}{n}, \quad \sum \frac{x^n}{n^2}$$

έχουν την ίδια ακτίνα αλλά διαφορετική συμπεριφορά στα $x = \pm 1$. Η ακτίνα περιγράφει το εσωτερικό και το εξωτερικό, όχι το σύνολο.

Εμβάθυνση – μιγαδική ερμηνεία της ακτίνας

Για μια αναλυτική συνάρτηση, η ακτίνα της σειράς Taylor γύρω από το a είναι η απόσταση από το a μέχρι την πλησιέστερη μιγαδική ιδιομορφία. Έτσι η πραγματική συνάρτηση

$$\frac{1}{1+x^2}$$

είναι ομαλή για κάθε πραγματικό x , αλλά η σειρά Taylor γύρω από το 0 έχει $R = 1$, επειδή οι μιγαδικές ιδιομορφίες είναι στα $z = \pm i$.

12.3 Πράξεις και αναλυτικές ιδιότητες

Πρόταση 12.9 (Ισότητα δυναμοσειρών). Αν δύο δυναμοσειρές με το ίδιο κέντρο συμπίπτουν σε ανοικτό διάστημα γύρω από το κέντρο, τότε οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \implies a_n = b_n \text{ για κάθε } n.$$

Πρόταση 12.10 (Άθροισμα, βαθμωτό γινόμενο και Cauchy). Έστω

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n.$$

Μέσα στην κοινή περιοχή απόλυτης σύγκλισης,

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n, \\ \lambda A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n(x-a)^n, \\ A(x)B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-a)^n. \end{aligned}$$

Θεώρημα 12.11 (Τοπική ομοιόμορφη σύγκλιση). Αν μια δυναμοσειρά έχει ακτίνα $R > 0$, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[a-r, a+r]$ με $0 < r < R$. Επομένως το άθροισμά της είναι συνεχές στο $(a-R, a+R)$.

Θεώρημα 12.12 (Παραγωγή και ολοκλήρωση κατά όρους). Αν

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

έχει ακτίνα R , τότε για $|x - a| < R$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (x-a)^n,$$

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

Οι νέες σειρές έχουν την ίδια ακτίνα R .

Παράδειγμα 12.13. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad |x| < 1.$$

Στο $x = 1/2$ παίρνουμε $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)/2^n = 4$.

12.4 Άλγεβρα και αντιστρεψιμότητα δυναμοσειρών

12.4.1 Τυπικές έναντι συγκλινουσών σειρών

Ορισμός 12.14 (Δακτύλιος τυπικών δυναμοσειρών). Το $\mathbb{K}[[x]]$ είναι το σύνολο όλων των τυπικών εκφράσεων

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{K},$$

με πρόσθεση κατά συντελεστή και γινόμενο Cauchy. Στην τυπική θεωρία δεν ρωτάμε αν η σειρά συγκλίνει για κάποια αριθμητική τιμή του x .

Θεώρημα 12.15 (Μονάδες στο $\mathbb{K}[[x]]$). // Μια τυπική δυναμοσειρά

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο $\mathbb{K}[[x]]$ αν και μόνο αν $a_0 \neq 0$.

Απόδειξη. Αν $A(x)B(x) = 1$, ο σταθερός όρος δίνει $a_0 b_0 = 1$, άρα $a_0 \neq 0$. Αντίστροφα, για $a_0 \neq 0$ θέτουμε

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Τότε ο σταθερός συντελεστής του AB είναι 1, ενώ κάθε συντελεστής θετικού βαθμού είναι 0. Η αναδρομή προσδιορίζει μοναδικά το B . $\square$

Ερμηνεία

Στον δακτύλιο πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$, οι μόνες αντιστρέψιμες ποσότητες είναι οι μη μηδενικές σταθερές, επειδή $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. Στο $\mathbb{K}[[x]]$, κάθε σειρά με μη μηδενικό σταθερό όρο είναι αντιστρέψιμη. Το αντίστροφο συνήθως χρειάζεται απειρους όρους και γι' αυτό δεν είναι πολυώνυμο.

Παράδειγμα 12.16 (Γεωμετρική αντιστροφή).

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Το $1-x$ δεν είναι μονάδα στο $\mathbb{K}[x]$, αλλά είναι μονάδα στο $\mathbb{K}[[x]]$.

Παράδειγμα 12.17 (Οι αριθμοί Fibonacci από ένα αντίστροφο). Από

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

και την ταυτότητα $(1-x-x^2) \sum b_n x^n = 1$ προκύπτει

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Άρα το αντίστροφο κωδικοποιεί την ακολουθία Fibonacci.

Πρόταση 12.18 (Αναλυτική αντιστρεψιμότητα). Αν η A είναι αναλυτική κοντά στο a και $A(a) \neq 0$, τότε το $1/A$ είναι αναλυτικό σε κάποια γειτονιά του a . Η ακτίνα της σειράς του $1/A$ περιορίζεται από το πλησιέστερο μηδενικό ή την πλησιέστερη ιδιομορφία της A στο μιγαδικό επίπεδο.

Προσοχή

Η πολλαπλασιαστική αντιστροφή $1/A(x)$ δεν είναι το ίδιο με την αντίστροφη συνάρτηση $A^{-1}(x)$. Για να υπάρχει τυπικό αντίστροφο ως προς σύνθεση απαιτούνται

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = a_1 \neq 0.$$

Τότε υπάρχει μοναδική B με $A(B(x)) = B(A(x)) = x$.

Παράδειγμα 12.19 (Αντιστροφή ως προς σύνθεση). Η σειρά $A(x) = x + x^2$ δεν είναι πολλαπλασιαστικά αντιστρέψιμη, επειδή $A(0) = 0$, αλλά είναι αντιστρέψιμη ως προς σύνθεση, επειδή $A'(0) = 1$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι

$$B(x) = \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} = x - x^2 + 2x^3 - 5x^4 + \dots$$

12.5 Αναλυτικές συναρτήσεις και τοπική πληροφορία

Ορισμός 12.20 (Αναλυτική συνάρτηση). Μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ανοικτό σύνολο U αν για κάθε $a \in U$ υπάρχει γειτονιά του a στην οποία

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

με θετική ακτίνα σύγκλισης. Δηλαδή η συνάρτηση διαθέτει τοπική αναπαράσταση με δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο.

Οι τοπικές αναπαραστάσεις δεν είναι ανεξάρτητες: όταν δύο γειτονιές επικαλύπτονται, οι αντίστοιχες σειρές περιγράφουν την ίδια συνάρτηση και συμφωνούν στην τομή τους. Αυτή είναι η βασική ιδέα της γλώσσας των δραγμάτων (sheaves). Σε κάθε ανοικτό $V \subseteq U$ αντιστοιχίζουμε τον δακτύλιο $\mathcal{O}(V)$ των αναλυτικών συναρτήσεων στο V , μαζί με απεικονίσεις περιορισμού. Συμβατά τοπικά κομμάτια συγκολλώνονται μοναδικά σε μια συνάρτηση στο ενωμένο πεδίο. Η ορολογία είναι προχωρημένη, αλλά το μήνυμα απλό: η ολική πληροφορία μπορεί να οργανωθεί από συνεπείς τοπικές περιγραφές.

Εμβάθυνση – Τοπικές οικονομικές αναπαραστάσεις

Κοντά σε μια κανονική ισορροπία, το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης συχνά γράφει ενδογενείς μεταβλητές, συναρτήσεις πολιτικής ή συνάρτηση αξίας ως αναλυτικές συναρτήσεις παραμέτρων και καταστάσεων. Οι σειρές Taylor δίνουν τοπικούς κανόνες απόφασης. Όταν επικαλύπτονται περιοχές γύρω από διαφορετικές καταστάσεις ισορροπίας, η συμφωνία των τοπικών κανόνων στην επικάλυψη είναι ακριβώς μια συνθήκη συγκόλλησης. Αλλαγές καθεστώτος, σημεία διακλάδωσης ή δεσμευτικοί περιορισμοί μπορεί να εμποδίσουν αυτή τη συνέχιση· έτσι η τοπική αναλυτικότητα δεν πρέπει να συγχέεται με μία μοναδική παγκόσμια φόρμουλα.

12.6 Η εκθετική συνάρτηση από μια δυναμοσειρά

Η σειρά

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

έχει ακτίνα $R = +\infty$. Με παραγωγή κατά όρους,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = F(x),$$

και $F(0) = 1$. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

έχει μοναδική λύση, άρα

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Γύρω από αυθαίρετο κέντρο a ,

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Αυτό εκφράζει την ανεξαρτησία της αναλυτικής συνάρτησης από το κέντρο ανάπτυξης.

12.7 Διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο δυναμοσειρών**12.7.1 Η γενική μέθοδος**

Για μια εξίσωση

$$G(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$$

αναζητούμε λύση

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Παραγωγίζουμε κατά όρους, αντικαθιστούμε στην εξίσωση και εξισώνουμε συντελεστές ίδιων δυνάμεων. Οι αρχικές συνθήκες προσδιορίζουν τους ελεύθερους συντελεστές.

Παράδειγμα 12.21 (Γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης). Για

$$y' - \alpha y = b, \quad \alpha \neq 0,$$

θέτουμε $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Η εξίσωση δίνει

$$a_1 - \alpha a_0 = b, \quad (n+1)a_{n+1} = \alpha a_n, \quad n \geq 1.$$

Άρα

$$y(x) = Ce^{\alpha x} - \frac{b}{\alpha}.$$

Για $\alpha = 0$, η λύση είναι $y(x) = C + bx$.

Παράδειγμα 12.22 (Πολυωνυμικός εξαναγκασμός). Για

$$y' - 2y = 1 + x, \quad y(0) = 0,$$

η μέθοδος συντελεστών δίνει

$$(n+1)a_{n+1} - 2a_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 1, & n=1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

Με $a_0 = 0$ βρίσκουμε $a_1 = 1$, $a_2 = 3/2$ και $a_{n+1} = 2a_n/(n+1)$ για $n \geq 2$. Η κλειστή μορφή είναι

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}.$$

Παράδειγμα 12.23 (Απλός αρμονικός ταλαντωτής). Για

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B,$$

η αναδρομή είναι

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

Οι άρτιοι και περιττοί συντελεστές αποσυνδέονται και

$$y(x) = A \cos(\omega x) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega x).$$

Οι σειρές ημιτόνου και συνημιτόνου προκύπτουν απευθείας από την αναδρομή.

Παράδειγμα 12.24 (Εξίσωση Airy). Για

$$y'' - xy = 0$$

η αντικατάσταση $y = \sum a_n x^n$ δίνει

$$2a_2 = 0, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Οι a_0, a_1 είναι ελεύθεροι και οι υπόλοιποι προσδιορίζονται αναδρομικά. Η μέθοδος κατασκευάζει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις ακόμη κι όταν δεν υπάρχει απλή στοιχειώδης μορφή.

Παράδειγμα 12.25 (Η εξίσωση Jacobi και τα ορθογώνια πολυώνυμα). Για $\alpha, \beta > -1$ και $m \in \mathbb{N}$ εξετάζουμε

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + m(m + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

Με $y = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ και $\lambda = m(m + \alpha + \beta + 1)$, η ταύτιση συντελεστών δίνει

$$a_{k+2} = -\frac{(\beta - \alpha)(k + 1)a_{k+1} + [\lambda - k(k + \alpha + \beta + 1)]a_k}{(k + 2)(k + 1)}.$$

Για την κατάλληλη αρχική σχέση των a_0, a_1 η αναδρομή τερματίζει στον βαθμό m και παράγει, μέχρι κανονικοποίηση, το πολυώνυμο Jacobi $P_m^{(\alpha, \beta)}$. Πρόκειται για κλασικό παράδειγμα στο οποίο μια διαφορική εξίσωση, μια δυναμοσειρά και ένα σύστημα ορθογώνιων πολυωνύμων είναι τρεις όψεις της ίδιας δομής.

Παράδειγμα 12.26 (Λογιστική μεγέθυνση γύρω από το 0). Για

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad y(0) = y_0,$$

θέτουμε $y = \sum a_n x^n$. Το γινόμενο Cauchy δίνει

$$(n + 1)a_{n+1} = ra_n - \frac{r}{K} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}, \quad a_0 = y_0.$$

Πρόκειται για μη γραμμική αναδρομή. Οι πρώτοι συντελεστές είναι

$$a_1 = ry_0 \left(1 - \frac{y_0}{K}\right),$$

$$a_2 = \frac{r}{2} a_1 \left(1 - \frac{2y_0}{K}\right).$$

Παράδειγμα 12.27 (Το υπόδειγμα Solow ως αναλυτική τροχιά). Στο βασικό συνεχές υπόδειγμα ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας,

$$\dot{k} = sAk^\alpha - (n + \delta)k, \quad 0 < \alpha < 1, \text{quad}k(0) = k_0 > 0.$$

Ο μετασχηματισμός $z = k^{1-\alpha}$ μετατρέπει τη μη γραμμική εξίσωση στη γραμμική

$$\dot{z} = (1 - \alpha)[sA - (n + \delta)z].$$

Αν $z^* = sA/(n + \delta)$ και $\gamma = (1 - \alpha)(n + \delta)$, τότε

$$z(t) = z^* + (z_0 - z^*)e^{-\gamma t}, \quad k(t) = [z^* + (z_0 - z^*)e^{-\gamma t}]^{1/(1-\alpha)}.$$

Η ανάπτυξη $e^{-\gamma t} = \sum_{j \geq 0} (-\gamma t)^j / j!$, μαζί με τη διωνυμική σειρά γύρω από οποιοδήποτε σημείο όπου η αγκύλη είναι θετική, δίνει τοπική δυναμοσειρά για την τροχιά του κεφαλαίου. Έτσι η λύση μέσω μετασχηματισμού και η λύση μέσω δυναμοσειρών συμφωνούν, ενώ η ακτίνα της τοπικής αναπαράστασης ελέγχεται από τις πλησιέστερες μιγαδικές ιδιομορφίες της σύνθεσης.

12.7.2 Δυναμική προσαρμογή τιμών

Έστω γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς

$$D(p) = c_0 - c_1 p, \quad S(p) = c_2 + c_3 p,$$

με $c_0 - c_2 > 0$ και $c_1, c_3 > 0$. Η τιμή ισορροπίας είναι

$$p^e = \frac{c_0 - c_2}{c_1 + c_3}.$$

Αν η τιμή προσαρμόζεται σύμφωνα με

$$p'(t) = k(D(p(t)) - S(p(t))), \quad k > 0,$$

τότε

$$p'(t) + k(c_1 + c_3)p(t) = k(c_0 - c_2).$$

Με αρχική τιμή $p(t_0) = p_0$,

$$p(t) = p^e + (p_0 - p^e)e^{-k(c_1+c_3)(t-t_0)}.$$

Επειδή $k(c_1 + c_3) > 0$, έχουμε $p(t) \rightarrow p^e$. Η ισορροπία είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Εμβάθυνση – δεύτερης τάξης προσαρμογή

Αν υπάρχει αδράνεια,

$$p'' + \gamma p' + \omega^2(p - p^e) = 0,$$

η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 + \gamma r + \omega^2 = 0.$$

Για $\gamma^2 < 4\omega^2$ έχουμε φθίνουσες ταλαντώσεις γύρω από την ισορροπία. Για $\gamma^2 > 4\omega^2$ η προσαρμογή είναι μονότονη ή συνδυασμός δύο εκθετικών ρυθμών. Η δυναμοσειρά παράγει την ίδια χαρακτηριστική αναδρομή για τους συντελεστές.

12.8 Δυναμοσειρές και πιθανοτικές γεννήτριες

12.8.1 Τρεις γεννήτριες

Για τυχαία μεταβλητή X χρησιμοποιούμε:

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{E}[s^X] && \text{(πιθανογεννήτρια, για } X \in \mathbb{N}), \\ M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] && \text{(ροπογεννήτρια, όταν είναι πεπερασμένη),} \\ \varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] && \text{(χαρακτηριστική συνάρτηση).} \end{aligned}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση υπάρχει πάντοτε. Αν υπάρχουν οι αντίστοιχες ροπές, τα αναπτύγματα γύρω από το μηδέν είναι

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k, \quad \varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k.$$

Προσοχή

Η ύπαρξη όλων των ροπών δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι η ροπογεννήτρια είναι πεπερασμένη σε γειτονιά του μηδενός. Οι αποδείξεις με χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι γενικότερες.

12.8.2 Ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών

Θεώρημα 12.28 (ANM μέσω χαρακτηριστικών συναρτήσεων). Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ και $\mathbb{E}[X_1] = \mu$. Τότε

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Απόδειξη. Η ύπαρξη πρώτης ροπής δίνει το ανάπτυγμα

$$\varphi_X(u) = 1 + i\mu u + o(u), \quad u \rightarrow 0.$$

Λόγω ανεξαρτησίας,

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \left[\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left[1 + \frac{i\mu t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \rightarrow e^{i\mu t}.$$

Η οριακή συνάρτηση είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της σταθεράς μ . Από το θεώρημα συνέχειας του Lévy, $\bar{X}_n \Rightarrow \mu$. Σύγκλιση κατά κατανομή προς σταθερά ισοδυναμεί με σύγκλιση κατά πιθανότητα. $\square$

Παράδειγμα 12.29 (Bernoulli). Αν $X_j \sim \text{Bernoulli}(p)$, τότε

$$M_{\bar{X}_n}(t) = \left(1 - p + pe^{t/n} \right)^n.$$

Επειδή $e^{t/n} = 1 + t/n + O(n^{-2})$,

$$M_{\bar{X}_n}(t) = \left(1 + \frac{pt}{n} + O(n^{-2}) \right)^n \rightarrow e^{pt},$$

τη ροπογεννήτρια της σταθεράς p .

12.8.3 Κεντρικό οριακό θεώρημα

Θεώρημα 12.30 (ΚΟΘ μέσω ανάπτυξης δεύτερης τάξης). Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες με

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu, \quad \text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Τότε

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $Y = (X_1 - \mu)/\sigma$. Τότε $\mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = 1$, και κοντά στο μηδέν

$$\varphi_Y(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Από την ανεξαρτησία,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left[\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Αυτή είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $N(0, 1)$. Το θεώρημα συνέχειας του Lévy ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ερμηνεία

Ο ANM χρησιμοποιεί τον γραμμικό όρο του αναπτύγματος και κρατά τη μέση τιμή. Το ΚΟΘ, μετά την κέντρωση, μηδενίζει τον γραμμικό όρο και ο τετραγωνικός όρος της διακύμανσης καθορίζει το κανονικό όριο. Οι υψηλότερης τάξης όροι εξαφανίζονται στην κλιμάκωση $1/\sqrt{n}$.

Εμβάθυνση – σύνδεση με σωρευτές

Αν η ροπογεννήτρια υπάρχει κοντά στο 0, η σωρευτογεννήτρια $K_X(t) = \log M_X(t)$ έχει ανάπτυγμα

$$K_X(t) = \kappa_1 t + \frac{\kappa_2}{2} t^2 + \frac{\kappa_3}{3!} t^3 + \dots,$$

όπου $\kappa_1 = \mu$ και $\kappa_2 = \sigma^2$. Για άθροισμα ανεξάρτητων μεταβλητών οι σωρευτές αθροίζονται. Με την κανονικοποίηση του ΚΟΘ, οι σωρευτές τάξης $r \geq 3$ κλιμακώνονται ως $n^{1-r/2}$ και τείνουν στο μηδέν. Παραμένει μόνο η διακύμανση, δηλαδή ο τετραγωνικός εκθέτης της κανονικής κατανομής.

12.9 Η πανταχού παρουσία των δυναμοσειρών

Οι δυναμοσειρές αποτελούν κοινή γλώσσα σε μεγάλα τμήματα των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών. Περιγράφουν αναλυτικές συναρτήσεις, κωδικοποιούν ακολουθίες και συνδυαστικές δομές, κατασκευάζουν λύσεις διαφορικών εξισώσεων και αποκαλύπτουν τη θέση ιδιομορφιών μέσω της ακτίνας σύγκλισης.

Στις πιθανότητες οργανώνουν ροπές, κατανομές και οριακά θεωρήματα. Στην αριθμητική ανάλυση παράγουν τοπικές προσεγγίσεις και ελέγχους σφάλματος. Στη φυσική και τη μηχανική εκφράζουν αποκρίσεις, διαταραχές και φασματικές λύσεις. Στα οικονομικά εμφανίζονται σε παρούσες αξίες, δυναμικά υποδείγματα, συναρτήσεις πολιτικής και αξίας, συγκριτική στατική, γεννήτριες πιθανοτήτων και τοπικές προσεγγίσεις ισορροπίας.

Η δύναμή τους βρίσκεται στον συνδυασμό δύο χαρακτηριστικών:

- είναι αρκετά αλγεβρικές ώστε να υπολογίζονται συντελεστή προς συντελεστή,
- και αρκετά αναλυτικές ώστε, μέσα στον δίσκο σύγκλισης, να αναπαριστούν συναρτήσεις με πλήρη έλεγχο.

12.9.1 Μια δυναμοσειρά ως συσκευασία μιας ακολουθίας

Έστω μια ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών

$$(a_n)_{n \geq 0}.$$

Η αντίστοιχη συνήθης γεννήτρια συνάρτηση είναι η τυπική ή αναλυτική δυναμοσειρά

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Η συνάρτηση A συσκευάζει όλους τους όρους της ακολουθίας σε ένα ενιαίο αντικείμενο. Ο n -οστός όρος της ακολουθίας είναι ακριβώς ο συντελεστής του z^n .

Όταν η σειρά έχει θετική ακτίνα σύγκλισης, οι συντελεστές μπορούν να ανακτηθούν από τις παραγώγους:

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

Επομένως, η γνώση της αναλυτικής συνάρτησης A σε οποιαδήποτε γειτονιά του 0 προσδιορίζει ολόκληρη την ακολουθία

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

Η αντιστοιχία

$$(a_n)_{n \geq 0} \longleftrightarrow A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

επιτρέπει να μετατρέπουμε προβλήματα ακολουθιών σε προβλήματα αλγεβρικών ή αναλυτικών συναρτήσεων.

Παρατήρηση 12.31. Στο πλαίσιο των τυπικών δυναμοσειρών δεν απαιτείται η σύγκλιση της σειράς για αριθμητικές τιμές του z . Η σειρά αντιμετωπίζεται ως αλγεβρική συσκευασία των συντελεστών. Στο αναλυτικό πλαίσιο, η ακτίνα σύγκλισης προσθέτει πληροφορία για το πού η συσκευασία ορίζει πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση.

12.9.2 Αλγεβρικές πράξεις και πληροφορία για τις ακολουθίες

Αν

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

τότε η πρόσθεση δίνει

$$A(z) + B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Άρα η πρόσθεση γεννητριών αντιστοιχεί στην κατά σημείο πρόσθεση ακολουθιών.

Το γινόμενο δίνει

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Άρα ο πολλαπλασιασμός γεννητριών αντιστοιχεί στο γινόμενο Cauchy των ακολουθιών.

Η παραγώγιση δίνει

$$A'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

οπότε κωδικοποιεί την ακολουθία

$$((n+1)a_{n+1})_{n \geq 0}.$$

Ο πολλαπλασιασμός με z μετατοπίζει τους συντελεστές:

$$zA(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n.$$

Αυτή η απλή ιδιότητα καθιστά τις γεννήτριες ιδιαίτερα χρήσιμες για την επίλυση αναδρομικών σχέσεων.

Παράδειγμα 12.32 (Η ακολουθία Fibonacci). Έστω

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Ορίζουμε

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

Χρησιμοποιώντας την αναδρομή,

$$\begin{aligned} F(z) - z &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} z^{n+2} \\ &= zF(z) + z^2 F(z). \end{aligned}$$

Άρα

$$(1 - z - z^2)F(z) = z$$

και επομένως

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Μια άπειρη αναδρομική ακολουθία έχει έτσι συμπιεστεί σε μία ρητή συνάρτηση.

12.9.3 Ακτίνα σύγκλισης και αύξηση των συντελεστών

Η ακτίνα σύγκλισης δεν περιγράφει μόνο το πεδίο στο οποίο η δυναμοσειρά ορίζει συνάρτηση. Περιέχει επίσης πληροφορίες για τον ρυθμό αύξησης των συντελεστών.

Από το θεώρημα Cauchy–Hadamard,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Άρα:

- μικρή ακτίνα σύγκλισης συνδέεται με ταχεία αύξηση των $|a_n|$,
- μεγάλη ακτίνα σύγκλισης συνδέεται με βραδύτερη αύξηση,
- και $R = \infty$ σημαίνει ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0.$$

Αντίστροφα, η θέση των πλησιέστερων μιγαδικών ιδιομορφιών μιας αναλυτικής συνάρτησης συχνά καθορίζει τον ασυμπτωτικό ρυθμό των συντελεστών της. Έτσι η τοπική ανάπτυξη γύρω από το 0 μπορεί να περιέχει πληροφορίες για τη μακροχρόνια συμπεριφορά της ακολουθίας.

12.9.4 Αποτίμηση πραγματικών σειρών μέσω μιας παραμέτρου

Έστω μια πραγματική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Αντί να εξετάσουμε αμέσως το συνοριακό σημείο $z = 1$, εισάγουμε μια παράμετρο $r \in [0, 1)$ και θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Ο παράγοντας r^n μειώνει τους όρους και συχνά μετατρέπει ένα δύσκολο συνοριακό πρόβλημα σε απολύτως συγκλίνουσα σειρά για κάθε $0 \leq r < 1$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε το όριο

$$\lim_{r \uparrow 1} A(r).$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *αβελιανή προσέγγιση* του συνοριακού σημείου.

Θεώρημα 12.33 (Θεώρημα του Abel). Αν η πραγματική ή μιγαδική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει στο S , τότε

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = S.$$

Το θεώρημα δηλώνει ότι η προσέγγιση του συνοριακού σημείου $z = 1$ από το εσωτερικό του δίσκου σύγκλισης διατηρεί το άθροισμα μιας ήδη συγκλίνουσας σειράς.

Παρατήρηση 12.34. Το θεώρημα του Abel έχει κατεύθυνση

σύγκλιση της σειράς $\implies$ ύπαρξη του αβελιανού ορίου.

Το αντίστροφο δεν ισχύει χωρίς πρόσθετες υποθέσεις. Θεωρήματα που εξάγουν πληροφορίες για τους συντελεστές ή για τη συνοριακή σειρά από τη συμπεριφορά της γεννήτριας ονομάζονται γενικά *ταουμπεριανά θεωρήματα*.

12.9.5 Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

Θα υπολογίσουμε το άθροισμα

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Για $|x| < 1$, η γεωμετρική σειρά δίνει

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Σε κάθε κλειστό διάστημα $[0, r]$, όπου $0 < r < 1$, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά όρους:

$$\int_0^r \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^r x^n dx.$$

Το αριστερό μέλος είναι

$$\int_0^r \frac{1}{1+x} dx = \log(1+r),$$

ενώ

$$\int_0^r x^n dx = \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

Επομένως

$$\boxed{\log(1+r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n+1}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Καθώς $r \uparrow 1$, το αριστερό μέλος συγκλίνει στο

$$\log 2.$$

Το θεώρημα του Abel επιτρέπει τη μετάβαση στο συνοριακό σημείο και δίνει

$$\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.}$$

Η κατασκευή μπορεί να παρουσιαστεί σχηματικά ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &\Downarrow \text{ολοκλήρωση} \\ \log(1+r) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n+1} \\ &\Downarrow r \uparrow 1 \\ \log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \end{aligned}$$

Παρατήρηση 12.35. Η σειρά συγκλίνει ήδη από το κριτήριο Leibniz. Η αβελιανή κατασκευή δεν χρησιμοποιείται εδώ για να αποδείξει απλώς τη σύγκλιση, αλλά για να προσδιορίσει την ακριβή τιμή του αθροίσματος.

12.9.6 Αβελιανή άθροιση αποκλινουσών σειρών

Η ίδια ιδέα μπορεί να επεκταθεί σε ορισμένες αποκλίνουσες σειρές.

Ορισμός 12.36 (Αβελιανό άθροισμα). Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

λέγεται *αβελιανά αθροίσιμη* στο S αν:

1. η δυναμοσειρά

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

συγκλίνει για κάθε $0 \leq r < 1$,

2. και

$$\lim_{r \uparrow 1} A(r) = S.$$

Για παράδειγμα, η σειρά του Grandi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

δεν συγκλίνει με τη συνήθη έννοια, επειδή τα μερικά αθροίσματά της εναλλάσσονται μεταξύ 1 και 0. Για $0 \leq r < 1$, όμως,

$$1 - r + r^2 - r^3 + \cdots = \frac{1}{1+r}.$$

Άρα

$$\lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2},$$

όπου το σύμβολο $\stackrel{(A)}{=}$ δηλώνει αβελιανή άθροιση και όχι συνήθη σύγκλιση.

Προσοχή

Η αβελιανή τιμή μιας αποκλίνουσας σειράς δεν είναι το συνηθισμένο άθροισμά της. Πρόκειται για επέκταση της έννοιας του αθροίσματος. Ο τύπος

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2}$$

δεν αναιρεί το γεγονός ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

δεν διαθέτει όριο.

12.9.7 Σχέση αβελιανής και Cesàro άθροισης

Αν μια σειρά είναι Cesàro-αθροίσιμη στο S , τότε είναι επίσης αβελιανά αθροίσιμη στο S . Επομένως η αβελιανή μέθοδος συμφωνεί με τη μέθοδο Cesàro όπου η δεύτερη εφαρμόζεται.

Η σχέση αυτή εξηγεί γιατί η σειρά του Grandi λαμβάνει την ίδια γενικευμένη τιμή και με τις δύο μεθόδους:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{(C)}{=} \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \stackrel{(A)}{=} \frac{1}{2}.$$

Η αβελιανή κατασκευή έχει όμως ένα ιδιαίτερο πλεονέκτημα: μετατρέπει το πρόβλημα άθροισης σε πρόβλημα οριακής συμπεριφοράς μιας αναλυτικής συνάρτησης.

12.9.8 Πιθανογεννήτριες και κατανομές

Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}_0$, η πιθανογεννήτριά της είναι

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)z^n.$$

Η συνάρτηση G_X συσκευάζει ολόκληρη την κατανομή πιθανότητας, αφού

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Επιπλέον,

$$G_X(1) = 1,$$

ενώ, όταν οι σχετικές ροπές είναι πεπερασμένες,

$$G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$$

και

$$G_X''(1) = \mathbb{E}[X(X-1)].$$

Επομένως μια δυναμοσειρά μπορεί να κωδικοποιεί όχι μόνο μια ακολουθία αριθμών αλλά μια ολόκληρη κατανομή και τις ροπές της.

12.9.9 Οικονομικές γεννήτριες

Έστω μια ακολουθία οικονομικών ροών

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

Η γεννήτρια

$$X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} x_t z^t$$

μπορεί να ερμηνευθεί με διάφορους τρόπους.

Αν $z = \beta \in (0, 1)$, τότε

$$X(\beta) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_t$$

είναι η προεξοφλημένη αξία της ροής.

Αν η (x_t) είναι η απόκριση ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος σε μια μοναδιαία διαταραχή, τότε η $X(z)$ κωδικοποιεί ολόκληρη την ακολουθία των δυναμικών πολλαπλασιαστών.

Αν

$$x_{t+1} = ax_t + b_t,$$

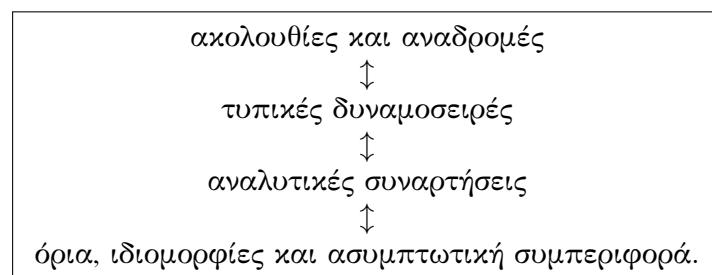
τότε οι γεννήτριες των (x_t) και (b_t) μετατρέπουν τη διαφορική εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική σχέση. Πολλές αναδρομικές οικονομικές δυναμικές μπορούν έτσι να επιλυθούν με τις ίδιες πράξεις που χρησιμοποιούνται για τις τυπικές δυναμοσειρές.

12.9.10 Από τοπική πληροφορία στην καθολική δομή

Μια δυναμοσειρά είναι αρχικά τοπική: αναπτύσσεται γύρω από ένα κέντρο και συγχλίνει μέσα σε έναν δίσκο. Παρ' όλα αυτά, οι συντελεστές της μπορούν να περιέχουν πληροφορία για:

- την καθολική μορφή της συνάρτησης,
- τις ιδιομορφίες της,
- τη μακροχρόνια συμπεριφορά μιας ακολουθίας,
- την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής,
- τη λύση μιας αναδρομής,
- και την αξία μιας άπειρης πραγματικής σειράς.

Αυτή είναι μία από τις βασικές αιτίες της πανταχού παρουσίας των δυναμοσειρών. Επιτρέπουν τη μετάφραση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών γλωσσών:



Οι συντελεστές δίνουν διακριτή πληροφορία, ενώ η συνάρτηση που δημιουργούν επιτρέπει τη χρήση συνεχών και μιγαδικών αναλυτικών μεθόδων. Η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη είναι συχνά εκείνη που μετατρέπει ένα δύσκολο πρόβλημα σε υπολογίσιμο.

12.10 Ασκήσεις

Άσκηση 12.37 (Hadamard χωρίς όριο λόγου). Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς με

$$c_n = \begin{cases} 4^n, & n = 2^k \text{ για κάποιο } k, \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εξηγήστε γιατί το κριτήριο λόγου δεν είναι κατάλληλο.

Άσκηση 12.38 (Αναδρομική αντιστροφή). Υπολογίστε τους πρώτους έξι συντελεστές του

$$\frac{1}{1 - 2x + x^3}.$$

Δώστε την αναδρομή που ικανοποιούν όλοι οι συντελεστές.

Άσκηση 12.39 (Σύνθεση). Βρείτε τους πρώτους τέσσερις μη μηδενικούς όρους της τυπικής αντίστροφης ως προς σύνθεση της $A(x) = x - x^2$.

Άσκηση 12.40 (Διαφορική εξίσωση). Με μέθοδο δυναμοσειρών βρείτε αναδρομή για τις λύσεις της

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B.$$

Υπολογίστε τους συντελεστές μέχρι και τον όρο x^6 .

Άσκηση 12.41 (Poisson και ΚΟΘ). Αν $X_j \sim \text{Poisson}(\lambda)$, χρησιμοποιήστε

$$M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

και ανάπτυγμα γύρω από το 0 για να δείξετε ότι

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Έλεγχος κατανόησης

Για κάθε νέα δυναμοσειρά ελέγχουμε:

1. την ακτίνα με $R^{-1} = \limsup |c_n|^{1/n}$,
2. τα συνοριακά σημεία χωριστά,
3. αν οι πράξεις γίνονται σε κοινό εσωτερικό δίσκο,
4. αν μιλάμε για τυπική ή αναλυτική ταυτότητα,
5. και, στις πιθανοτικές εφαρμογές, ποιες ροπές ή γεννήτριες πράγματι υπάρχουν.

Κεφάλαιο 13

Ενδεικτικές περαιτέρω έννοιες

13.1 Υπακολουθίες

Ορισμός 13.1 (Υπακολουθία). Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία. Αν

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε η $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ονομάζεται *υπακολουθία* της (x_n) . Η απαίτηση $n_k \rightarrow \infty$ σημαίνει ότι προχωρούμε απεριορίστα μέσα στην αρχική ακολουθία και δεν ανακυκλώνουμε πεπερασμένους όρους.

Θεώρημα 13.2 (Κληρονομικότητα του ορίου). Αν $x_n \rightarrow x$, τότε κάθε υπακολουθία (x_{n_k}) συγκλίνει επίσης στο x .

Απόδειξη. Για $\varepsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $n \geq N$ να συνεπάγεται $|x_n - x| < \varepsilon$. Επειδή $n_k \geq k$, για $k \geq N$ έχουμε $n_k \geq N$ και άρα $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. $\square$

Πόρισμα 13.3 (Κριτήριο απόκλισης). Αν δύο υπακολουθίες της (x_n) έχουν διαφορετικά όρια, τότε η (x_n) δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα 13.4. Για $x_n = (-1)^n + 1/n$, οι άρτιοι όροι συγκλίνουν στο 1 και οι περιττοί στο -1 . Επομένως η αρχική ακολουθία αποκλίνει.

Ορισμός 13.5 (Σημείο συσσώρευσης ακολουθίας). Το a λέγεται σημείο συσσώρευσης της (x_n) αν υπάρχει υπακολουθία $x_{n_k} \rightarrow a$.

Θεώρημα 13.6 (Bolzano–Weierstrass). Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^d$ διαθέτει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Το θεώρημα δεν λέει ότι η αρχική ακολουθία συγκλίνει. Εξασφαλίζει ότι η φραγή εμποδίζει όλους τους όρους να «διαφύγουν» και επιτρέπει την εξαγωγή τουλάχιστον μίας συγκλίνουσας τροχιάς. Στο $\mathbb{R}^d$ αυτό είναι μια μορφή συμπαγείας των κλειστών και φραγμένων συνόλων.

Εμβάθυνση – Οικονομετρικοί εκτιμητές

Αν μια ακολουθία εκτιμητών $(\hat{\theta}_n)$ είναι φραγμένη-προσοχή αυτές είναι ακολουθίες κατάλληλων συναρτήσεων (τυχαίων στοιχείων, συνήθως με τιμές σε Ευκλείδειους χώρους), κάθε υπακολουθία έχει περαιτέρω συγκλίνουσα υπακολουθία. Μια συνηθισμένη τεχνική απόδειξης συνέπειας είναι να δείξουμε ότι κάθε δυνατό σημείο συσσώρευσης ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες πρώτης τάξης και ότι αυτές έχουν μοναδική λύση θ_0 . Τότε όλα τα σημεία συσσώρευσης συμπίπτουν και $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_0$.

13.2 Μετρικοί χώροι

Μέχρι τώρα η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$ μετρήθηκε με την απόλυτη τιμή

$$|x - y|.$$

Για να επεκτείνουμε τις έννοιες της σύγκλισης και της ακολουθίας Cauchy σε διανύσματα, συναρτήσεις, ακολουθίες και άλλα μαθηματικά αντικείμενα, χρειαζόμαστε μια αφηρημένη έννοια απόστασης.

Ορισμός 13.7 (Μετρική). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

ονομάζεται *μετρική* στο X αν, για κάθε $x, y, z \in X$, ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Μη αρνητικότητα:

$$d(x, y) \geq 0.$$

2. Ταύτιση των μη διακρινόμενων σημείων:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

3. Συμμετρία:

$$d(x, y) = d(y, x).$$

4. Τριγωνική ανισότητα:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Ορισμός 13.8 (Μετρικός χώρος). Ένα ζεύγος (X, d) , όπου X είναι μη κενό σύνολο και d είναι μετρική στο X , ονομάζεται *μετρικός χώρος*.

Η τριγωνική ανισότητα δηλώνει ότι η άμεση απόσταση από το x στο z δεν υπερβαίνει τη διαδρομή που περνά από ένα ενδιάμεσο σημείο y :

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z.$$

Παρατήρηση 13.9. Η μετρική δεν χρειάζεται να περιγράφει φυσική ή γεωγραφική απόσταση. Μπορεί να μετρά τη διαφορά μεταξύ διανυσμάτων, συναρτήσεων, κατανομών, καταστάσεων μιας οικονομίας ή προβλέψεων ενός μοντέλου. Οι τέσσερις ιδιότητες του ορισμού είναι εκείνες που επιτρέπουν να αναπτυχθεί μια συνεπής έννοια εγγύτητας.

13.2.1 Ανοικτές σφαίρες και γειτονιές

Ορισμός 13.10 (Ανοικτή σφαίρα). Σε έναν μετρικό χώρο (X, d) , η ανοικτή σφαίρα με κέντρο $x \in X$ και ακτίνα $r > 0$ είναι το σύνολο

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Στην πραγματική ευθεία με τη συνηθισμένη μετρική,

$$B_d(x, r) = (x - r, x + r).$$

Άρα τα ανοικτά διαστήματα που χρησιμοποιήθηκαν στον ορισμό του ορίου είναι ακριβώς οι ανοικτές σφαίρες της συνηθισμένης μετρικής του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 13.11 (Σύγκλιση σε μετρικό χώρο). Μια ακολουθία (x_n) σε έναν μετρικό χώρο (X, d) συγκλίνει στο $x \in X$, και γράφουμε

$$x_n \longrightarrow x,$$

αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, κάθε ανοικτή σφαίρα με κέντρο x , όσο μικρή και αν είναι, περιέχει ολόκληρη την ουρά της ακολουθίας.

13.2.2 Η συνηθισμένη μετρική στο $\mathbb{R}$

Παράδειγμα 13.12 (Η πραγματική ευθεία). Στο $X = \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Η μη αρνητικότητα, η συμμετρία και η ιδιότητα

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

προκύπτουν από τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής. Η τριγωνική ανισότητα είναι

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Άρα η $(\mathbb{R}, d)$ είναι μετρικός χώρος.

Με αυτή τη μετρική, ο γενικός ορισμός

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

γίνεται

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Επομένως ο προηγούμενος ορισμός σύγκλισης πραγματικών ακολουθιών είναι ειδική περίπτωση της σύγκλισης σε μετρικό χώρο.

13.2.3 Μετρικές στον $\mathbb{R}^m$

Παράδειγμα 13.13 (Ευκλείδεια μετρική). Για $x = (x_1, \dots, x_m)$ και $y = (y_1, \dots, y_m)$ στον $\mathbb{R}^m$, ορίζουμε

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Αυτή είναι η συνηθισμένη ευκλείδεια απόσταση.

Παράδειγμα 13.14 (Μετρική Manhattan). Στον ίδιο χώρο μπορούμε να ορίσουμε

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^m |x_j - y_j|.$$

Η απόσταση αυτή ονομάζεται συχνά μετρική Manhattan ή ℓ^1 -μετρική.

Παράδειγμα 13.15 (Μετρική μεγίστου). Μια τρίτη μετρική είναι

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - y_j|.$$

Μετρά τη μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ των αντίστοιχων συντεταγμένων.

Οι τρεις μετρικές είναι διαφορετικές ως αριθμητικές συναρτήσεις, αλλά στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $\mathbb{R}^m$ παράγουν την ίδια έννοια σύγκλισης:

$$x_n \rightarrow x \iff x_{n,j} \rightarrow x_j \text{ για κάθε } j = 1, \dots, m.$$

Πράγματι, για κάθε $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq m \|v\|_\infty.$$

Οι ανισότητες αυτές επιτρέπουν τη μεταφορά του ελέγχου σφάλματος από τη μία μετρική στην άλλη.

Εμβάθυνση – Διανύσματα οικονομικών μεταβλητών

Μια κατάσταση μιας οικονομίας μπορεί να περιγράφεται από διάνυσμα

$$x = (k, b, p, w) \in \mathbb{R}^4,$$

όπου k είναι το κεφάλαιο, b το χρέος, p το επίπεδο τιμών και w ο μισθός. Η μετρική

$$d_\infty(x, y) = \max\{|k_x - k_y|, |b_x - b_y|, |p_x - p_y|, |w_x - w_y|\}$$

θεωρεί δύο καταστάσεις κοντινές όταν κάθε επιμέρους μεταβλητή είναι κοντινή. Αν οι μεταβλητές έχουν πολύ διαφορετικές μονάδες μέτρησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια σταθμισμένη μετρική

$$d_w(x, y) = \sum_{j=1}^m w_j |x_j - y_j|, \quad w_j > 0.$$

Τα βάρη διορθώνουν τις διαφορετικές κλίμακες ή εκφράζουν τη σχετική σημασία των μεταβλητών.

13.2.4 Η διακριτή μετρική

Παράδειγμα 13.16 (Διακριτή μετρική). Σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X ορίζουμε

$$d_{\text{disc}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Η d_{disc} είναι μετρική και ονομάζεται *διακριτή μετρική*.

Στη διακριτή μετρική, αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < 1$, τότε

$$d_{\text{disc}}(x_n, x) < \varepsilon$$

συνεπάγεται

$$x_n = x.$$

Άρα

$$x_n \rightarrow x \iff x_n = x \text{ από κάποιον δείκτη και μετά.}$$

Επομένως, στη διακριτή μετρική, οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες είναι οι τελικά σταθερές. Το παράδειγμα δείχνει ότι η έννοια της σύγκλισης εξαρτάται ουσιαστικά από τη μετρική που επιλέγουμε.

13.2.5 Μετρική σε χώρο φραγμένων ακολουθιών

Έστω

$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 0} : \sup_{n \geq 0} |x_n| < \infty \right\},$$

το σύνολο όλων των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών.

Παράδειγμα 13.17 (Ομοιόμορφη μετρική ακολουθιών). Για $x, y \in \ell^\infty$, ορίζουμε

$$d_\infty(x, y) = \sup_{n \geq 0} |x_n - y_n|.$$

Η ποσότητα είναι πεπερασμένη, επειδή οι x και y είναι φραγμένες. Η μετρική μετρά τη μεγαλύτερη απόσταση των δύο ακολουθιών σε όλους τους δείκτες ταυτόχρονα.

Αν

$$x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n \geq 0}$$

είναι ακολουθία στοιχείων του ℓ^∞ , τότε

$$d_\infty(x^{(m)}, x) \rightarrow 0$$

σημαίνει

$$\sup_{n \geq 0} |x_n^{(m)} - x_n| \rightarrow 0.$$

Πρόκειται για ομοιόμορφο έλεγχο ως προς τον εσωτερικό δείκτη n , ο οποίος είναι ισχυρότερος από τη σύγκλιση

$$x_n^{(m)} \rightarrow x_n$$

για κάθε σταθερό n .

13.2.6 Μετρική σε χώρο συναρτήσεων

Έστω $C([a, b])$ το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Παράδειγμα 13.18 (Ομοιόμορφη μετρική συναρτήσεων). Για $f, g \in C([a, b])$, ορίζουμε

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Το μέγιστο υπάρχει από το θεώρημα Weierstrass, επειδή η συνάρτηση

$$x \mapsto |f(x) - g(x)|$$

είναι συνεχής σε συμπαγές διάστημα.

Η σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ ως προς αυτή τη μετρική σημαίνει

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0,$$

δηλαδή ακριβώς ομοιόμορφη σύγκλιση.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε την ολοκληρωτική απόσταση

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Η μετρική d_1 επιτρέπει μεγάλες αποκλίσεις σε μικρές περιοχές, εφόσον η συνολική ολοκληρωμένη απόκλιση παραμένει μικρή. Αντίθετα, η d_∞ ελέγχει τη χειρότερη σημειακή απόκλιση.

Εμβάθυνση – Συναρτήσεις πρόβλεψης

Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις πρόβλεψης, η ποσότητα

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

μετρά τη χειρότερη διαφορά των προβλέψεών τους στο σύνολο X . Αντίθετα, μια απόσταση της μορφής

$$d_2(f, g) = \left(\int_X |f(x) - g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$$

μετρά τη μέση τετραγωνική διαφορά ως προς το μέτρο μ .

Η επιλογή μετρικής εκφράζει επομένως ποια μορφή σφάλματος θεωρούμε σημαντική: τη χειρότερη απόκλιση ή τη μέση απόκλιση.

13.2.7 Μετρικές μητρώων

Παράδειγμα 13.19 (Μετρική Frobenius). Για δύο πραγματικές μήτρες

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

ίδιων διαστάσεων, ορίζουμε

$$d_F(A, B) = \|A - B\|_F = \left(\sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

Η μετρική αυτή αντιμετωπίζει την εκάστοτε μήτρα ως διάνυσμα των στοιχείων του.

Η σύγκλιση

$$A_n \rightarrow A$$

ως προς τη μετρική Frobenius ισοδυναμεί, σε πεπερασμένες διαστάσεις, με τη σύγκλιση κάθε στοιχείου:

$$(A_n)_{ij} \rightarrow A_{ij} \quad \text{για κάθε } i, j.$$

13.2.8 Μια μετρική στο σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών

Η ομοιόμορφη μετρική

$$\sup_n |x_n - y_n|$$

δεν είναι πάντοτε πεπερασμένη αν οι ακολουθίες δεν είναι φραγμένες. Μπορούμε όμως να ορίσουμε στο σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τη μετρική

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} \min\{1, |x_n - y_n|\}.$$

Η σειρά συγκλίνει, επειδή

$$0 \leq 2^{-(n+1)} \min\{1, |x_n - y_n|\} \leq 2^{-(n+1)}$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} = 1.$$

Με αυτή τη μετρική,

$$x^{(m)} \rightarrow x$$

αν και μόνο αν

$$x_n^{(m)} \rightarrow x_n \quad \text{για κάθε σταθερό } n.$$

Άρα η μετρική κωδικοποιεί την κατά συντεταγμένη σύγκλιση των ακολουθιών.

Παρατήρηση 13.20. Ο παράγοντας $2^{-(n+1)}$ δίνει ολοένα μικρότερο βάρος στις μεταγενέστερες συντεταγμένες, ενώ η ποσότητα

$$\min\{1, |x_n - y_n|\}$$

εμποδίζει μια πολύ μεγάλη απόκλιση σε μία συντεταγμένη να κάνει τη σειρά άπειρη.

13.2.9 Μια συνάρτηση που δεν είναι μετρική

Παράδειγμα 13.21 (Το τετράγωνο της ευκλείδειας απόστασης). Στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε

$$\rho(x, y) = |x - y|^2.$$

Η ρ είναι μη αρνητική, συμμετρική και μηδενίζεται ακριβώς όταν $x = y$. Δεν ικανοποιεί όμως την τριγωνική ανισότητα.

Πράγματι, για

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2,$$

έχουμε

$$\rho(0, 2) = 4,$$

ενώ

$$\rho(0, 1) + \rho(1, 2) = 1 + 1 = 2.$$

Άρα

$$\rho(0, 2) > \rho(0, 1) + \rho(1, 2),$$

οπότε η ρ δεν είναι μετρική.

Το παράδειγμα δείχνει ότι μια μη αρνητική συνάρτηση που μοιάζει με μέτρο διαφοράς δεν είναι αναγκαστικά μετρική. Πρέπει να ελέγχονται και οι τέσσερις ιδιότητες.

13.2.10 Μετρική και τοπολογία

Κάθε μετρική d προσδιορίζει μια οικογένεια ανοικτών σφαιρών και, μέσω αυτών, μια τοπολογία. Επομένως η μετρική καθορίζει ποιες ακολουθίες συγκλίνουν και ποια σύνολα θεωρούνται ανοικτά.

Διαφορετικές μετρικές μπορούν να παράγουν την ίδια τοπολογία. Για παράδειγμα, οι d_1, d_2, d_∞ στον $\mathbb{R}^m$ δίνουν την ίδια έννοια σύγκλισης, παρότι αποδίδουν διαφορετικές αριθμητικές αποστάσεις.

Δεν προέρχεται όμως κάθε τοπολογία από μετρική. Για παράδειγμα, η αδιάκριτη τοπολογία σε σύνολο με περισσότερα από ένα σημεία δεν μπορεί να παραχθεί από μετρική, επειδή σε κάθε μετρικό χώρο τα διαφορετικά σημεία μπορούν να διαχωριστούν με ξένες ανοικτές σφαίρες. Ειδικότερα, κάθε μετρικός χώρος είναι Hausdorff και το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.

13.3 Ακολουθίες Cauchy και πληρότητα

Ορισμός 13.22 (Ακολουθία Cauchy). Σε μετρικό χώρο (X, d) , η (x_n) είναι Cauchy αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Η συνθήκη συγκρίνει όρους μεταξύ τους και δεν προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο.

Πρόταση 13.23. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε μετρικό χώρο είναι Cauchy.

Απόδειξη. Αν $x_n \rightarrow x$, επιλέγουμε N ώστε $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ για $n \geq N$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon.$$

□

Ορισμός 13.24 (Πλήρης μετρικός χώρος). Ο (X, d) λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy στο X συγκλίνει σε σημείο που ανήκει στο X .

Οι χώροι $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και $\mathbb{R}^d$ με τις συνήθεις μετρικές είναι πλήρεις, ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι. Για παράδειγμα, οι δεκαδικές αποκοπές του $\sqrt{2}$ αποτελούν ακολουθία Cauchy ρητών, αλλά το όριό τους δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$. Η συμπλήρωση του $\mathbb{Q}$ γεμίζει ακριβώς αυτά τα «κενά» και παράγει το $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 13.25 (Κριτήριο Cauchy στο $\mathbb{R}$). Μια πραγματική ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy.

Ερμηνεία

Η πληρότητα είναι η αρχή που μετατρέπει τον εσωτερικό έλεγχο $|x_m - x_n| \rightarrow 0$ σε ύπαρξη ενός οριακού αντικειμένου. Είναι θεμελιώδης στις επαναληπτικές μεθόδους: συχνά μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις πλησιάζουν μεταξύ τους πριν γνωρίζουμε ποια είναι η λύση.

Θεώρημα 13.26 (Θεώρημα σταθερού σημείου Banach). Έστω (X, d) πλήρης και $T : X \rightarrow X$ συστολή, δηλαδή υπάρχει $q \in (0, 1)$ με

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y).$$

Τότε το T έχει μοναδικό σταθερό σημείο x^* και, για κάθε x_0 , η επανάληψη $x_{n+1} = T(x_n)$ συγκλίνει στο x^* .

Πράγματι, $d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)$ και η γεωμετρική σειρά δείχνει ότι (x_n) είναι Cauchy. Η πληρότητα παρέχει το όριο και η συστολή δείχνει ότι αυτό είναι σταθερό σημείο. Η ίδια λογική θεμελιώνει επαναληπτικούς αλγορίθμους και τον τελεστή Bellman στη δυναμική οικονομική θεωρία, όταν ο συντελεστής προεξόφλησης καθιστά τον τελεστή συστολή.

13.4 Από βαθμωτές σε μητρότιμες αναλυτικές συναρτήσεις

Υπάρχουν δύο συγγενείς έννοιες. Μια μητρότιμη αναλυτική συνάρτηση της βαθμωτής μεταβλητής z είναι ένας πίνακας $F(z) = (f_{ij}(z))$ του οποίου κάθε στοιχείο είναι αναλυτική συνάρτηση. Μπορούμε επομένως να τον αναπτύξουμε ως

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

όπου οι συντελεστές C_n είναι μητρώα. Η δεύτερη έννοια είναι να εφαρμόσουμε μία βαθμωτή αναλυτική συνάρτηση f σε μήτρα A . Η δεύτερη κατασκευή συνδέεται άμεσα με τη διαγωνιοποίηση και αναπτύσσεται παρακάτω. Στη μητρότιμη εκθετική οι δύο απόψεις συναντώνται: η $t \mapsto e^{tA}$ είναι μητρότιμη αναλυτική συνάρτηση του t και ταυτόχρονα προκύπτει εφαρμόζοντας την εκθετική στην μήτρα tA .

Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης R και $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$. Αν $\|A\| < R$ για μια υποπολλαπλασιαστική νόρμα μητρών, ορίζουμε

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Η σειρά συγκλίνει απολύτως, αφού $\|a_n A^n\| \leq |a_n| \|A\|^n$. Για ανάπτυγμα γύρω από z_0 , χρησιμοποιούμε τις δυνάμεις $(A - z_0 I)^n$.

Πρόταση 13.27 (Σχέση με διαγωνιοποίηση). Αν $A = PDP^{-1}$, όπου $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, τότε

$$f(A) = P \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_d)) P^{-1},$$

εφόσον η f είναι ορισμένη στις ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Για κάθε n , $A^n = PD^n P^{-1}$. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα στα μερικά αθροίσματα της σειράς και περνάμε στο όριο. $\square$

Η διαγωνιοποίηση μετατρέπει λοιπόν μια μητρότιμη συνάρτηση σε εφαρμογή της βαθμωτής συνάρτησης πάνω στις ιδιοτιμές. Δεν είναι όμως αναγκαία για τον ορισμό. Αν η A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη, η σειρά συνεχίζει να ορίζει το $f(A)$ χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή Jordan.

Εμβάθυνση – Κανονική μορφή Jordan και μπλοκ Jordan

Η διαγωνιοποίηση μήτρας A απαιτεί να υπάρχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα. Αυτό δεν είναι πάντοτε δυνατό. Η κανονική μορφή Jordan παρέχει μια γενίκευση της διαγώνιας μορφής, χρησιμοποιώντας ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

Ορισμός 13.28 (Μπλοκ Jordan). Ένα μπλοκ Jordan μεγέθους r που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι μήτρα της μορφής

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ισοδύναμα,

$$J_r(\lambda) = \lambda I_r + N_r,$$

όπου

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενοδύναμο:

$$N_r^r = 0.$$

Η ιδιοτιμή λ βρίσκεται στην κύρια διαγώνιο, ενώ οι μονάδες στην υπερδιαγώνιο καταγράφουν την αποτυχία της διαγωνιοποίησης. Ένα μπλοκ μεγέθους 1 είναι απλώς ο αριθμός λ .

Θεώρημα 13.29 (Κανονική μορφή Jordan). Για κάθε μήτρα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα P τέτοιο ώστε

$$A = PJP^{-1},$$

όπου το J είναι μπλοκ-διαγώνιο μητρώο της μορφής

$$J = \text{diag}(J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \dots, J_{r_m}(\lambda_m)).$$

Η μορφή Jordan είναι μοναδική μέχρι τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα μπλοκ.

Το θεώρημα διατυπώνεται πάνω από το $\mathbb{C}$, ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να διασπάται πλήρως σε γραμμικούς παράγοντες. Για πραγματικές μήτρες με μιγαδικές ιδιοτιμές μπορεί είτε να εργαστούμε στο $\mathbb{C}$ είτε να χρησιμοποιήσουμε την πραγματική κανονική μορφή Jordan με διδιάστατα μπλοκ.

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα v είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ όταν

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης q όταν

$$(A - \lambda I)^q v = 0$$

για κάποιο $q \geq 1$, αλλά

$$(A - \lambda I)^{q-1} v \neq 0.$$

Ένα μπλοκ Jordan αντιστοιχεί σε μια αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων

$$v_1, v_2, \dots, v_r$$

που ικανοποιεί

$$(A - \lambda I)v_1 = 0$$

και

$$(A - \lambda I)v_{j+1} = v_j, \quad j = 1, \dots, r-1.$$

Το v_1 είναι συνηθισμένο ιδιοδιάνυσμα, ενώ τα $v_2, \dots, v_r$ συμπληρώνουν τις κατευθύνσεις που λείπουν για τη δημιουργία βάσης.

Πότε μια μήτρα είναι διαγωνιοποιήσιμο;

Η A είναι διαγωνιοποιήσιμη αν και μόνο αν κάθε μπλοκ Jordan έχει μέγεθος 1. Τότε

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Ισοδύναμα, για κάθε ιδιοτιμή λ , η γεωμετρική πολλαπλότητα της,

$$\dim \ker(A - \lambda I),$$

πρέπει να είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Παράδειγμα 13.30. Το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Ωστόσο,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$\ker(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C} \right\}$$

έχει διάσταση 1. Άρα η A δεν διαθέτει δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη. Η ίδια η A είναι ήδη το μπλοκ Jordan

$$A = J_2(2).$$

Αναλυτικές συναρτήσεις ενός μπλοκ Jordan

Έστω f αναλυτική σε γειτονιά της λ . Επειδή

$$J_r(\lambda) = \lambda I + N, \quad N^r = 0,$$

αναπτύσσουμε την f γύρω από το λ :

$$f(\lambda + z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} z^k.$$

Αντικαθιστώντας $z = N$, όλοι οι όροι με $k \geq r$ μηδενίζονται. Επομένως

$$f(J_r(\lambda)) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} N^k.$$

Σε μορφή μήτρας,

$$f(J_r(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Άρα, σε διαγωνιοποιήσιμη μήτρα, η $f(A)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στις ιδιοτιμές. Σε μη διαγωνιοποιήσιμη μήτρα χρειάζονται επίσης οι παράγωγοι της f .

Παράδειγμα 13.31 (Εκθετικό μπλοκ Jordan). Για

$$J = \lambda I + N$$

έχουμε

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} e^{tN}.$$

Επειδή $N^r = 0$,

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N^{r-1}.$$

Επομένως

$$e^{tJ_r(\lambda)} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} N^k.$$

Για μπλοκ μεγέθους 3,

$$e^{tJ_3(\lambda)} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η μη διαγωνιοποιησιμότητα δημιουργεί πολυωνυμικούς παράγοντες $t, t^2, \dots$, οι οποίοι πολλαπλασιάζουν τον βασικό εκθετικό ρυθμό $e^{\lambda t}$.

Ερμηνεία

Οι ιδιοτιμές καθορίζουν τους βασικούς εκθετικούς ρυθμούς ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος. Τα μη τετριμμένα μπλοκ Jordan προσθέτουν πολυωνυμικούς παράγοντες στους ίδιους ρυθμούς.

Για παράδειγμα, αν $\Re(\lambda) < 0$, τότε

$$t^k e^{\lambda t} \longrightarrow 0$$

για κάθε πεπερασμένο k . Άρα ένα μπλοκ Jordan με ιδιοτιμή αρνητικού πραγματικού μέρους εξακολουθεί να παράγει φθίνουσα δυναμική, αλλά η μεταβατική συμπεριφορά μπορεί να είναι βραδύτερη και περισσότερο ενισχυμένη από ό,τι στη διαγώνια περίπτωση.

Για ένα μπλοκ Jordan $J = \lambda I + N$, με $N^r = 0$, προκύπτει ο πεπερασμένος τύπος

$$f(J) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} N^k.$$

Οι παράγωγοι της f μετρούν έτσι την επίδραση του μη διαγώνιου, μηδενοδύναμου μέρους.

Ορισμός 13.32 (Μητρότιμη εκθετική). Για κάθε τετραγωνική μήτρα A ορίζουμε

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη, άρα ο ορισμός ισχύει για κάθε A .

Ισχύουν

$$e^0 = I, \quad (e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A, \quad (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

Γενικά $e^{A+B} = e^A e^B$ μόνο όταν $AB = BA$. Η μη αντιμεταθετικότητα των μητρώων είναι η κρίσιμη διαφορά από τη βαθμωτή άλγεβρα.

Παράδειγμα 13.33 (Διαγωνιοποιήσιμο σύστημα). Για το σύστημα $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$, η λύση είναι

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Αν $A = PDP^{-1}$, τότε

$$e^{tA} = P \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_d}) P^{-1}.$$

Οι ιδιοτιμές καθορίζουν τους ρυθμούς μεγέθυνσης, φθοράς ή ταλάντωσης, ενώ τα ιδιοδιανύσματα καθορίζουν τους αντίστοιχους τρόπους κίνησης.

Παράδειγμα 13.34 (Κανονική μορφή Jordan). Για

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \quad N^2 = 0,$$

έχουμε

$$e^{tA} = e^{\lambda t}(I + tN) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η έλλειψη διαγωνιοποίησης εμφανίζει έναν πολυωνυμικό παράγοντα t δίπλα στον εκθετικό ρυθμό.

Εμβάθυνση – Δυναμικά οικονομικά συστήματα

Μετά από γραμμικοποίηση ενός δυναμικού υποδείγματος γύρω από σταθερή κατάσταση, συχνά προκύπτει $\dot{z} = Az$. Η φασματική δομή του A διαχωρίζει ευσταθείς και ασταθείς κατευθύνσεις. Στα υποδείγματα ορθολογικών προσδοκιών αυτός ο διαχωρισμός συνδέεται με την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας τροχιάς σέλας, ενώ η e^{tA} μεταφέρει την αρχική απόκλιση στον χρόνο.

13.5 Διαφορικές εξισώσεις και αναδρομές συντελεστών

Η μέθοδος δυναμοσειρών μετατρέπει μια διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική αναδρομή. Αν

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

τότε

$$y^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j)!}{n!} a_{n+j} t^n.$$

Αν οι συντελεστές της εξίσωσης είναι αναλυτικοί, τα γινόμενα σειρών υπολογίζονται με Cauchy και η ταύτιση των συντελεστών κάθε δύναμης του t προσδιορίζει αναδρομικά τα a_n .

Πρόταση 13.35 (Γραμμική βαθμωτή εξίσωση). Για

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad p(t) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n, \quad q(t) = \sum_{n \geq 0} q_n t^n,$$

οι συντελεστές μιας αναλυτικής λύσης ικανοποιούν

$$(n+1)a_{n+1} = q_n + \sum_{k=0}^n p_k a_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

Η αρχική τιμή δίνει $a_0 = y(0)$ και η αναδρομή προσδιορίζει διαδοχικά όλους τους επόμενους όρους.

Πρόταση 13.36 (Σύστημα με αναλυτικούς συντελεστές). Για

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad A(t) = \sum_{n \geq 0} A_n t^n, \quad b(t) = \sum_{n \geq 0} b_n t^n,$$

αν $x(t) = \sum_{n \geq 0} v_n t^n$, τότε

$$(n+1)v_{n+1} = b_n + \sum_{k=0}^n A_k v_{n-k}.$$

Για σταθερό A και $b = 0$ παίρνουμε $v_{n+1} = Av_n/(n+1)$, άρα $v_n = A^n v_0/n!$ και

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} x_0 = e^{tA} x_0.$$

Έτσι η Μητρότιμη εκθετική δεν είναι εξωτερικό τέχνασμα: είναι ακριβώς η γεννήτρια που επιβάλλει η αναδρομή των συντελεστών της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 13.37 (Δεύτερης τάξης εξίσωση). Αν

$$y'' + c(t)y' + d(t)y = r(t),$$

όπου c, d, r είναι αναλυτικές σειρές με συντελεστές c_k, d_k, r_k , τότε

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n c_k(n-k+1)a_{n-k+1} + \sum_{k=0}^n d_k a_{n-k} = r_n.$$

Οι αρχικές τιμές καθορίζουν $a_0 = y(0)$ και $a_1 = y'(0)$, και η σχέση καθορίζει όλους τους επόμενους συντελεστές. Η αναλυτικότητα μετατρέπει την τοπική ύπαρξη λύσης σε μια υπολογίσιμη ακολουθία αλγεβρικών βημάτων.

Προσοχή

Μια τυπική αναδρομή συντελεστών παράγει πάντοτε μια τυπική σειρά, αλλά η σύγκλιση της απαιτεί αναλυτικό επιχείρημα. Για αναλυτικούς συντελεστές σε κανονικό σημείο, τα θεωρήματα ύπαρξης εξασφαλίζουν θετική ακτίνα σύγκλισης. Σε ιδιαίζοντα σημεία μπορεί να απαιτούνται σειρές Frobenius, λογαριθμικοί όροι ή διαφορετική τοπική μεταβλητή.

13.6 Ενιαία εικόνα

Οι υπακολουθίες απομονώνουν πιθανές οριακές συμπεριφορές. Οι ακολουθίες Cauchy διατυπώνουν τη σύγκλιση χωρίς να προϋποθέτουν το όριο, ενώ η πληρότητα εγγυάται ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις δεν οδηγούν έξω από τον χώρο. Οι δυναμοσειρές οργανώνουν αυτές τις προσεγγίσεις συντελεστή προς συντελεστή. Όταν το υπόβαθρο αφορά σε πραγματικές μήτρες, η ίδια αναλυτική συνάρτηση ενεργεί ταυτόχρονα πάνω στους δυναμικούς τρόπους που αποκαλύπτουν οι ιδιοτιμές και τα μπλοκ της κανονικής μορφής Jordan. Τέλος, οι διαφορικές εξισώσεις μεταφράζονται σε αναδρομές των συντελεστών τους, συνδέοντας την ανάλυση, τη γραμμική άλγεβρα και τη δυναμική θεωρία σε μία κοινή κατασκευή.

13.7 Ασκήσεις

Άσκηση 13.38. Βρείτε όλα τα σημεία συσσώρευσης της $x_n = \cos(n\pi/2) + 1/n$ και κατασκευάστε ρητά τις αντίστοιχες υπακολουθίες.

Άσκηση 13.39. Δείξτε απευθείας ότι η $x_n = \sum_{k=0}^n 2^{-k}$ είναι Cauchy και χρησιμοποιήστε την πληρότητα του $\mathbb{R}$ για να δικαιολογήσετε την ύπαρξη του ορίου πριν το υπολογίσετε.

Άσκηση 13.40. Για $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, διαγωνιοποιήστε το A και υπολογίστε τα e^{tA} και $\cos(A)$.

Άσκηση 13.41. Για $y' = (1+t)y$, $y(0) = 1$, εξαγάγετε την αναδρομή των συντελεστών, υπολογίστε τους πρώτους έξι και συγκρίνετέ τους με την ακριβή λύση.

Έλεγχος κατανόησης

Στο τέλος του κεφαλαίου πρέπει να μπορείτε:

1. να χρησιμοποιείτε υπακολουθίες για να αποδεικνύετε απόκλιση,
2. να διακρίνετε την ιδιότητα Cauchy από την πληρότητα του χώρου,
3. να ορίζετε $f(A)$ μέσω δυναμοσειράς και μέσω διαγωνιοποίησης,
4. να υπολογίζετε τη Μητρóτιμη εκθετική σε διαγώνια και Jordan μορφή,
5. να μετατρέπετε αναλυτικές διαφορικές εξισώσεις σε αναδρομές συντελεστών.

Συμβολισμοί

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Βασικά αριθμητικά σύνολα.
$A \times B$	Καρτεσιανό γινόμενο.
$f : A \rightarrow B$	Συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και σύνολο τιμών B .
$\Gamma : A \rightrightarrows B$	Αντιστοιχία πολλαπλών τιμών.
$\sup A, \inf A$	Supremum και infimum.
$\sum a_n$	Πραγματική ή μιγαδική σειρά.
$\mathbb{E}, \text{Var}, \mathbb{P}$	Αναμενόμενη τιμή, διακύμανση και πιθανότητα.
