# 1.B Φραγμένες Πραγματικές Ακολουθίες (συνέχεια)

Συνεχίζουμε με την εξαγωγή αποτελεσμάτων που ψηλαφούν την έννοια της φραγής για τις πραγματικές ακολουθίες. Αυτά είναι δυνατόν να διευκολύνουν την διερεύνηση για το αν μια ακολουθία είναι φραγμένη. Το επόμενο αποτέλεσμα γενικεύει τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις, και επί της ουσίας μας λέει ότι αν σχεδόν όλοι οι όροι μιας ακολουθίας εγκλείονται σε διάστημα πεπερασμένης ακτίνας, τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας μπορούν να εγκλειστούν σε διάστημα πεπερασμένης ακτίνας, όχι αναγκαστικά ίδιο με το προηγούμενο.

**Λήμμα (Φραγή-Εγκλεισμός)**. *Έστω πραγματική ακολουθία* $(x_n)$ *για την οποία ισχύει ότι σχεδόν όλοι οι όροι της μπορούν να κλειστούν σε ανοικτό διάστημα με πεπερασμένη ακτίνα. Τότε η ακολουθία είναι φραγμένη.*

**Απόδειξη:** Έστω ότι το διάστημα που περικλείει σχεδόν όλους τους όρους της ακολουθίας είναι το $(l-\epsilon, l+\epsilon)$, όπου $l$ το κέντρο του, και $\epsilon > 0$ η ακτίνα του. Τότε για σχεδόν όλους τους όρους της ακολουθίας ισχύει από την υπόθεση του εγκλεισμού ότι κάθε ένας από αυτούς είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη από το $\max\{|l-\epsilon|, |l+\epsilon|\}$. Αυτό είναι δυνατόν να μην ισχύει για πεπερασμένο πλήθος από όρους, έστω $k$ το πλήθος αυτό. Αν το $k=0$ τότε είναι δυνατόν να επιλέξουμε $M = \max\{|l-\epsilon|, |l+\epsilon|\}$ και το αποτέλεσμα έπεται. Αν $k>0$ έστω $y_1, y_2, \ldots, y_k$ οι $k$ όροι που δεν μπορούν να εγκλειστούν στο εν λόγω διάστημα. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο τότε είναι δυνατόν να επιλεγεί ως $M$ το $\max\{|l-\epsilon|, |l+\epsilon|, |y_1|, |y_2|, \ldots, |y_k|\}$, οπότε και το αποτέλεσμα έπεται.□

**Παρατηρήσεις:**

1. Το παραπάνω αποδεικνύει τις παρατηρήσεις 2 και 3 του Ορισμός (Φραγή Πραγματικής Ακολουθίας) απευθείας.
2. Συνεπάγεται ότι όποια εναλλάσουσα ακολουθία μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της εγκλείονται στο $[\min\{c,d\}, \max\{c,d\}]$.
3. Προφανώς το αποτέλεσμα θα ίσχυε αν το διάστημα είναι ανοικτό. Πως θα άλλαζε η απόδειξη;

Το επόμενο αποτέλεσμα λειτουργεί συγκριτικά. Μας δείχνει ότι μπορούμε να εξάγουμε την φραγή για ακολουθία χρησιμοποιώντας μια βοηθητική ακολουθία η οποία γνωρίζουμε ότι είναι φραγμένη και έχει συγκεκριμένη σχέση με την αρχική.

**Λήμμα (Φραγή-Σύγκριση)**. *Έστω πραγματικές ακολουθίες* $(x_n), (y_n)$ *για τις οποίες έχουμε ότι η* $(x_n)$ *είναι φραγμένη και ότι ισχύει πως* $|y_n| \leq |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ *εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων. Τότε και η* $(y_n)$ *είναι φραγμένη.*

**Απόδειξη**: Εφόσον η $(y_n)$ φραγμένη, $\exists M \geq 0 : |y_n| = |y_n - 0| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι οι όροι της $(y_n)$ βρίσκονται στο διάστημα $[-M, M]$ το οποίο έχει κέντρο το 0. Εξαιτίας του $|y_n - 0| \leq |x_n - 0|, \forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων, σχεδόν όλοι οι όροι της $(x_n)$ εγκλείονται επίσης σε αυτό το διάστημα. Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει από το Λήμμα (Φραγή-Εγκλεισμός).□

Τα παραπάνω θα χρησιμοποιηθούν ανάμεσα στα άλλα με ζητήματα που αφορούν στα όρια, στις σειρές κ.ο.κ.

# 1.Γ Άλγεβρα και Φραγή

Στο παρακάτω, βλέπουμε ότι η φραγή δεν αλλοιώνεται από τις αλγεβρικές πράξεις.

**Λήμμα (Φραγή-Άλγεβρα)**. *Έστω φραγμένες πραγματικές ακολουθίες* $(x_n), (y_n)$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Τότε οι ακολουθίες* $(x_n) + (y_n)$, $\lambda(x_n)$ *και* $(x_n) \otimes (y_n)$ *είναι επίσης φραγμένες.*

**Απόδειξη**: Αφού οι $(x_n), (y_n)$ είναι φραγμένες, υπάρχουν $M_x \geq 0, M_y \geq 0$ τέτοια ώστε

1. $|x_n| \leq M_x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και
2. $|y_n| \leq M_y$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Προσθέτωντας κατά μέλη τις 1 και 2 $\forall n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε ότι

- $|x_n| + |y_n| \leq M_x + M_y$, $\forall n \in \mathbb{N}$ – (*), ενώ εξαιτίας της τριγωνικής ανισότητας έχουμε ότι
- $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ – (**).

Συνδυάζοντας τις (*) και (**) παίρνουμε ότι $|x_n + y_n| \leq M_x + M_y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, επομένως ο $M_x + M_y$ είναι (απόλυτο) φράγμα για την ακολουθία άθροισμα.

Για το δεύτερο αποτέλεσμα έχουμε ότι όταν $\lambda = 0$ τότε η $\lambda(x_n)$ είναι η σταθερή ακολουθία στο 0. Επομένως εξαιτίας των προηγούμενων αυτή είναι φραγμένη. Όταν $\lambda \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την 2 με $|\lambda|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε ότι $|\lambda x_n| \leq |\lambda| M_x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως ότι ο $|\lambda| M_x$ είναι (απόλυτο) φράγμα για την $\lambda(x_n)$.

Για το τρίτο αποτέλεσμα έχουμε ότι πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις 1 και 2 για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε ότι $|x_n y_n| \leq M_x M_y$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως ότι ο $M_x M_y$ είναι (απόλυτο) φράγμα για την $(x_n) \otimes (y_n)$.□

# 2. Μονότονες Πραγματικές Ακολουθίες

Θυμηθήκαμε το πότε μια πραγματική συνάρτηση καλείται μονότονη.

Παρατηρήσαμε ότι:

1. Ο ορισμός της μονοτονίας χρειάζεται την ύπαρξη της μαθηματικής δομής της διάταξης στο πεδίο ορισμού. Η περαιτέρω επεξήγηση εκφεύγει των ορίων του μαθήματος. Για τα όσα μας χρειάζονται, αρκεί να γίνεται αντιληπτό ότι για όποια δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού αυτά θα πρέπει είτε να είναι ίσα, είτε το πρώτο να είναι «μεγαλύτερο» του δεύτερου, είτε το αντίστροφο. Προφανώς αυτό ικανοποιείται για το σύνολο των φυσικών,

οπότε και έχει νόημα η εξειδίκευση της έννοιας της μονοτονίας στις πραγματικές συναρτήσεις.

2 Μια μονότονη συνάρτηση θα είναι ταυτόγχρονα αύξουσα και φθίνουσα ανν είναι σταθερή.

Η εξειδίκευση του ορισμού στην περίπτωση των πραγματικών ακολουθιών, έχει ως παρακάτω.

**Ορισμός (Μονοτονία)**. *Η πραγματική σκολουθία* $(x_n)$ *θα ονομάζεται:*

1 *αύξουσα ανν η συνάρτηση που την αναπαριστά είναι αύξουσα, δηλαδή αν* $n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) \geq f(n_2)$ *ανν* $x_{n1} \geq x_{n2}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

2 *γνησίως αύξουσα ανν η συνάρτηση που την αναπαριστά είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή αν* $n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) > f(n_2)$ *ανν* $x_{n1} > x_{n2}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

3 *φθίνουσα ανν η συνάρτηση που την αναπαριστά είναι φθίνουσα, δηλαδή αν* $n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) \leq f(n_2)$ *ανν* $x_{n1} \leq x_{n2}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,

4 *γνησίως φθίνουσα ανν η συνάρτηση που την αναπαριστά είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή αν* $n_1 > n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$ *ανν* $x_{n1} < x_{n2}, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Η εν λόγω θα ονομάζεται μονότονη εφόσον ικανοποιεί έστω και μία από τις 1-4.

Το επόμενο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει την μονοτονία μέσω της σύγκρισης των όποιων διαδοχικών όρων της ακολουθίας.

**Λήμμα (Χαρακτηρισμός Μονοτονίας)** *Η πραγματική ακολουθία* $(x_n)$ *θα είναι:*

1 *αύξουσα ανν* $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

2 *γνησίως αύξουσα ανν* $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

3 *φθίνουσα ανν* $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

4 *γνησίως φθίνουσα ανν* $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

**Απόδειξη**. Θα αποδείξουμε μόνο το 1. Τα υπόλοιπα προκύπτουν παρομοίως. (Δείξτε τα!) ($\Leftarrow$) Έστω ότι η ακολουθία ικανοποιεί το 1. του Ορισμός (Μονοτονία). Θέτοντας $n_1 = n + 1$ και $n_2 = n$ οδηγούμαστε στο 1. του παρόντος λήμματος. ($\Rightarrow$) Έστω ότι ικανοποιείται το 1 του παρόντος λήμματος. Έστω επίσης $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 > n_2$, μα τότε $n_1 = n_2 + k$ όπου $k$ φυσικός. Οπότε έχουμε $x_{n_1} \geq x_{n_1-1} \geq x_{n_1-2} \geq \cdots \geq x_{n_1-k} = x_{n_2}$.$\square$

Παράδειγμα αύξουσας και φθίνουσας ακολουθίας είναι όποια σταθερή, παράδειγμα γνησίως αύξουσας είναι αυτή των φυσικών με την φυσική τους διάταξη, γνησίως φθίνουσας αυτή των αρνητικών ακεραίων με την αντίστροφη της φυσικής τους διάταξης, ενώ παράδειγμα μη μονότονης ακολουθίας είναι όποια εναλλάσουσα μεταξύ δύο πραγματικών.

# 2.Β Μονοτονία και Φραγή

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακολουθίες φραγμένες και μονότονες, π.χ. η $\left(\frac{1}{n+1}\right)$, φραγμένες και μη μονότονες, π.χ. η $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, μη φραγμένες και μονότονες, π.χ. $(n)$, όπως και ούτε μονότονες ούτε φραγμένες, π.χ. η $((-1)^n n)$. Επομένως οι δύο αναλυτικές έννοιες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Όταν όμως συνδυάζονται τότε δημιουργούν ιδιότητες «συγκέντρωσης» των ακολουθιών που τις έχουν στα infima ή στα suprema τους ανάλογα με το είδος της μονοτονίας. Το παρακάτω αποτέλεσμα αποσαφηνίζει το τι εννούμε με τον όρο «συγκέντρωση» ενώ η απόδειξη του είναι αρκετά ενδιαφέρουσα. Οι έννοιες αυτές θα είναι αρκετά επιβοηθητικές και στα όρια.

**Λήμμα (Φραγή και Μονοτονία)**. *Έστω ότι η $(x_n)$ είναι φραγμένη και αύξουσα. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο διάστημα $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$, ενώ το πλήθος των όρων που είναι εκτός, μπορεί να εξαρτάται από το $\varepsilon$. Δυικά, έστω ότι η $(x_n)$ είναι φραγμένη και φθίνουσα. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο διάστημα $[\inf x_n, \inf x_n + \varepsilon)$, ενώ το πλήθος των όρων που είναι εκτός, μπορεί να εξαρτάται από το $\varepsilon$.*

**Άποδειξη**. Θα αποδείξουμε το πρώτο μέρος. Το δυικό προκύπτει αναλόγως (Δείξτε το προσεκτικά!). Έστω λοιπόν ότι η $(x_n)$ είναι φραγμένη και αύξουσα και $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε μέσω του επόμενου αποτελέσματος ότι στο διάστημα $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$ βρίσκεται τουλάχιστον ένας όρος της ακολουθίας.

Ισχυρισμός. Εφόσον η $(x_n)$ είναι φραγμένη, υπάρχει $n^\star(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε ο $x_{n^\star(\varepsilon)}$ να βρίσκεται στο $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έστω ότι δεν υπάρχει ο $n^\star(\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται εκτός του $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$. Επειδή το άνω άκρο του διαστήματος είναι άνω φράγμα για την ακολουθία, αυτό σημαίνει ότι $x_n \leq \sup x_n - \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Οπότε ο $\sup x_n - \varepsilon$ είναι επίσης άνω άκρο για την ακολουθία. Επειδή όμως το $\varepsilon > 0$ θα έχουμε ότι $\sup x_n - \varepsilon < \sup x_n$. Αυτό είναι όμως άτοπο επειδή το $\sup x_n$ είναι το μικρότερο άνω άκρο.$\square$

(Συνέχεια Απόδειξης Λήμματος) Επειδή τώρα ο $x_{n^\star(\varepsilon)}$ βρίσκεται στο $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$ και η ακολουθία είναι αύξουσα θα έχουμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας που αντιστοιχούν σε $n > n^\star(\varepsilon)$ θα είναι μεγαλύτεροι του $\sup x_n - \varepsilon$. Ταυτόγχρονα θα είναι μικρότεροι ή ίσοι του $\sup x_n$. Επομένως αυτοί ο όροι θα βρίσκονται στο $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$. Οι όροι που μπορεί να μην βρίσκονται στο εν λόγω διάστημα είναι επομένως οι $x_0, x_1, \ldots, x_{n^\star(\varepsilon)-1}$ που έχουν πεπερασμένο πλήθος ίσο με $n^\star(\varepsilon)$.$\square$

**Παρατηρήσεις**:

1 Το παραπάνω εξέφρασε με ακρίβεια την έννοια της συγκέντρωσης. Φαίνεται σαν να εννοούμε ότι η ακολουθία συγκεντρώνεται γύρω από πραγματικό αριθμό ανν σε κάθε διάστημα που τον περιλαμβάνει βρίσκονται σχεδόν όλοι οι όροι της, ενώ το πλήθος αυτών που δεν βρίσκονται μπορεί να εξαρτάται από το ποιο είναι το διάστημα. Θα το εξειδικεύσουμε περαιτέρω όταν μιλήσουμε για τα όρια. Παρατηρήστε ότι εφόσον ισχύει το παραπάνω για διαστήματα της μορφής $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$ θα ισχύει και για κάθε διάστημα που περιλαμβάνει τον $\sup x_n$, και αναλόγως για τις φθίνουσες και φραγμένες ακολουθίες.

2 Τα διαστήματα θα μπορούσαν να έχουν επιλεγεί να είναι κλειστά. Προσπαθήστε να δείτε τι θα άλλαζε στην απόδειξη.

3 Ο Ισχυρισμός είναι αληθής για φραγμένες ακολουθίες. Επομένως για αυτές πάντοτε θα υπάρχει κάποιος όρος τους (ή ακόμη και άπειρο πλήθος όρων τους) σε κάθε διάστημα που περιλαμβάνει το supremum τους ή το infimum τους. Αν δεν είναι όμως και μονότονες, είναι δυνατόν να υπάρχει τέτοιο διάστημα που δεν εμπεριέχει άπειρο πλήθος όρων τους.

# 2. Γ Άλγεβρα και Μονοτονία

Συμπληρώνουμε τις αρχικές έννοιες διερευνόντας την σχέση μεταξύ των αλγεβρικών πράξεων και της μονοτονίας.

Δείχνεται εύκολα ότι:

1. Η πρόσθεση δεν αλλοιώνει το είδος της μονοτονίας έτσι π.χ. το άθροισμα αυξουσών ακολουθιών είναι αύξουσα. Αυτό αποδεικνύεται μέσω της κατα μέλη πρόσθεσης των συνθηκών της ίδιας μονοτονίας για τις δύο συνιστώσες ακολουθίες για κάθε φυσικό.
2. Ο πολλαπλασιασμός με πραγματικό δεν είναι δυνατόν να αλλοιώνει την μονοτονία, είναι όμως δυνατόν να της αλλάζει το είδος. Έτσι αν πολλαπλασιάζουμε με μη αρνητικό αφήνουμε αναλλοίωτο το είδος της μονοτονίας, όταν πολλαπλασιάζουμε με μη θετικό το αλλάζουμε. Αυτό προκύπτει πάλι από τον κατά μέλη πολλαπλασιασμό του πραγματικού με κάθε μία από τις συνθήκες που ορίζουν το είδος της μονοτονίας για κάθε φυσικό.
3. Υπάρχουν και πολλά άλλα αποτελέσματα τα οποία θα δείτε ως ασκήσεις.

## Ασκήσεις

1. Υπακολουθία μιας ακολουθίας $(x_n)$ (subsequence) ονομάζεται όποιο απειροπληθές υποσύνολο της αρχικής ακολουθίας χωρίς αλλαγή της διάταξης των όρων του όπως αυτοί εμφανίζονται στην αρχική (π.χ. η ακολουθία που σχηματίζεται από τους άρτιας τάξης όρους της αρχικής, ή από τους περιττής τάξης όρους της αρχικής, ή από όλους τους όρους από τον δεύτερο όρο και μετά της αρχικής, κ.ο.κ.). Οι ορισμοί της φραγής και της μονοτονίας περιορίζονται στις υπακολουθίες με το προφανή τρόπο:
   a. Μπορείτε να ορίσετε την έννοια ως σύνθεση κατάλληλων συναρτήσεων;
   b. Είναι δυνατόν φραγμένη ακολουθία να έχει μη φραγμένη υπακολουθία;
   c. Είναι δυνατόν μη φραγμένη ακολουθία να έχει φραγμένη υπακολουθία;
   d. Είναι δυνατόν μονότονη ακολουθία να έχει μη μονότονη ή μονότονη υπακολουθία άλλου είδους;
   e. Είναι δυνατόν μη μονότονη ακολουθία να έχει μονότονη υπακολουθία;
   f. Είναι δυνατόν μη μονότονη ακολουθία να έχει μονότονες υπακολουθίες διαφορετικών ειδών μεταξύ τους;
2. Να βρείτε παράδειγμα γινομένου μη φραγμένων ακολουθιών που είναι φραγμένη ακολουθία.
3. Να δείξετε ότι το άθροισμα μη φραγμένης με φραγμένη ακολουθία είναι αναγκαστικά μη φραγμένη (Υπόδειξη: υποθέστε χωρίς απώλεια γενικότητας ότι η μη φραγμένη δεν άνω φραγμένη, και υποθέστε προκειμένου να οδηγηθείτε σε άτοπο ότι το άθροισμα είναι φραγμένη. Συμπληρώστε την απόδειξη και για την περίπτωση που δεν είναι φραγμένη από κάτω.).
4. Τι συμβαίνει με την μονοτονία του αθροίσματος γνησίως μονότονης με μονότονη της ίδιας μονοτονίας;
5. Είναι δυνατόν το άθροισμα μη μονότονων ακολουθιών να είναι μονότονη ακολουθία;
6. Είναι δυνατόν το γινόμενο μη μονότονης ακολουθίας με πραγματικό να αποδίδει μονότονη ακολουθία;

7 Να βρείτε (πιθανώς μέσω παραδειγμάτων) τα δυνατά αποτελέσματα πολλαπλασιασμού μεταξύ ακολουθιών της ίδιας μονοτονίας.

8 Να βρείτε (πιθανώς μέσω παραδειγμάτων) τα δυνατά αποτελέσματα αλγεβρικών πράξεων μεταξύ ακολουθιών διαφορετικής μονοτονίας.

9 Να βρείτε (πιθανώς μέσω παραδειγμάτων) τα δυνατά αποτελέσματα αλγεβρικών πράξεων μεταξύ μονότονων και μη ακολουθιών.