Μέρος Α: Ακολουθίες, Σύγκλιση και Σειρές

Πραγματικές Ακολουθίες

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ξεκινούμε με την μελέτη της έννοιας της πραγματικής ακολουθίας. Σε διάφορες περιπτώσεις ως πραγματική ακολουθία ορίζεται όποια λίστα από πραγματικούς αριθμούς. Βάσει ενός τέτοιου ορισμού ακόμη και τα πραγματικά n-διάστατα διανύσματα μπορούν να θεωρούνται πραγματικές ακολουθίες. Εμείς θα ακολουθήσουμε στα παρακάτω την συνηθισμένη σύμβαση ότι για να χαρακτηριστεί ένα τέτοιο αντικείμενο ως ακολουθία, θα πρέπει να έχει άπειρο πλήθος όρων.

Ορισμοί Πραγματικών Ακολουθιών

Διατυπώσαμε δύο ισοδύναμους ορισμούς της πραγματικής ακολουθίας.

1. Διανυσματικός Ορισμός

(**Ορισμός Δ.**) *Πραγματική ακολουθία ονομάζεται κάθε διάταξη πραγματικών αριθμών με πλήθος ίσο με αυτό των φυσικών η οποία έχει πρώτο στοιχείο, δηλαδή κάθε «απειροδιάστατο» διάνυσμα της μορφής* $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots),\ x_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ο διανυσματικός ορισμός:

A. Μας επιτρέπει να ορίζουμε αλγεβρικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των πεπερασμένης διάστασης διανυσμάτων (θα τις ορίσουμε λίγο αργότερα).

B. Χρησιμοποιώντας τον διανυσματικό συμβολισμό, αναγκαζόμαστε να αναπαριστούμε την ακολουθία αναγράφοντας μόνο κάποιους από τους πρώτους της όρους. Αυτός ο τρόπος συμβολισμού είναι δυνατόν να δημιουργεί συμβολική ασάφεια και είναι όχι ιδιαίτερα οικονομικός, αφού δεν είναι δυνατόν να γραφούν σε αυτή την μορφή όλοι οι όροι της ακολουθίας (γιατί;).

C. Το ότι το πλήθος όρων πραγματικής ακολουθίας είναι ίσο με το πλήθος των φυσικών, είναι ασαφές χωρίς να γνωρίζουμε βασικές έννοιες για πληθάριθμους (κάτι που φυσικά είναι εκτός του εύρους του μαθήματος), εν μέρει όμως προκύπτει από το ότι κάθε όρος της ακολουθίας αντιστοιχίζεται στον ανάλογο φυσικό αριθμό που προκύπτει από την θέση του στην ακολουθία, π.χ. ο όρος x_n είναι ο (n+1)-οστός όρος της ακολουθίας και αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από το ότι σε κάθε φυσικό αριθμό αντιστοιχίζεται ο ανάλογος όρος της ακολουθίας. Το ότι οι όροι της ακολουθίας είναι διατεταγμένοι μέσα στην ακολουθία σύμφωνα με την διάταξη των φυσικών, προκύπτει από το ότι ο (n+1)-οστός όρος προηγείται μέσα στην ακολουθία του (m+1)-οστού όρου (ή ισοδύναμα και εφόσον έχουμε αναπαραστήσει την ακολουθία ως διάνυσμα-γραμμή, η θέση του (n+1)-οστού όρου μέσα στην ακολουθία βρίσκεται αριστερότερα της θέσης του (m+1)-οστού όρου) αν και μόνο αν για τους φυσικούς n και m έχουμε n<m.

2. Συναρτησιακός Ορισμός

(**Ορισμός Σ.**) *Πραγματική ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς, δηλαδή κάθε* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι ο συναρτησιακός ορισμός:

1. Επιτρέπει την απόδοση αναλυτικών ιδιοτήτων όπως π.χ. η φραγή ή/και η μονοτονία.
2. Εφόσον η συνάρτηση χαρακτηρίζεται από «τύπο» είναι συμβολικά ακριβής και οικονομικός. Προσοχή όμως, δεν ισχύει ότι κάθε τέτοια συνάρτηση χαρακτηρίζεται από «τύπο», επομένως είναι δυνατόν και να υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες ο συμβολισμός που προκύπτει και από αυτόν τον ορισμό είναι ανακριβής ή/και μη οικονομικός κ.ο.κ.

Ισοδυναμία των Ορισμών

Το πρώτο αποτέλεσμα μας δείχνει ότι οι δύο ορισμοί ορίζουν την ίδια έννοια.

(**Πρόταση**) *Ο* **Ορισμός Δ.** *είναι ισοδύναμος με τον* **Ορισμό Σ.**

Απόδειξη. Έστω πραγματική ακολουθία βάσει του διανυσματικού ορισμού, δηλαδή έστω διάνυσμα της μορφής $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots),\ x_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, ως $f(n) = x_n$. Επομένως ο διανυσματικός ορισμός συνεπάγεται την ύπαρξη και μοναδικότητα της συνάρτησης που προβλέπει ο συναρτησιακός. Αντίστροφα, έστω πραγματική ακολουθία βάσει του συναρτησιακού ορισμού, δηλαδή έστω συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την διάταξη των φυσικών, ορίζουμε το διάνυσμα $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, όπου $x_n = f(n),\ \forall n \in \mathbb{N}$ επομένως αποκτούμε με μοναδικό τρόπο το διάνυσμα που προβλέπει ο διανυσματικός ορισμός.$\square$

Παραδείγματα Πραγματικών ακολουθιών στα Οικονομικά και τις Πιθανότητες

Παρατέθηκαν ενδεικτικά παραδείγματα πραγματικών ακολουθιών όπως αυτά συναντώνται στην οικονομική θεωρία και στη θεωρία πιθανοτήτων. Αυτά αφορούσαν:

1. Στην διαχρονική ροή κατανάλωσης που είδαμε παραπάνω.
2. Διαχρονική ροή ανατοκισμού ποσού σε περιβάλλον όπως το προηγούμενο. Π.χ., αν X είναι το ποσό στην χρονική στιγμή 0, και R το διαχρονικά σταθερό επιτόκιο ανατοκισμού μεταξύ διαδοχικών χρονικών στιγμών, η εν λόγω ροή θα αναπαρίσταται από το $(X, X(1+R), X(1+R)^2, \ldots, X(1+R)^n, \ldots)$.
3. Στην ακολουθία που περιέχει διατεταγμένες σύμφωνα με την τάξη τους τις ροπές εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\lambda > 0$. Αυτή είναι η $(1, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda^2}, \ldots, \frac{n!}{\lambda^n}, \ldots)$. Όπως θα δούμε η συγκεκριμένη πραγματική ακολουθία αναπαριστά την συγκεκριμένη κατανομή! (δηλ. αρκεί να γνωρίζουμε μόνο αυτό προκειμένου να γνωρίζουμε τις πιθανότητες που αποδίδονται από την συγκεκριμένη κατανομή.)

Παραδείγματα πραγματικών ακολουθιών

Παρατίθενται παραδείγματα πραγματικών ακολουθιών για την αναπαράσταση των οποίων χρησιμοποιούνται και οι δύο ορισμοί.

1. $(0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, $f(n) = n$.
2. Για $c \in \mathbb{R}$, έστω $(c, c, c, \ldots, c, \ldots)$, $f(n) = c$. Προφανώς η ακολουθία θα ονομάζεται σταθερή (constant) στο c.
3. $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$, $f(n) =$ ο (n+1)-οστός πρώτος αριθμός.
4. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots)$, $f(n) = \frac{1}{n+1}$.
5. $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \ldots)$, $f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
6. Για $c, d \in \mathbb{R},\ c \neq d$, έστω $(d, c, c, \ldots, c, \ldots)$, $f(x) = \begin{cases} d, & n = 0 \\ c, & n > 0 \end{cases}$. Μια τέτοια ακολουθία θα ονομάζεται *σχεδόν παντού* σταθερή στο c.
7. Για $c, d \in \mathbb{R},\ c \neq d$, έστω $(c, d, c, d, \ldots)$, $f(x) = \begin{cases} c, & n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ d, & n = 1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}$. Μια τέτοια ακολουθία θα ονομάζεται *εναλλάσουσα* (alternating) μεταξύ των c, d.

Σύμβαση:

Θα λέμε ότι μια ιδιότητα ισχύει *σχεδόν παντού* για μια ακολουθία (ή ισοδύναμα ότι σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας έχουν αυτή την ιδιότητα) αν και μόνο αν (στο εξής ανν) η ιδιότητα αυτή ισχύει για όλους τους όρους της ακολουθίας εκτός από πεπερασμένο πλήθος αυτών.

Π.χ. δείτε το παράδειγμα 6 της σχεδόν παντού σταθερής πραγματικής ακολουθίας. Το πλήθος των όρων της που δεν ισούται με c είναι ίσο με 1. Προφανώς κάθε σταθερή ακολουθία είναι σχεδόν παντού σταθερή (ισχύει το αντίστροφο;), αφού το πλήθος των όρων της που δεν ισούται με c είναι ίσο με 0. Η ακολουθία του παραδείγματος 7 δεν είναι σχεδόν παντού σταθερή σε κανένα πραγματικό αριθμό αφού άπειρο πλήθος όρων της είναι διάφορο από όποιον πραγματικό αριθμό.

Ασκήσεις

1. Έστω το σύνολο όλων των ακολουθιών της μορφής $(x, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, $f_x(n) := \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ n & \text{if } n > 0 \end{cases}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το προαναφερθέν σύνολο.

2. Έστω το σύνολο όλων των ακολουθιών της μορφής $(x, y, 2, \ldots, n, \ldots)$,

$$f_{x,y}(n) := \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ y & \text{if } n = 1 \\ n & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το προαναφερθέν σύνολο και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^2$.

3. Να κατασκευαστεί σχεδόν παντού σταθερή ακολουθία σε κάποιον αριθμό (να δοθεί τόσο σε διανυσματική, όσο και σε συναρτησιακή μορφή) για την οποία να ισχύει ότι η f που την ορίζει μπορεί να αποδώσει μόνο 3 διαφορετικές πραγματικές τιμές.

4. Να κατασκευαστεί πραγματική ακολουθία η οποία δεν είναι σχεδόν παντού σταθερή (να δοθεί τόσο σε διανυσματική, όσο και σε συναρτησιακή μορφή) για την οποία να ισχύει ότι η f που την ορίζει μπορεί να αποδώσει μόνο 3 διαφορετικές πραγματικές τιμές.