Εισαγωγή στις Δυναμοσειρές

Στα παρακάτω θα δούμε κάποιες βασικές έννοιες που άπτονται της θεωρίας δυναμοσειρών οι οποίες θα επιτρέψουν την χρήση των εν λόγω σειρών σε εφαρμογές που άπτονται για παράδειγμα στην θεωρία πιθανοτήτων, στην θεωρία διαφορικών εξισώσεων κ.ο.κ.

Ορισμός [Δυναμοσειρών] Έστω πραγματική ακολουθία (α_i) και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δυναμοσειρά με κέντρο το α και συντελεστές $\alpha_i, i \in \mathbb{N}$ ονομάζεται η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i$. □

Σχόλιο: Η δυναμοσειρά, εφόσον υπάρχει θα αποτελεί το κατάλληλο όριο της ΑΝΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-\alpha)^i\right)$ που αποτελεί ακολουθία από πολυώνυμα ως προς $(x-\alpha)$. Ο βαθμός του $n+1$-στού όρου είναι n. Επομένως πρώτον οποιοδήποτε πολυώνυμο ως προς $(x-\alpha)$ αποτελεί παράδειγμα δυναμοσειράς.
Π.χ. το $\sum_{i=0}^{n} b_i (x-\alpha)^i$ θεωρείται δυναμοσειρά με κέντρο το α και $\alpha_i = \begin{cases} b_i, & i \le n \\ 0, & i > n \end{cases}$.

(Κατασκευάστε με ακρίβεια την ΑΝΑ η οποία συγκλίνει στο εν λόγω πολυώνυμο. Ποιο είναι το X^* αν $x \in \mathbb{R}$;)

Έτσι όποια συνάρτηση αποτελεί υποπερίπτωση πολυωνύμου π.χ. σταθερές, γραμμικές, τετραγωνικές κ.ο.κ. αποτελούν παραδείγματα δυναμοσειρών. Δεύτερον, εφόσον δεν μας απασχολούν ζητήματα σύγκλισης, δηλαδή το αν η δυναμοσειρά αποτελεί καλώς ορισμένη σε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση, μπορούμε να αναλάβουμε την $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ ως ένα αλγεβρικό αντικείμενο που γενικεύει την έννοια του πολυωνύμου. Αυτή η θεώρηση που ονομάζεται θεωρία τυπικών δυναμοσειρών (formal power series theory) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην μεταθετική άλγεβρα (commutative algebra). Με αυτό δεν θα ασχοληθούμε. Επισημαίνουμε ότι όταν $a=0$

ο μετασχηματισμός $(a_i) \longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

επί της ουσίας αποτελεί μια ακόμη αναπαράσταση της ακολουθίας (a_i) που ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση (generating function) της (a_i) [βλ. και όσα θα δούμε αργότερα στα πλαίσια της θεωρίας πιθανοτήτων]. $\square$

Θα ασχοληθούμε όμως με ζητήματα που άπτονται αναλυτικών ιδιοτήτων των δυναμοσειρών οπότε και ρητώς θα μας απασχολήσουν ζητήματα σύγκλισης.

Παραδείγματα: Στα παρακάτω εξετάζουμε το αν η δεδομένη σειρά είναι δυναμοσειρά.

1. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$, $\alpha=0$, $\alpha_i = 1/i!$ $\forall i\in\mathbb{N}$.

2. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$, $\alpha=0$, $\alpha_i = 1$ $\forall i\in\mathbb{N}$.

3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i$, $\alpha=1$, $\alpha_i = \frac{(-1)^i}{i+1}$ $\forall i\in\mathbb{N}$

4. $\sum_{i=0}^{\infty} i!\, x^i$, $\alpha=0$, $\alpha_i = i!$ $\forall i\in\mathbb{N}$.

5. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x^i}$, $x\neq 0$, δεν είναι δυναμοσειρά καθώς η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x^i}\right)$ δεν αποτελείται από πολυώνυμα ως προς x.

6. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$

$$= 1 + 0\cdot x - \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + 0\cdot x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i, \quad \alpha=0, \quad \alpha_i = \begin{cases} \frac{(-1)^{i/2}}{i!}, & i \text{ άρτιο} \\ 0, & i \text{ περ.} \end{cases}$$

Το τελευταίο παράδειγμα μας δείχνει ότι ακόμη και αν η δεδομένη σειρά δεν είναι στην οριακή μορφή δυναμοσειράς, τότε μπορεί να είναι δυνατόν να αναχθεί

σε αυτήν την μορφή "προσθέτοντας μηδενικά". Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μπορεί να είναι όλες χρήσιμες για την διακρίβωση διαφορετικών ιδιοτήτων.
Άσκηση. Κάντε το ίδιο για την $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$. □

Θεώρημα Σύγκλισης Cauchy-Hadamard

Θεώρημα [Σύγκλισης] Η $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x-\alpha)^i$ θα συγκλίνει:

1. είτε μόνο για $x=\alpha$,
2. είτε $\forall x \in \mathbb{R}$,
3. είτε για κάθε x σε διάστημα με κέντρο το α και ακτίνα $r>0$.

Τέλος στις περιπτώσεις 1 και 2, αλλά και στο εσωτερικό του διαστήματος της περίπτωσης 3 η σύγκλιση είναι απόλυτη. □

Σχόλια:

1. Στις περιπτώσεις 2 και 3 το X^* έχει την μορφή διαστήματος. Στην 2 είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι το κέντρο είναι το α και η ακτίνα $r=\infty$. Αναλόγως καταχρηστικά μπορούμε και στην 1 να θεωρήσουμε ότι έχουμε (κλειστό) διάστημα με κέντρο το

a και ακτίνα $r=0$ (στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτό ως εκφυλισμένο). Βάσει της παραπάνω κατάχρησης θα αναφερόμαστε στο εν λόγω διάστημα σε όποια περίπτωση ως διάστημα σύγκλισης (interval of convergence) και στην ακτίνα r ως ακτίνα σύγκλισης (radius of convergence).

2. Στην περίπτωση 3 το θεώρημα δεν προσδιορίζει την μορφή του διαστήματος καθώς αυτό είναι δυνατόν να περιλαμβάνει και (κάποιο από) τα άκρα του. Αυτό που είναι βέβαιο είναι ότι η σύγκλιση είναι απόλυτη $\forall x \in (a-r, a+r)$ ενώ αν το κάποιο από τα άκρα βρίσκεται στο διάστημα σύγκλισης σε αυτό κατά περίπτωση η σύγκλιση μπορεί να είναι απόλυτη ή κατά συνθήκη.

3. Το θεώρημα αποτελεί μια πρώτη ένδειξη της "καλής" αναλυτικής συμπεριφοράς των δυναμοσειρών αφού το X^* δεν είναι ποτέ κενό. Επίσης το X^* αποτελείται πάντοτε από ένα κομμάτι, είναι δηλαδή συνεκτικό. Θυμηθείτε π.χ. το παραπάνω (αντι-)παράδειγμα 5 όπου έχουμε δείξει ότι $X^* =$

$= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ το οποίο αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους κομμάτια (το X^* έχει δηλαδή τρύπα) και αναδιαβάστε το με την παραπάνω ιδιότητα των δυναμοσειρών.

4. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $\left.\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i\right|_{x=a} = a_0$. $\square$

Παραδείγματα [συνέχεια από τα παραπάνω]

Έχουμε ήδη δείξει ότι:

1. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$, Διασ. Σύγκλ. $= \mathbb{R}$, απόλυτη σύγκλ. $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$, Διασ. Σύγκλ. $= (-1,1)$, απόλυτη σύγκλιση $\forall x \in (-1,1)$.

3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i$, έχουμε ότι $1 \in$ Διασ. Σύγκλ.

(γιατί;). Όταν $x \neq 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του πηλίκου (γιατί μπορούμε;) οπότε $\dfrac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}(x-1)^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^n\right|}$

$= |x-1| \frac{n+1}{n+2} \to |x-1|$. Επομένως έχουμε απόλυτη σύγκλιση όταν $x \in (0,2)$, και απόκλιση όταν $x \notin [0,2]$. Όταν $x=0$ έχουμε ότι $\left.\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i\right|_{x=0}$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (-1)^i}{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ που αποκλίνει, άρα

$0 \notin$ Διαστ. Σύγκλ. Όταν $x=2$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(x-1)^i \Big|_{x=2}$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} 1^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$ που συγκλίνει κατά συνθή-

κη. Επομένως $2 \in$ Διαστ. Σύγκλ. Συνεπώς

Διαστ. Σύγκλ. $= (0,2]$, και έχουμε απόλυτη σύγκλιση

στο εσωτερικό του ($(0,2)$) και κατά συνθήκη

σύγκλιση στο 2.

4. $\sum_{i=0}^{\infty} i! x^i$, έχουμε ότι $0 \in$ Διαστ. Σύγκλ. (γιατί;).

Όταν $x \neq 0$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου

έχουμε $\frac{|(n+1)! x^{n+1}|}{|n! x^n|} = (n+1)|x| \to +\infty$ (μη φραγμένη)

$\forall x \neq 0$. Επομένως $x \neq 0 \Rightarrow x \notin$ Διαστ. Σύγκλ. Άρα

Διαστ. Σύγκλ. $= \{0\}$ (εκφυλισμένο).

6. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$. Η μορφή αυτή είναι βολική για την

χρήση του κριτηρίου (γιατί;). Έχουμε ότι $0 \in$ Διαστ. Σύγκλ.
(γιατί;).

Όταν $x \neq 0$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του πηλίκου οπότε έχουμε

$$\frac{|(-1)^{n+1} x^{2n+2}/(2n+2)!|}{|(-1)^n x^{2n}/(2n)!|} = \frac{x^2}{2n+2} \to 0 \ \forall x \neq 0$$

Επομένως Διασ. Σύγκ. $= \mathbb{R}$. Σημειώνεται ότι η δυναμοσειρά είναι ίση με συνx $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

[Σκιαγράφηση Απόδειξης Θεωρήματος Σύγκλισης]

Για την $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ έχουμε ότι $a \in$ Διασ. Σύγκ. (γιατί;)

Όταν $x \neq a$ υποθέτουμε ότι είναι δυνατή η εφαρμογή του κριτηρίου του πηλίκου (όταν δεν είναι είτε έχουμε πεπερασμένο άθροισμα είτε μπορούμε να την κάνουμε εφικτή μέσω μετασχηματισμού του δείκτη άθροισης – πβλ το παράδειγμα 6). Έχουμε λοιπόν

$$\frac{|a_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|a_n (x-a)^n|} = |x-a| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad (*).$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to +\infty \Rightarrow |x-a| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to +\infty \Rightarrow x \neq a \Rightarrow x \notin$ Διασ. Σύγκ.

οπότε Διασ. Σύγκ. $= \{a\}$ (εκφυλισμένο).

2. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 0 \Rightarrow |x-a| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 0 \ \forall x \neq a \Rightarrow$ Διασ. Σύγκ. $= \mathbb{R}$ (γιατί;)

3. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \ell > 0 \Rightarrow |x-a| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \ell |x-a|$

$\Rightarrow$ α. $x \in (a - 1/\ell, a) \cup (a, a + 1/\ell) \Rightarrow x \in$ Διασ. σύγκλ.

β. $x \in (-\infty, a - 1/\ell) \cup (a + 1/\ell, +\infty) \Rightarrow x \notin$ Διασ. σύγκλ.

γ. $x = a - 1/\ell$ ή $a + 1/\ell \Rightarrow$ το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό.

Επομένως έχουμε $x \in (a - 1/\ell, a + 1/\ell) \Rightarrow x \in$ Διασ. σύγκλ. $x \notin [a - 1/\ell, a + 1/\ell] \Rightarrow x \notin$ Διασ. σύγκλ. ενώ για τα άκρα έχουμε μη πληροφοριακότητα. Τέλος $r = 1/\ell$ ενώ σε όλες τις περιπτώσεις όταν $x = a$ ή όταν το $x \in$ Διασ. σύγκλ. βάσει του κριτηρίου του πηλίκου έχουμε απόλυτη σύγκλιση. Επίσης όταν η $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ απομένει ούσα φραγμένη το παραπάνω συμπεραίνεται ομοίως βάσει των ανάλογων προβλέψεων του κριτηρίου που δεν έχουμε δει. □

Άσκηση. Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$. □

Στοιχεία Άλγεβρας Δυναμοσειρών

A. Ισότητα Δυναμοσειρών

0. $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ και $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (x-a)^i$ θα είναι

ίσες αν $\alpha_i=\beta_i$ $\forall i\in\mathbb{N}$. □

B. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός.

Αν $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε η $\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(x-\alpha)^i$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο το α και συντελεστές τους $\lambda\alpha_i$, $i\in\mathbb{N}$ $\left[\sum_{i=0}^{\infty}\lambda\alpha_i(x-\alpha)^i\right]$, και διάστημα σύγκλισης αυτό της αρχικής αν $\lambda\neq 0$, και το $\mathbb{R}$ αν $\lambda=0$. □

Άσκηση. Δείξτε το παραπάνω.

Γ. Πρόσθεση Δυναμοσειρών

Το $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(x-\alpha)^i+\sum_{i=0}^{\infty}b_i(x-\alpha)^i$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο το α και συντελεστές τους α_i+b_i $\left[\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha_i+\beta_i)(x-\alpha)^i\right]$, και διάστημα σύγκλισης που είναι υπερσύνολο της τομής των διαστημάτων σύγκλισης των δύο συνιστωσών ακολουθιών. □

Άσκηση. Δείξτε το παραπάνω.

Άσκηση. Είναι δυνατόν η προαναφερθείσα τομή των διαστημάτων σύγκλισης να είναι κενή;

Άσκηση. Βρείτε παράδειγμα στο οποίο το διάστημα σύγκλισης του αθροίσματος είναι γνήσιο υπερσύνολο της προαναφερθείσας τομής.

Άσκηση. Να δείξετε ότι στο εσωτερικό της προαναφερθείσας τομής η σύγκλιση του αθροίσματος είναι απόλυτη όταν και οι δύο συνιστώσες δυναμοσειρές έχουν μη εκφυλισμένα διαστήματα σύγκλισης.

Αναλυτικές Ιδιότητες Δυναμοσειρών

Θα δούμε ότι οι δυναμοσειρές, ειδικά όταν έχουν μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης, έχουν ιδιαίτερα χρήσιμες αναλυτικές ιδιότητες συνέχειας, παραγωγισιμότητας, ολοκληρωσιμότητας. Αυτές προκύπτουν επειδή η ασυμπτωτική συμπεριφορά των ανάλογων ΑΝΑ επιτρέπει την μετάθεση κατάλληλων ορίων. Επειδή γενικά στην ανάλυση τέτοιου είδους μεταθετικότητα είναι δύσκολο να ισχύει, αυτό σημαίνει ότι οι δυναμοσειρές είναι δυνατόν να χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πληθώρα εφαρμογών. Κάποιες από αυτές θα προσπαθήσουμε να δούμε αργότερα. Στα παρακάτω δεν δίνονται οι αποδείξεις για τα βασικά θεωρήματα καθώς η μεταθετικότητα βασίζεται σε έννοιες πέρα του εύρους του μαθήματος.

Συνέχεια

Θεώρημα [Συνέχεια Δυναμοσειρών]

Η $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης της. □

Σχόλια:

1. Το παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα όταν το διάστημα σύγκλισης είναι κλειστό (Άσκηση: Δείξτε το!). Σε κάθε άλλη περίπτωση χρειάζονται έννοιες που μας είναι μη προσιτές όπως η τοπικά ομοιόμορφη σύγκλιση και το ισχυρό σημαντικό θεώρημα του Abel. Η συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί αργότερα στην εύρεση σειρών!

2. Αν $x, y \in$ Διαστ. Σύγκλ. τότε τα παραπάνω σημαίνουν ότι $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (y-a)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lim_{x \to y} (x-a)^i = \lim_{x \to y} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$

το οποίο είναι προφανώς περίπτωση μεταθετικότητας ορίων. □

Παραγωγισιμότητα Δυναμοσειρών

Θεώρημα [Παραγωγισιμότητα Δυναμοσειρών]

Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ έχει μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης τότε είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης αυτού. Η παράγωγος δίνεται από τον όρο προς όρο

παραγώγιση της δυναμοσειράς, είναι επίσης δυναμοσειρά με κέντρο το a και συντελεστές τους $a_{i+1}(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$ $\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(i+1)(x-a)^i\right]$.
Το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της παραγώγου ταυτίζεται με το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς. □

Σχόλια:

1. Το υπογραμμισμένο μέρος της παραπάνω διατύπωσης είναι μαθηματικά το πιο δύσκολο στο να εξαχθεί καθώς αφορά ανάλογη μεταθετικότητα ορίων. Δεδομένου αυτού όλα τα υπόλοιπα είναι ζήτημα υπολογισμών ή/και εφαρμογής των παραπάνω εννοιών. Έτσι εφόσον ισχύει η μεταθετικότητα αν x βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης έχουμε

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i \underset{\text{μετ.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\frac{d\,a_i(x-a)^i}{dx}$$

$$\left(\frac{d\,a_i(x-a)^i}{dx} = \begin{cases} 0, & i=0 \\ i a_i (x-a)^{i-1}, & i>0 \end{cases}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, i\,(x-a)^{i-1}$$

$$\underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}(j+1)(x-a)^j.$$

Προφανώς η τελευταία είναι επίσης δυναμοσειρά με κέντρο το a που συγκλίνει για $x=a$ (γιατί;)

Όταν $x \neq a$ και εφόσον το κριτήριο του πηλίκου είναι εφαρμόσιμο, μας δίνει

$$\frac{|a_{n+2}(n+2)(x-a)^{n+1}|}{|a_{n+1}(n+1)(x-a)^{n}|}$$

$= |x-a| \frac{n+2}{n+1} \frac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}$. Προφανώς $\frac{n+2}{n+1} \to 1$ ενώ η ασυμπτωτική συμπεριφορά του $\frac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}$ είναι η ίδια με αυτή του $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (Άσκηση: Δείξτε το!).

Επομένως η ασυμπτωτική συμπεριφορά του

$|x-a| \frac{n+2}{n+1} \frac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}$ είναι ίδια με αυτή του $|x-a| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

οπότε και προκύπτει η ταύτιση των δύο εσωτε-ριών όπως διατυπώνεται στο θεώρημα.

2. Το θεώρημα αφορά σε δυναμοσειρές με μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης καθώς σε αντίθετη περίπτωση η παράγωγος είναι απροσδιόριστη. Επίσης για παρεμφερή λόγο η (δίπλευρη) παραγωγισιμότητα

ισχύει στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης. □

Εφαρμογές

1. Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ με Διαστ. Σύγκ. $=\mathbb{R}$. Το θεώρημα είναι εφαρμόσιμο στο εσωτερικό του $\mathbb{R}$ που είναι το $\mathbb{R}$ (γιατί;) οπότε αν $y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ που $x\in\mathbb{R}$

$$y'(x) \underset{\text{Θ.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d\, x^i/i!}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i!} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$\underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = y(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Παράλληλα έχουμε ότι $y(0)=\sum_{i=0}^{\infty} 0^i/i! = 1$. Επομένως η δυναμοσειρά ανήκει στις λύσεις του Προβλήματος Αρχικών Τιμών

$$\left.\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι η $y(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ (α). Επίσης αν $y\neq 0$, $y'=y \Rightarrow dy/y = dx \Leftrightarrow \int dy/y = \int dx$ $\Leftrightarrow \ln|y| = x + c, \ c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |y| = c e^x, \ c>0 \Leftrightarrow$ $y = c e^x, \ c\neq 0$ (β). Τα (α),(β) συνεπάγονται ότι ότι το σύνολο λύσεων της $y'=y$ είναι το

$\{y = c_1 e^x,\ c_1 \in \mathbb{R}\}$ ενώ το παραπάνω πρό-
βλημα αρχικών τιμών θα λύνεται από αυτές που επίσης ικανοποιούν το $y(0)=1 \Rightarrow c_1 e^0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$ οπότε η μοναδική του λύση είναι η $y(x) = e^x$. Εφόσον η δυναμοσειρά ικανοποιεί το πρόβλημα καταλήγουμε στο ότι

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i! \quad \forall x \in \mathbb{R}. \ [\Delta]$$

Στο παραπάνω χρησιμοποιήσαμε διαδικασία επίλυσης διαφορικής εξίσωσης προκειμένου να βγάλουμε συμπέρασμα για δυναμοσειρά. Αργότερα θα δούμε και το ανάστροφο, δηλαδή την χρήση δυναμοσειρών για την εύρεση λύσεων διαφορικών εξισώσεων.

2. Να βρεθεί η πραγματική σειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!2^i}.$$

Το [Δ] ισχύει για $x = 1/2$ οπότε

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{2}\right)^i = e^{1/2}.$$

Παρατηρούμε ότι είναι δυνατή η χρήση δυναμοσειρών για την εύρεση σειρών- πρόβλημα το οποίο είχαμε αφήσει σε εκκρεμότητα!

3. Να βρεθεί η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)}{3^i}$.

Έχουμε ότι $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \quad \forall x \in (-1,1)$. Το θεώρημα παραγωγισιμότητας εφαρμόζεται στο εσωτερικό του $(-1,1)$ που είναι το $(-1,1)$ οπότε

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\underset{\Theta}{\Rightarrow} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\underset{j=i-1}{\Rightarrow} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) x^j \quad \forall x \in (-1,1).$$

Επειδή $1/3 \in (-1,1) \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{3^i} = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Άσκηση. Να δειχθεί ότι αν η $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$ έχει μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης τότε στο εσωτερικό αυτού είναι k-φορές παραγωγίσιμη $\forall k \in \mathbb{N}$ [είναι δηλαδή λεία συνάρτηση].

Τι συνεπάγεται το Θεώρημα Παραγωγισιμότητας για την παράγωγο k-τάξης και το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης αυτού;

Άσκηση. Να δειχθεί ότι $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^a}{i!}(x-a)^i$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση. Δίνεται ότι $\text{συν}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2i+1}$.