Έννοιες προς πραγμάτευση

Ο πυρήνας των εννοιών γύρω από τις οποίες δομείται η ύλη του μαθήματος αφορά στις έννοιες της ακολουθίας (πραγματικής, συναρτήσεων κ.ο.κ.), του ορίου, της σειράς (πραγματικής, συναρτήσεων κ.ο.κ.), της δυναμοσειράς, επεκτάσεων των παραπάνω και εφαρμογών στα μαθηματικά με συνακόλουθες εφαρμογές στα οικονομικά. Ως αφορμή για την περιγραφή των προς μελέτη εννοιών στην σύνοψη αναφορικά με έννοιες όπως οι παραπάνω, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα *διαχρονικής* βελτιστοποίησης:

Έστω οικονομία που υπάρχει σε σύνολο χρονικών στιγμών που αναπαρίσταται από τους φυσικούς, όπου το 0 συμβολίζει το παρόν. Σε ένα τέτοιο υπόβαθρο, ο κατάλογος από διατεταγμένους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $(c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ όπου $c_i,\ i \in \mathbb{N}$ όπου ο (i+1)-οστός όρος του ορίζεται να αναπαριστά την κατανάλωση στην χρονική στιγμή i, συγκεκριμένου δρώντα σε αυτή την οικονομία, ονομάζεται διαχρονική ροή κατανάλωσης του παραπάνω. Υποθέτουμε ότι δεδομένων περιορισμών (π.χ. περιορισμών που προκύπτουν από το διαθέσιμο εισόδημα σε κάθε χρονική στιγμή), δεν είναι οικονομικά προσιτές όλες οι μαθηματικά καλώς ορισμένες διαχρονικές ροές καταναλώσεις στον εν λόγω δρώντα αλλά ένα υποσύνολο αυτών, έστω $\mathcal{C}$ το οποίο θα ονομάζεται εφικτό σύνολο. Επίσης ο δρων έχει προτιμήσεις ως προς όλες τις διαχρονικές ροές στο $\mathcal{C}$. Ενδιαφερόμαστε για το ζήτημα της βέλτιστης επιλογής από τον δρώντα, στην χρονική στιγμή 0, διαχρονικής ροής κατανάλωσης δεδομένου του $\mathcal{C}$ και των προτιμήσεων. Υπό κάποιες προϋποθέσεις οι προτιμήσεις αυτές είναι δυνατόν να αναπαρίστανται από συνάρτηση, η οποία κατά τα γνωστά μας θα ονομάζεται συνάρτηση ωφέλειας, και μπορεί να έχει (υπό περαιτέρω προϋποθέσεις) την μορφή

$$v((c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)) = \sum_{i=o}^{\infty} g(c_i),$$

όπου g κατάλληλη πραγματική συνάρτηση. Τότε το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως:

$$\max_{(c_0,c_1,\ldots,c_n,\ldots)\in\mathcal{C}} v((c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)).$$

Η διαχρονική ροή κατανάλωσης αποτελεί παράδειγμα εμφάνισης της έννοιας της πραγματικής ακολουθίας στην οικονομική θεωρία, ενώ η παραπάνω συνάρτηση ωφέλειας παράδειγμα ανάλογης εμφάνισης της έννοιας της σειράς συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει την οικεία-σύμφωνα με τα όσα έχετε δει μέχρι στιγμής στην οικονομική θεωρία-δομή ενός προβλήματος βέλτιστης επιλογής, δηλαδή αποτελείται από, το εφικτό σύνολο που προσδιορίζεται από περιορισμούς (π.χ. στα συνηθισμένα προβλήματα που έχετε δει ή/και θα δείτε στην Μίκρο σας έχουμε τον εισοδηματικό περιορισμό που εξαρτάται από το διαθέσιμο εισόδημα και τις τιμές), προτιμήσεις επί των στοιχείων του εφικτού συνόλου που αναπαρίστανται από κάποια συνάρτηση, που ονομάζεται συνάρτηση ωφέλειας, και μελέτη της βέλτιστης επιλογής που προκύπτει από την περιορισμένη στο εφικτό σύνολο βελτιστοποίηση της συνάρτησης ωφέλειας. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το πρόβλημα που αναφέραμε βρίσκεται σε υπόβαθρο που αποτελείται από πιο περίπλοκα μαθηματικά αντικείμενα, π.χ. το εφικτό σύνολο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ωφέλειας αποτελούνται από ακολουθίες και όχι από στοιχεία κάποιου Ευκλείδιου χώρου, η συνάρτηση ωφέλειας προκύπτει από κάποιου είδους απειροπληθή άθροιση (σειρά), ενώ η βέλτιστη επιλογή (όταν υπάρχει και είναι μοναδική) θα είναι ακολουθία και όχι διάνυσμα κ.ο.κ. Προκειμένου επομένως να κατανοήσουμε μαθηματικά το πότε ένα πρόβλημα όπως το παραπάνω είναι *καλώς ορισμένο,* θα πρέπει να κατανοούμε επαρκώς έννοιες όπως οι ακολουθίες, η σύγκλιση, οι σειρές κ.λ.π.

Συνεπώς καταρχάς, θα δούμε με αυστηρό τρόπο την έννοια της πραγματικής ακολουθίας και του ορίου αυτής. Στην συνέχεια θα δούμε την έννοια της πραγματικής σειράς και θα επεκτείνουμε τις παραπάνω, σε έννοιες όπως οι ακολουθίες και σειρές πραγματικών συναρτήσεων και η σημειακή σύγκλιση αυτών, οπότε και θα έχουμε τα εργαλεία για να κατανοήσουμε το πως τίθενται προβλήματα όπως τα παραπάνω. Μάλιστα, μία από τις εφαρμογές των παραπάνω θα αφορά στο καλώς ορισμένο ενός ανάλογου προβλήματος.

Θα εξετάσουμε την έννοια της δυναμοσειράς, ως σειρά πολυωνυμικών συναρτήσεων με μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ όπου το x παίρνει τιμές σε κατάλληλο υποσύνολο των πραγματικών. Θα δούμε ότι υπό προϋποθέσεις, αυτές έχουν χρήσιμες ιδιότητες και είναι αρκετά «βολικές» συναρτήσεις ως προς διαδικασίες παραγώγισης και ολοκλήρωσης, συνεπώς έχουν ιδιαίτερα σημαντικές εφαρμογές στα πλαίσια της μαθηματικής ανάλυσης. Π.χ. θα μπορούμε δούμε εφαρμογές όπως οι παρακάτω:

A. «Οικείες» σε εμάς συναρτήσεις αναπαρίστανται από δυναμοσειρές τουλάχιστον σε κομμάτια των πεδίων ορισμών τους (π.χ. $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},\ \forall x \in \mathbb{R}$), αποκτώντας έτσι την δυνατότητα να εισάγουμε την έννοια της (πραγματικής) αναλυτικής συνάρτησης,

B. οι δυναμοσειρές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση λύσεων διαφορικών εξισώσεων,

C. οι δυναμοσειρές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν κατανομές πιθανότητας στους πραγματικούς αριθμούς, οπότε και θα μπορούμε (χρησιμοποιώντας και την έννοια της σημειακής σύγκλισης) να ορίσουμε με ακρίβεια σε κάποιες περιπτώσεις την έννοια του Νόμου Μεγάλων Αριθμών ή/και του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος και να αποδείξουμε τέτοια αποτελέσματα,

D. οι δυναμοσειρές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μας δώσουν το έναυσμα να αναρωτηθούμε για το πως είναι δυνατόν μια αναλυτική συνάρτηση να προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο, οπότε και θα είναι σχετική η διατύπωση γενικότερων αποτελεσμάτων όπως το θεώρημα Taylor (που αφορά γενικότερα, κατάλληλα παραγωγίσιμες συναρτήσεις) και η χρήση του για την αριθμητική επίλυση εξισώσεων (π.χ. μέθοδος Newton-Ralphson).

E. είναι δυνατή η χρήση της μορφής της αναπαράστασης από δυναμοσειρά του εκθετικού, για τον ορισμό του εκθετικού τετραγωνικών μητρών, το οποίο συνδέεται με την επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θα είναι εφικτή η εξέταση περαιτέρω εφαρμογών στα πλαίσια της οικονομικής θεωρίας, όπως ζητήματα δυναμικής ευστάθειας αγορών, ή/και ζητήματα οικονομικής μεγέθυνσης, κ.ο.κ.

Ενδεικτικές ασκήσεις για επανάληψη

Προκειμένου για την ευχερή παρακολούθηση του μαθήματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η οικειότητα με μαθηματικές έννοιες που έχετε ήδη συναντήσει, όπως π.χ. η έννοια της συνάρτησης, της πραγματικής συνάρτησης, λογισμού ορίων (π.χ. κανόνας L'Hopital), της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο υποσύνολο Ευκλείδειου χώρου, και των κανόνων παραγώγισης, έννοιες του ολοκληρωτικού λογισμού (αόριστο ολοκλήρωμα, ολοκλήρωμα Riemann, Θεμελιώδες θεώρημα Λογισμού καταχρηστικό ολοκλήρωμα Riemann, τεχνικές και κανόνες ολοκλήρωσης-π.χ. ολοκλήρωση κατά παράγοντες, ολοκλήρωση με αντικατάσταση, κ.ο.κ.), έννοιες γραμμικής άλγεβρας (π.χ. πραγματικά διανύσματα, μήτρες, γραμμικά συστήματα κ.ο.κ.), κ.λ.π.

Ο παρακάτω κατάλογος ασκήσεων που άπτονται μερικών από τις παραπάνω έννοιες, είναι εξαιρετικά μικρός και ατελής, και προφανώς οι φοιτητές παροτρύνονται στην επίλυση πολλών περαιτέρω ασκήσεων.

1. Έστω $A = \{a, b, c\}$ και $B = \{d, e, f, g\}$. Έστω η αντιστοίχιση από το A στο B, που αντιστοιχίζει στο a το e και το f και στο b το d. Είναι συνάρτηση; Αν όχι, είναι δυνατόν να περιοριστούν το A ή/και το B κατάλληλα έτσι ώστε η προκύπτουσα αντιστοίχιση να είναι συνάρτηση;
2. Για τα προηγούμενα σύνολα, να βρεθεί συνάρτηση από το το A στο B η οποία να είναι 1-1. Υπάρχει συνάρτηση από το A στο B η οποία να είναι επί;

   Έστω $B' = \{d, e, f\}$, να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις από το A στο B' που είναι αμφιμονοσήμαντες (δηλ. 1-1 και επί).
3. Έστω συναρτήσεις $f : P \to Q,\ g : Q \to M$, όπου P, Q, M κατάλληλα μη κενά σύνολα, οι οποίες είναι 1-1. Να οριστεί η σύνθεση τους και να δειχθεί ότι και αυτή είναι 1-1.
4. Να δειχθεί ότι η εκθετική συνάρτηση, ως πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους πραγματικούς είναι 1-1.
5. Είναι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, είναι συνεχής στο 0; Αν η απάντηση στο προηγούμενο είναι θετική, είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0, και αν ναί με τι ισούται η παράγωγος της εκεί;
6. Έστω ότι ο κ είναι φυσικός (σε ότι πούμε στο εξής θεωρούμε ότι το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ περιλαμβάνει το 0). Να βρεθεί εφόσον υπάρχει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{0} x^\kappa \exp(x)dx$ (Υπόδ.: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση. Επίσης εφόσον μπορείτε να βρείτε το ολοκλήρωμα για $\kappa = 0$, μπορείτε να εκφράσετε το παραπάνω ως συνάρτηση του ανάλογου ολοκληρώματος ως προς $\kappa - 1$ για κάθε $\kappa \geq 1$. Έτσι αποκτάτε μια αναδρομική σχέση μαζί με μια αρχική συνθήκη τις οποίες θα ικανοποιεί το

ολοκλήρωμα ως συνάρτηση του κ, και από τις οποίες μπορεί να βρεθεί το ζητούμενο χρησιμοποιώντας και επαγωγή).

7. Έστω ότι για το ολοκλήρωμα στην άσκηση 6, υποθέτουμε τώρα ότι $\kappa \geq 0$ και κ πραγματικός. (Υποδ.: Προσπαθήστε να λύσετε το προκύπτον ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την έννοια της συνάρτησης Γάμμα. Μην χρησιμοποιήσετε αυτή την έννοια στην επίλυση της προηγούμενης άσκησης. Εντούτοις επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμα σας εδώ, συμπίπτει με αυτό της προηγούμενης άσκησης όταν ο κ είναι φυσικός).
8. Έστω ότι για το ολοκλήρωμα στην άσκηση 6 αλλάζουμε τα όρια θεωρώντας το $\int_{\infty}^{0} x^{\kappa} \exp(x) dx$. Υπάρχει αυτό το ολοκλήρωμα ως πραγματικός αριθμός;

Περαιτέρω ασκήσεις σε τέτοιου είδους έννοιες είναι δυνατόν να δίνονται και κατά την διάρκεια του μαθήματος (πέραν των ασκήσεων που θα δίνονται για τις καθεαυτό έννοιες που θα πραγματευόμαστε στο μάθημα). Σε ότι αφορά σε περαιτέρω έννοιες που είναι δυνατόν να μας χρειαστούν και δεν έχουν συναντηθεί μέχρι τώρα, π.χ. η έννοια της φραγμένης πραγματικής συνάρτησης, αυτές θα οριστούν και θα αναλυθούν κατά την διάρκεια των ανάλογων διαλέξεων.