Σύγκλιση — Όρια Πραγματικών Ακολουθιών

Το λήμμα (Φραγή και Μονοτονία) μας έκανε μαθηματικά αυστηρό το πώς είναι δυνατόν μια πραγματική ακολουθία να συγκεντρώνεται γύρω από κάποιον αριθμό, εν προκειμένω το $\sup x_n$ ή το $\inf x_n$ ανάλογα με το είδος της μονοτονίας. Στο παράδειγμα της $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ παρατηρούμε ότι κάτι ανάλογο φαίνεται να συμβαίνει με τον αριθμό 0, παρόλο που η ακολουθία δεν είναι μονότονη. Δηλαδή φαίνεται ότι αν $(-\varepsilon,\varepsilon)$ ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0 και κάποιο $\varepsilon>0$, τότε σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας φαίνεται να εγκλωβίζονται μέσα σε αυτό, και το πλήθος των όρων που μένουν εκτός φαίνεται να εξαρτάται από το ε. Π.χ. αν $\varepsilon=1$, τότε μόνο ο $x_0=1$ μένει εκτός του $(-1,1)$, ενώ αν $\varepsilon = 1/2$ τότε μόνο οι $x_0 = 1$ και $x_1 = -\frac{1}{2}$ γίνουν εκτός του $(-1/2, 1/2)$.

Παρόλο που μέχρι το παρόν δεν μπορούμε να αποδείξουμε το παραπάνω για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ (μας χρειάζεται ο αναλυτικός ορισμός του ορίου βλ. παρακάτω), η παρατήρηση αυτή μας δίνει το έναυσμα για να κατανοήσουμε την έννοια του ορίου "γεωμετρικά".

Ορισμός. (Γεωμετρικός Ορισμός Ορίου). Όριο της πραγματικής ακολουθίας (x_n) θα ονομάζεται ο $\ell \in \mathbb{R}$, αν σε κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ βρίσκονται σχεδόν όλοι οι όροι της (x_n), με το πλήθος αυτών που βρίσκονται εκτός να μπορεί να εξαρτάται από το διάστημα. □

Συμβολισμός – Ορολογία. Αν η (x_n) έχει όριο τότε θα ονομάζεται συγκλίνουσα (convergent). Αν δεν έχει θα ονομάζεται αποκλίνουσα (divergent).
Η σύγκλιση της (x_n) και το όριο ℓ θα συμβολίζονται με $x_n \to \ell$, ή $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ ή $\lim x_n = \ell$.
Αν το ℓ δεν είναι όριο της (x_n), τότε αυτό θα συμβολίζεται με $x_n \not\to \ell$. □

Παρατηρήσεις.

1. Ο ορισμός θα εξακολουθούσε να ισχύει αν τα ανοικτά διαστήματα τα αντικαθιστούσαμε με κλειστά, ή ημιανοικτά ή ημικλειστά κ.ο.κ., αφού σε κάθε περίπτωση θα προσθέταμε ή θα αφαιρούσαμε πεπερασμένο πλήθος όρων της (x_n) από τον εγκλεισμό στο εκάστοτε διάστημα σε σχέση με τα άλλα. Θα χρησιμοποιούμε στα παρακάτω τα ανοικτά. Προσπαθήστε να δείτε πώς (και αν) θα άλλαζαν οι συλλογισμοί - αποδείξεις που ακολουθούν αν χρησιμοποιηθούν τα κλειστά.

2. Η σταθερή ακολουθία στο c έχει όριο το c. $(c \to c)$. Κάθε διάστημα $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ περιλαμβάνει ΟΛΟΥΣ τους όρους της.

3. Ο l δεν θα είναι όριο της (x_n), δηλαδή $x_n \not\to l$, αν υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το l στο οποίο δεν εμφανίζεται άπειρο πλήθος όρων της (x_n). Προσοχή! Αρκεί να υπάρχει ΕΝΑ τέτοιο διάστημα. Το να είναι το l όριο είναι "δυσκολότερο" από το να μην είναι. Π.χ. στο παράδειγμα της σταθερής ακολουθίας έχουμε ότι αν $d \in \mathbb{R}$, με $c \neq d$ τότε $x_n \not\to d$, αφού αν $|c-d| = \varepsilon > 0$ τότε στο $(d-\varepsilon/2, d+\varepsilon/2)$ δεν βρίσκεται κανένας όρος της ακολουθίας. Προσέξτε ότι μπορούμε να βρούμε διαστήματα με κέντρο το d στο οποίο να βρίσκονται όλοι οι όροι της (x_n) (π.χ. όταν η ακτίνα $> \varepsilon$), αλλά αυτό δεν αρκεί για να είναι ο d όριο. Επιπλέον βλέπουμε ότι οι σταθερές ακολουθίες έχουν ακριβώς ένα όριο.

4. Έστω η εναλλάσσουσα μεταξύ των c,d από προηγουμένως. Αυτή είναι αποκλίνουσα. Αυτό επειδή αν $l \in \mathbb{R}$ τότε θέτουμε $\varepsilon = \max\{|l-c|, |l-d|\} > 0$, αφού $c \neq d$. Στο διάστημα $(l-\varepsilon/2, l+\varepsilon/2)$, δεν θα βρίσκεται άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας, αφού αν $l=c$ δεν θα βρίσκονται οι όροι που ισούνται με d και αντιστρόφως αν $l=d$. Όταν $l \neq c,d$

δεν θα βρίσκονται εκτός που ισούνται με c ή με d οι όροι.
Το παράδειγμα αυτό μας λέει επιπλέον ότι υπάρχουν φραγμένες και αποκλίνουσες ακολουθίες.

5. Η (n) είναι αποκλίνουσα, αφού αν $\ell\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$ τότε εκτός του $(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$ βρίσκονται όλοι οι φυσικοί μεγαλύτεροι (ή ίσοι) του $\ell+\varepsilon$. Επομένως εδώ συμβαίνει κάτι "δραματικότερο". Σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται εκτός κάθε ανοικτού διαστήματος με κέντρο όποιο πραγματικό και όποια θετική ακτίνα. Αυτό ενδεχομένως σχετίζεται με το ότι η ακολουθία δεν είναι φραγμένη.

Στα παρακάτω θα δείξουμε διάφορα γενικά αποτελέσματα τα οποία βασίζονται στον γεωμετρικό ορισμό και θεμελιώνουν εν μέρει κάποιο λογισμό ορίων.

Λήμμα (Μοναδικότητα) Αν υπάρχει το όριο της (x_n) είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω $x_n\to\ell_1$, $x_n\to\ell_2$ με $\ell_1\neq\ell_2$. Τότε $\varepsilon:=|\ell_1-\ell_2|>0$. Θεωρούμε το $I_1=(\ell_1-\varepsilon/2,\ell_1+\varepsilon/2)$ και το $I_2=(\ell_2-\varepsilon/2,\ell_2+\varepsilon/2)$. Εξαιτίας του ορισμού του ε έχουμε ότι $I_1\cap I_2=\emptyset$. Αφού $x_n\to\ell_1$, σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο I_1. Αυτό συνεπάγεται ότι μόνο πεπερασμένο πλήθος βρίσκεται στο I_2. Άτοπο αφού $x_n \to \ell_2$. Η απόδειξη μέχρι στιγμής μας λέει ότι καμμία ακολουθία δεν μπορεί να έχει δύο όρια. Θα πρέπει να συμπληρωθεί με κάποιου είδους υπερπεπερασμένη επαγωγή, η οποία είναι προφανώς εκτός του σκοπού του μαθήματος. Επομένως θεωρείται το παραπάνω επαρκές. □

Παρατηρήσεις.

1. Συνεπώς το πλήθος των ορίων θα είναι ή μηδέν ή ένα. Επομένως όποτε βρίσκουμε όριο μπορούμε να σταματάμε εκεί την διαδικασία εύρεσης.
2. Το αποτέλεσμα της μοναδικότητας εξαρτάται και από τον τρόπο με τον οποίο ορίζονται τα διαστήματα στο $\mathbb{R}$. Είναι δυνατόν να ορίσουμε με πιο "εξωτικούς" τρόπους διαστήματα και να αποκτούμε "περίεργα" αποτελέσματα της μορφής: κάθε πραγματική ακολουθία συγκλίνει σε κάθε πραγματικό αριθμό.

Λήμμα (Φραγή και Σύγκλιση). Έστω ότι η (x_n) είναι συγκλίνουσα. Τότε είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Αφού υπάρχει $\ell \in \mathbb{R} : x_n \to \ell$, τότε για $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι σχεδόν όλοι οι όροι της (x_n) βρίσκονται στο $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ το οποίο συνεπάγεται ότι σχεδόν όλοι οι όροι της (x_n) βρίσκονται στο $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. Αφού το ε πεπερασμένο το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα (Φραγή - Εγκλεισμός). □

Παρατηρήσεις.

1. Είδαμε ότι υπάρχουν πραγματικές ακολουθίες που είναι φραγμένες αλλά αποκλίνουσες. Το αντίστροφο λοιπόν δεν ισχύει.

2. Το Λήμμα (Φραγή και σύγκλιση) είναι ισοδύναμο με το: "Αν η (x_n) μη φραγμένη τότε αποκλίνουσα."

(Θυμηθείτε ότι αν $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{όχι } B \Rightarrow \text{όχι } A)$ δηλαδή η B είναι αναγκαία συνθήκη για την A).

Προφανώς αυτή η εκδοχή του Λήμματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη προκειμένου να αποδεικνύουμε απόκλιση. Π.χ. η (n) είναι αποκλίνουσα ως μη φραγμένη.

Λήμμα [σύγκλιση-σύγκριση] Έστω (x_n); (y_n) πραγματικές ακολουθίες με $y_n \to l$ και $x_n = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος όρων. Τότε και $x_n \to l$.

Απόδειξη. Έστω ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ. Αφού $y_n \to \ell$ σχεδόν όλοι οι όροι της (y_n) εγκλωβίζονται στο διάστημα. Επομένως και σχεδόν όλοι οι όροι της (x_n) βρίσκονται στο διάστημα. □

Παρατήρηση. Το παραπάνω σημαίνει επίσης ότι κανένα πεπερασμένο πλήθος δεν επηρεάζει την συμπεριφορά της ακολουθίας ως προς το ζήτημα της σύγκλισης.

Τώρα παρατηρούμε ότι επί της ουσίας στο Λήμμα [Φραγή και Μονοτονία] είχαμε αποδείξει την σύγκλιση.

Λήμμα (Μονοτονία - Φραγή - Σύγκλιση) Έστω ότι η (x_n) φραγμένη και αύξουσα. Τότε $x_n \to \sup x_n$. Δυικά έστω ότι η (x_n) φραγμένη και φθίνουσα. Τότε $x_n \to \inf x_n$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα (Μονοτονία - Φραγή) έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$, σχεδόν όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n]$. Επομένως οι ίδιοι ακριβώς όροι βρίσκονται στο $(\sup x_n - \varepsilon, \sup x_n + \varepsilon)$ αφού αυτό είναι υπερσύνολο του προηγούμενου. Αφού το ε είναι αυθαίρετο το αποτέλεσμα έπεται. Το δυικό προκύπτει παρομοίως από την δυική εκδοχή του Λήμματος (Μονοτονία - Φραγή). □

Το παρακάτω αποτέλεσμα συνδυάζει πολλά από τα παραπάνω.

Λήμμα (*). Έστω ότι η (x_n) αύξουσα και ότι η (y_n) συγκλίνει. Επίσης έχουμε ότι $|x_n| \leq |y_n|$ σχεδόν για κάθε n. Τότε $x_n \to \sup x_n$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα (Μονοτονία-Φραγή-Σύγκλιση) το αποτέλεσμα θα έπεται αν δειχθεί ότι η (x_n) είναι φραγμένη αφού ξέρουμε ότι είναι αύξουσα. Επειδή η (y_n) συγκλίνουσα, έχουμε από το Λήμμα (Φραγή και Σύγκλιση) ότι η (y_n) είναι φραγμένη. Το αποτέλεσμα έπεται από τις σχέσεις $|x_n| \leq |y_n|$ σχεδόν για κάθε n και το Λήμμα (Φραγή-Σύγκλιση). □

Αναλυτικός Ορισμός Ορίου

Θυμηθείτε ότι για την $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ υποψιαστήκαμε ότι

συγκλίνει στο 0, επιβεβαιώσαμε τον ορισμό για κάποια αλλά όχι για όλα τα $\varepsilon > 0$. Ο γεωμετρικός ορισμός δεν μας δίνει άμεσα τα εργαλεία για κάτι τέτοιο, και θα μας ήταν χρήσιμο να τον μεταγράψουμε αναλυτικά, δηλαδή χρησιμοποιώντας ανισότητες. Αυτή η μεταγραφή θα πρέπει να αφορά στα εξής:

1. Αφού γνωρίζουμε το κέντρο των διαστημάτων στα οποία ελέγχουμε τον ορισμό, αυτά προσδιορίζονται από την ακτίνα τους, $\varepsilon > 0$. Επομένως η φράση για κάθε ανοικτό διάστημα θα αντικατασταθεί από το $\forall \varepsilon > 0$.

2. $x_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \iff |x_n-\ell|<\varepsilon$.

3. Εφόσον η ιδιότητα ισχύει σχεδόν για κάθε όρο της ακολουθίας, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι

$\exists n^* \in \mathbb{N}$: η ιδιότητα ισχύει για το x_n, $\forall n \geq n^*$.

Επίσης το n^* μπορεί να είναι συνάρτηση του ε αφού το πόσοι όροι θα βρίσκονται εντός είναι δυνατόν να εξαρτώνται από την ακτίνα.

Μεταγράφοντας τα παραπάνω αποκτούμε τον αναλυτικό ορισμό που ζητάμε.

Αναλυτικός Ορισμός Ορίου. $x_n \to \ell$ αν

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n^*(\varepsilon) : |x_n-\ell|<\varepsilon$$

$$\forall n \geq n^*(\varepsilon).$$

Παρατήρηση. Το n^* θα είναι φθίνουσα συνάρτηση του ε. Επίσης $x_n \not\to \ell$ αν $\exists \varepsilon>0 : \nexists n^*(\varepsilon)$ με την παραπάνω ιδιότητα.

Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι $\frac{1}{n+1} \to 0$. Έχουμε ότι

$x_n = \frac{1}{n+1}$, $\ell=0$. Έστω $\varepsilon>0$, τότε $|x_n-\ell|<\varepsilon \iff$

$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \iff n+1>\frac{1}{\varepsilon} \iff n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. (*). Μας δίνεται όπου αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $\text{Εφ}(x)$ = ο μικρότερος φυσικός μεγαλύτερος του x. Έχουμε ότι αν $n^*(\varepsilon) := \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ τότε η (**) ισχύει $\forall n \geq n^*(\varepsilon)$, και το αποτέλεσμα έπεται. Παρατηρούμε ότι η επιλογή δεν είναι μοναδική. Π.χ. θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $n^*(\varepsilon) := \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+5$. Παρόλα αυτά η επιλογή $n^*(\varepsilon) = \text{Εφ}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ είναι η πιο σφιχτή αφού ταυτόχρονα μας λέει ότι μόνο οι όροι $x_0, x_1, \ldots, x_{n^*(\varepsilon)-1}$ θα βρίσκονται εκτός του $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Π.χ. $\varepsilon = 1 \Rightarrow n^*(1) = 1$ οπότε μόνο ο $x_0 \notin (-1,1)$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα. Για την προηγούμενη να δειχθεί ότι $x_n \not\to 1$. Έχουμε ότι $x_n = \frac{1}{n+1}$, $l=1$. Έστω $\varepsilon = 1/2$.

$|x_n - l| < 1/2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n+1} - 1\right| < 1/2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < 1/2 \Leftrightarrow$

$\frac{n}{n+1} < 1/2 \Leftrightarrow 2n < n+1 \Leftrightarrow n < 1$ (***). Προφανώς η $(**)$ είναι αδύνατο να ισχύει για άπειρο πλήθος από φυσικούς, επομένως $\nexists\, n^*(1/2) \Rightarrow x_n \not\to 1$.