Παράδειγμα Συνάρτησης Ωφέλειας από Διαχρονική Κατανάλωση

Στο παρόν θα κατασκευάσουμε παράδειγμα συνάρτησης ωφέλειας με τη μορφή σειράς της οποίας μάλιστα το πεδίο ορισμού X, θα είναι σύνολο από πραγματικές ακολουθίες.

Υπόβαθρο διαχρονικής οικονομίας

Έστω οικονομία που υπάρχει κατά τις χρονικές στιγμές $t=0,1,2,\dots$ όπου το 0 αντιστοιχεί στο παρόν και το $t>0$ σε μελλοντικές χρονικές στιγμές.

Έστω δρων (καταναλωτής) στα πλαίσια αυτής, που ενδιαφέρεται για την διαχρονική κατανάλωσή του, η οποία είναι ακολουθία από μη αρνητικούς αριθμούς, συμβολικά (c_t), $c_t \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{N}$, όπου c_t είναι η κατανάλωση την χρονική στιγμή t.
Επομένως το σύνολο

$$\{(c_t),\ c_t \geq 0,\ t \in \mathbb{N}\}$$

είναι η συλλογή όλων των μαθηματικά δυνατών διαχρονικών καταναλώσεων σε όποιον τέτοιο δρώντα.

Εφικτό Σύνολο

Το εφικτό, στον δρώντα, σύνολο από διαχρονικές καταναλώσεις θα περιγράφεται από ανάλογη συλλογή από διαθέσιμους σε κάθε χρονική στιγμή πόρους προς κατανάλωση, και οι οποίοι θα προσδιορίζονται από οικονομικούς περιορισμούς που αντιμετωπίζει.

Στο παράδειγμα που μελετούμε ας εξειδικεύσουμε τα παραπάνω ως εξής:

i. **Αρχική Προικοδότηση**. Στην χρονική στιγμή 0, ο καταναλωτής έχει στην διάθεση του τον πόρο $k_0>0$. Αυτός του είναι διαθέσιμος εξωγενώς.

ii. Δεδομένου του k_0, ο παραγωγός καλείται να αποφασίσει στο 0 το πόσο θα καταναλώσει στο t [$c(t)$] και πόσο θα διαθέσει για να έχει στην διάθεση του ως πόρο στην $t+1$, [k_{t+1}]. Έτσι

παράλληλα με την (c_t) ορίζεται, δεδομένου του k_0 και η ακολουθία πόρων (k_t).

iii. Υποθέτουμε ότι στην χρονική στιγμή t, ο τελικά διαθέσιμος πόρος θα δίνεται από τον μετασχηματισμό $k_t \to k_t^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$. Η τεχνολογία

μετασχηματισμού $(\cdot)^{\alpha}$ είναι επίσης εξωγενής, και σταθερή στον χρόνο (το α δεν εξαρτάται από το t) και μπορεί να ερμηνευθεί κατά περίπτωση ως φθορά ή απόσβεση ($k_t>1, \alpha<1$), ως

μεγέθυνση ή παραγωγή ($k_t<1$, $\alpha<1$). Όταν $\alpha=1$

ο μετασχηματισμός είναι ταυτοτικός και αντιστοιχεί στην περίπτωση που δεν υπάρχει φθορά ή παραγωγή πόρου.

iv. Δεδομένων των i–iii προκύπτει φυσικά η παρακάτω συλλογή από εισοδηματικούς περιορισμούς

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

αφού σε κάθε χρονική στιγμή t, ο τελικά διαθέσιμος πόρος k_t^{α} θα είναι δυνατόν το πολύ να μοιράζεται μεταξύ τρέχουσας κατανάλωσης c_t και αποταμίευσης για την επόμενη χρονική στιγμή k_{t+1}.

Τα παραπάνω προσδιορίζουν το εφικτό σύνολο διαχρονικών καταναλώσεων ως την συλλογή των ακολουθιών τα ανάλογα στοιχεία των οποίων ικανοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς. Έτσι (*)

$$\text{Εφικτό Σύνολο} = \{ (c_t),\ c_t \geq 0,\ c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha},$$
$$k_t \geq 0,\ \alpha \in (0,1],\ \forall t \in \mathbb{N} \}.$$

Το εφικτό σύνολο είναι τελικά συνάρτηση των δύο οικονομικών εξωγενών παραμέτρων, k_0, α.

Συνάρτηση Ωφέλειας.

Δεδομένου του εφικτού συνόλου όπως προσδιορίστηκε παραπάνω η βέλτιστη επιλογή διαχρονικής κατανάλωσης θα γίνεται στην χρονική στιγμή 0 βάσει προτιμήσεων επί του εφικτού συνόλου. Υποθέτουμε ότι οι προτιμήσεις αυτές αναπαρίστανται από συνάρτηση ωφέλειας (έστω V) η οποία θα έχει αναγκαστικά ως πεδίο ορισμού το εφικτό σύνολο που είναι ένας χώρος από πραγματικές ακολουθίες. Επομένως αυτή θα είναι πολυπλοκότερο αντικείμενο από τις συνηθισμένες περιπτώσεις συναρτήσεων που μελετούσαμε και οι οποίες είναι ορισμένες σε υποσύνολα Ευκλείδειων χώρων.

[Παρατήρηση (*): παραδείγματα εφικτών διαχρονικών καταναλώσεων είναι τα

$$(k_0^\alpha, 0, 0, \dots, 0, \dots), \quad (0, k_0^\alpha, 0, \dots, 0) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

αφού μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ικανοποιούν τους σχετικούς περιορισμούς – Δείξτε το!

Άσκηση: Βρείτε εφικτή διαχρονική κατανάλωση για την οποία σχεδόν όλοι οι όροι να είναι μη μηδενικοί.]

Στο παράδειγμα μας υποθέτουμε ότι η v έχει την μορφή σειράς και πιο συγκεκριμένα ότι αν

$(c_t) \in$ Εφικτό Σύνολο τότε

$$v((c_t)) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^{\rho} \quad \text{όπου } \beta \in [0,1), \ \rho \in (0,1].$$

Σχόλια:

1. Ο συντελεστής β ονομάζεται συντελεστής χρονικής προτίμησης (rate of time preference), και εκφράζει την σχέση υποκατάστασης μεταξύ καταναλώσεων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Π.χ. όταν $\beta = 0$ έχουμε

ότι $v((C(t))=C_0^p$ επομένως σε αυτή την περίπτωση ο δρώντας ενδιαφέρεται μόνο για την παροντική του κατανάλωση και προφανώς η βέλτιστη του επιλογή είναι η $(k_0^\alpha, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ (γιατί;).

Όταν $b=1$, κάτι που προς το παρόν δεν επιτρέπεται, τότε ενδιαφέρεται εξίσου για όλες τις καταναλώσεις σε κάθε χρονική στιγμή. Οι ενδιάμεσες τιμές ερμηνεύονται αναλόγως (αναπτύξτε).

2. Ο όρος $u(C_t)=C_t^p$ είναι δυνατόν να ερμηνευθεί ως ωφέλεια από την κατανάλωση στη χρονική στιγμή t. Επομένως η v είναι δυνατόν να κατανοηθεί ως "σταθμισμένο" άθροισμα της ωφέλειας από την κατανάλωση στο t, $\forall t \in \mathbb{N}$ με "ενδεχόμενες σταθμίσεις" που δίνονται από τον συντελεστή χρονικής προτίμησης. □

Δεδομένων το παραπάνω το πρόβλημα της βέλτιστης επιλογής θα αναπαρίσταται από το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\max_{\substack{C(t)\in \text{Εφικτό} \\ \text{Σύνολο}}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t C_t^p. \quad (*)$$

Αυτό είναι περιπλοκότερο από όσα έχετε συναντήσει εξαιτίας της μορφής του Εφικτού Συνόλου. Προφανώς δεν διαθέτουμε τις έννοιες που θα βοηθούσαν στην επίλυση του. Μπορούμε όμως να ασχοληθούμε με το αν το πρόβλημα είναι καλώς ορισμένο.

Ορισμός [Καλώς Ορισμένο του Προβλήματος Βελτιστοποίησης]

Το (*) θα αναφέρεται καλώς ορισμένο αν $v((c_t)) \in \mathbb{R}$ $\forall (c_t) \in$ Εφικτό Σύνολο, δηλ. αν η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^\rho$ συγκλίνει για κάθε εφικτή διαχρονική κατανάλωση. $\square$

Το να είναι καλώς ορισμένο έχει σημασία αναφορικά με την δυσκολία επίλυσης του.

Διερεύνηση του Καλώς Ορισμένου στο Συγκεκριμένο Παράδειγμα

Διερευνούμε αν η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^\rho$ συγκλίνει για κάθε εφικτή διαχρονική κατανάλωση. Η χρήση του κριτηρίου του πηλίκου δεν είναι άμεσα εφικτή αφού αν $(c_t) \in$ Εφικτό Σύνολο, δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια το πως εξαρτάται από το t. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τα παρακάτω:

Έστω $(c_t) \in$ Εφικτό Σύνολο [~]. Αφού $\beta^t c_t^\rho \geq 0$ για να συγκλίνει η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t^\rho$, αρκεί (γιατί;) η ΑΜΑ $\left(\sum_{t=0}^{n} \beta^t c_t^\rho\right)$ να είναι φραγμένη. Εξαιτίας του [~] έχουμε ότι

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^\alpha \quad \forall t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_t \leq k_t^\alpha \\ k_{t+1} \leq k_t^\alpha \end{cases} \forall t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_t \leq k_t^{\alpha} & \forall t \in \mathbb{N} \\ k_t \leq k_{t-1}^{\alpha} & \forall t \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_t \leq \left(k_{t-1}^{\alpha}\right)^{\alpha} = k_{t-1}^{\alpha^2} \leq k_{t-2}^{\alpha^3} \leq \dots \leq k_0^{\alpha^{t+1}} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

$$\overset{\beta \geq 0,\ \rho > 0}{\Rightarrow} \quad \beta^t c_t^{\rho} \leq \beta^t k_0^{\rho \alpha^{t+1}} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \beta^t c_t^{\rho} \leq \sum_{t=0}^{n} \beta^t k_0^{\rho \alpha^{t+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως η μη αρνητικών όρων ΑΜΑ $\left(\sum_{t=0}^{n} \beta^t c_t^{\rho}\right)$ φράσσεται όρο προς όρο από πάνω από την $\left(\sum_{t=0}^{n} \beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}\right)$

και συνεπώς αρκεί η τελευταία να είναι φραγμένη (γιατί;)
Για το τελευταίο αρκεί η σειρά $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}$ να συγκλίνει (γιατί;) και για αυτό είναι δυνατή η (μερική) χρήση του κριτηρίου του πηλίκου αφού ο όρος $\beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}}$ είναι γνωστή συνάρτηση του t. Διερευνούμε λοιπόν ως εξής:

α. $\beta = 0$ οπότε δεν είναι δυνατή η εφαρμογή του κριτηρίου, αλλά έχουμε ότι $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_0^{\rho\alpha^{t+1}} = k_0^{\rho\alpha}$ οπότε έχουμε τετριμμένη σύγκλιση, και β. $\beta \in (0,1)$ οπότε είναι δυνατή η εφαρμογή του κριτηρίου (γιατί;) και συνεπώς έχουμε

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\beta^{n+1} k_0^{\rho a^{n+2}}\right|}{\left|\beta^{n} k_0^{\rho a^{n+1}}\right|} =$$

$$= \begin{cases} \beta \to \beta & \text{αν } a=1 \\ \beta k_0^{\rho(a^{n+2}-a^{n+1})} \to \beta & \text{αν } a \in (0,1). \end{cases}$$

Επειδή $\beta<1$ το κριτήριο του λόγου μας λέει ότι η $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t k_0^{\rho a^{t+1}}$ συγκλίνει απολύτως και επομένως το (*) είναι καλά ορισμένο.

Η Περίπτωση β=1

Όταν $\beta=1$ η παραπάνω διερεύνηση είναι αδύνατη αφού το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό. Ακόμη και στην περίπτωση που γνωρίζαμε ότι η $\sum_{t=0} k_0^{\rho a^{t+1}}$ αποκλίνει αυτό δεν θα μας έλεγε κάτι για την συμπεριφορά της ΑΜΑ $\left(\sum_{t=0}^{n} \beta^t c_t^{\rho}\right)$ (γιατί;) Παρόλα αυτά είναι δυνατόν να βρούμε σημεία του εφικτού συνόλου για τα οποία η $v((c_t)) = \sum_{t=0}^{\infty} c_t^{\rho}$ συγκλίνει. Π.χ. όταν $k \in \mathbb{N}$, και $c_t = \begin{cases} k_0^{a^{k+1}} & t=k \\ 0 & t \neq k \end{cases}$, έχουμε ότι η $(0, \dots, \underbrace{k_0^{a^{k+1}}}_{t=k}, 0, \dots) \in$

εφικτό σύνολο και $v((C(t))=\beta^k k_0^{\rho\alpha^{k+1}}$ οπότε έχουμε σύγκλιση. Αυτό δεν μας πληροφορεί για το αν υπάρχουν εφικτές διαχρονικές κατανομές για τις οποίες η $\sum_{t=0}^{\infty} C_t^{\rho}$ να αποκλίνει.

Άσκηση. Υποθέστε ότι $\beta=\rho=\alpha=1$. Να βρεθεί εφικτή διαχρονική κατανάλωση για την οποία η $\sum_{t=0}^{\infty} C_t^{\rho}$ να συγκλίνει, με σχεδόν όλους τους όρους θετικούς.