Αποδείξαμε ότι $e^x = \frac{x^i}{i!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (*), δείχνοντας ότι η δυναμοσειρά στο δεξί μέλος της παραπάνω ιδιότητας ικανοποιεί το ΠΑΤ $\left.\begin{matrix} y' = y \\ y(0) = 1 \end{matrix}\right\}$

του οποίου μοναδική λύση είναι η $y(x) = e^x$.

Το παρακάτω λήμμα αποτελεί γενίκευση αυτού του αποτελέσματος.

Λήμμα [Αυθαίρετο Κέντρο]

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} e^a \frac{(x-a)^i}{i!} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Αρκεί επίσης να δείξουμε ότι η $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e^a \frac{(x-a)^i}{i!}$ ικανοποιεί το παραπάνω ΠΑΤ.

Πρέπει καταρχάς να δείξουμε ότι δεν έχει ευφυλισμένο διάστημα σύγκλισης. Προφανώς συγκλίνει για $x = a$ (γιατί;). Όταν $x \neq a$ εφαρμόζοντας το κριτήριο του πηλίκου έχουμε $\left| \frac{e^a (x-a)^{n+1}/(n+1)!}{e^a (x-a)^n / n!} \right| =$

$= |x-a|\frac{1}{n+1} \to 0 \ \forall x \neq a$. Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$ και εφαρμόζεται το Θεώρημα της παραγωγισιμότητας. Συνεπώς

$$d\left(\sum_{i=0}^{\infty} e^a \frac{(x-a)^i}{i!}\right) \Big/ dx = \sum_{i=1}^{\infty} e^a \frac{i(x-a)^{i-1}}{i!} =$$

$$\underset{j=i-1}{=} \sum^{\infty} e^a \frac{(x-a)^j}{j!},$$ οπότε έχουμε $y'=y$. Επίσης

$$y(0) = \sum_{i=0}^{\infty} e^a \frac{(-a)^i}{i!} \underset{\substack{-a\in \Delta\Sigma \\ \| \\ \mathbb{R}}}{=} e^a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-a)^i}{i!}$$

$\underset{(*)}{=} e^a e^{-a} = 1$. Συνεπώς, επίσης $y(0)=1$ και το αποτέλεσμα έπεται. □

Παρατήρηση. Έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i! = \sum_{i=0}^{\infty} e^a \frac{(x-a)^i}{i!} \ \forall x, a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^a = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!}} \quad \forall x, a \in \mathbb{R}$$ το οποίο συνεπάγεται

ότι η δεξιά πλευρά είναι ανεξάρτητη του x! Επίσης

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)^k \underset{(*)}{=} \left(e^x\right)^k = e^{kx} \underset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i x^i}{i!} . \ \square$$

Επέκταση. Τα παραπάνω μας δίνουν την δυνατότητα να ορίσουμε την έννοια του εκθετικού τετραγωνικής μήτρας ως συνάρτησης που δέχεται για τέτοια μήτρα και αποδίδει μήτρα ιδίων διαστάσεων, ενώ έχει παρεμφερείς ιδιότητες με την $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Έστω A τετραγωνική πραγματική μήτρα $p \times p$ με στοιχεία τους $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i,j = 1, \dots, p$. Ως e^A θα μπορούσε να ορισθεί η $p \times p$ μήτρα με στοιχεία τους $e^{a_{ij}}$ $\forall i,j = 1, \dots, p$. Παρατηρούμε όμως ότι αν ορισθεί έτσι το εκθετικό, τότε π.χ. $\left(e^A\right)^2 = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & \cdots & e^{a_{1p}} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{a_{p1}} & \cdots & e^{a_{pp}} \end{pmatrix}^2 \neq e^{2A}$ όπως

θα περιμέναμε να έχει ένας ορισμός του εκθετικού που "μιμείται" τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης. Η παραπάνω "αποτυχία" του ορισμού (που δεν ισχύει όταν η A είναι διαγώνια - γιατί;) μας αναγκάζει να δώσουμε άλλη έννοια στο εκθετικό μήτρας. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i / i!$ τυπικά, επιτρέποντας

στο x να παίρνει ως τιμές όποια $p \times p$ μήτρα και εφόσον από την γραμμική μας άλγεβρα είναι καλώς ορισμένη η A^i ως $p \times p$ μήτρα, $\forall i \in \mathbb{N}$, αποκτούμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός (Εκθετικό Τετραγωνικής Μήτρας) Αν A $p\times p$ πραγματική μήτρα τότε
$$e^A := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \quad . \square$$

Παρατηρήσεις:

1. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η e^A είναι καλώς ορισμένη (δηλ. η σχετική σειρά μητρών συγκλίνει) για όποιαδ A. Επομένως αν $M_{p\times p}$ το σχετικό σύνολο μητρών, τότε το παραπάνω ορίζει συνάρτηση

$$\exp : M_{p\times p} \to M_{p\times p} .$$

(Αν $\|A\| := \left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ τότε το παραπάνω είναι δυνατόν να δειχθεί μέσω της ανισότητας
$$\|e^A\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} = \exp(\|A\|) < +\infty .)$$

Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι η A έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές.* Κάποια από τα παρακάτω γενικεύονται και όταν υπάρχουν μιγαδικές ιδιοτιμές με μη μηδενικό μιγαδικό μέρος.

2. Αν A διαγώνια τότε $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{pp} \end{pmatrix}$,**

$A^i = \begin{pmatrix} a_{11}^i & & \\ & a_{22}^i & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{pp}^i \end{pmatrix}$, οπότε $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{11}^i & & \\ & a_{22}^i & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{pp}^i \end{pmatrix} / i!$

* π.χ. η A είναι συμμετρική.

** Για λόγους οικονομίας συμβολισμών παραλείπουμε τα εκτός της κυρίας διαγωνίου στοιχεία στις διαγώνιες μήτρες.

$$\overset{(\text{γιατί;})}{=}\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} a_{11}^{i}/i! & & & \\ & \sum_{i=0}^{\infty} a_{22}^{i}/i! & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=0}^{\infty} a_{pp}^{i}/i! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & & & \\ & e^{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_{pp}} \end{pmatrix}$$

κάτι που συνάδει με τον προηγούμενο αποτυχημένο ορισμό.

3. Έχουμε ότι $tr\,A = \sum_{j=1}^{p} a_{jj} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ όπου λ_j η j-οστή ως προς την διάταξη, ιδιοτιμή της A. Εξαιτίας του ότι το σύνολο των ιδιοτιμών της A^i προκύπτει από την ύψωση στην i των ιδιοτιμών της A, $\forall i \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $tr(A^i)$ $= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{i}$. Οπότε $tr(e^A) = tr \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \overset{(\text{γιατί;})}{=} \sum_{i=0}^{\infty} tr(A^i/i!)$

$$\underset{\text{γραμμ. } tr}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} tr(A^i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\Big(\sum_{j=0}^{p} \lambda_j^{i}\Big) \underset{(\text{γιατί;})}{=} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^{i}}{i!}$$

$= \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j}$ το οποίο αποτελεί ένδειξη όχι όμως από-δειξη, ότι το σύνολο των ιδιοτιμών της e^A είναι το $\{e^{\lambda_j}, j=1,\dots,p\}$.

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάτι τέτοιο ισχύει γενικά. Εφόσον αυτό είναι αληθές έχουμε ότι η e^A είναι πάντοτε θετικά ορισμένη. Αυτό είναι παρεμφερές με την ιδιότητα της $e^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ότι δεν λαμβάνει μη θετικές τιμές. Επομένως $\det(e^\Lambda) = \prod_{j=1}^{p} e^{\lambda_j} = \exp\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j\right) = e^{tr(\Lambda)}$!

4. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε, και εφόσον από προηγουμένως $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!\right)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha x)^i/i!$, και επειδή εξαιτίας της προηγούμενης παρατήρησης η e^A είναι μη ιδιάζουσα οπότε η $(e^A)^\alpha$ ορίζεται και όταν $\alpha < 0$, έχουμε ότι

$$(e^A)^\alpha = \left(\sum_{i=0}^{\infty} A^i/i!\right)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha A)^i}{i!} =$$

$$e^{\alpha A}$$ οπότε το συγκεκριμένο εκθετικό έχει την ανάλογη ιδιότητα του πραγματικού εκθετικού.

Π.χ. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$! Π.χ. $(e^A)^0 = e^{0A} = e^{0_{p\times p}}$ $= \sum_{i=0}^{\infty} 0_{p\times p}^i/i! = 0_{p\times p}^0 = I_{p\times p}$, όπου $0_{p\times p}$ και $I_{p\times p}$ η μηδενική και η ταυτοτική $p\times p$ μήτρα αντίστοιχα.

5. Αν η A διαγωνίσιμη (diagonizable)***, το οποίο είναι ισοδύναμο με $A = U\Lambda U^{-1}$, όπου $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$ η διαγώνιος μήτρα των ιδιοτιμών, και U η μη ιδιάζουσα μήτρα των ιδιοδιανυσμάτων της A, διατεταγμένων σύμφωνα με την διάταξη των ιδιοτιμών στην Λ, τότε π.χ. $A^2 = U\Lambda U^{-1} U\Lambda U^{-1} =$

*** Π.χ. όταν η A έχει p διαφορετικές ιδιοτιμές ή η A είναι συμμετρική. Στην τελευταία περίπτωση έχουμε μάλιστα $U^{-1} = U'$.

$= U\Lambda^2 U^{-1}$ και επαγωγικά $A^k = U\Lambda^k U^{-1}$ όπου

$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p^k \end{pmatrix}$ (κάτι που αποτελεί ειδική

περίπτωση των όσων σχετικών χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω) έχουμε ότι

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (U\Lambda U^{-1})^i = \sum (U\Lambda U^{-1})^i/i!$$

$$\underset{\text{γιατί;}}{=} U \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda^i/i! \, U^{-1} \underset{\text{Παρ. 2}}{=} U e^{\Lambda} U^{-1}.$$

Επομένως στην περίπτωση της διαγωνισιμότητας αποδεικνύεται εύκολα ότι η e^A καλώς ορισμένη, θετικά ορισμένη, και διαγωνίσιμη, ενώ το σύνολο των ιδιοτιμών είναι το $\{e^{\lambda_j}, j=1,\dots,p\}$ και η e^A έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με την A, όπως και επίσης $\det(e^A) = \det(Ue^{\Lambda}U^{-1}) =$

$$= \det(U)\det(e^{\Lambda})\det(U^{-1}) = \frac{\det(U)}{\det(U)} \prod_{j=1}^{p} e^{\lambda_j} = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Επομένως όταν η A είναι διαγωνίσιμη το εκθετικό της είναι εύκολα υπολογίσιμο και οι προαναφερθείσες ιδιότητες εξάγονται εύκολα. Σε γενικότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται γενικεύσεις της διαγωνισιμότητας μέσω της κανονικής μορφής Jordan.

7. Το εκθετικό μήτρας είναι χρήσιμο στην επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. $\square$

Ψηφιδόσκεψης Τάξης Παρόιγωγοι.

Το Θεώρημα της Παραγωγισιμότητας μας πληροφορεί ότι και η παράγωγος είναι επίσης δυναμοσειρά με εσωτερικό διαστήματος σύγκλισης το εσωτερικό της αρχικής που είναι μη τετριμμένο. Επομένως και για την παράγωγο ισχύει το Θεώρημα παραγωγισιμότητας κ.ο.κ. το οποίο απευθείας σημαίνει ότι η αρχική δυναμοσειρά είναι k-φορές παραγωγίσιμη για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (όταν $k=0$ μιλάμε για την αρχική δυναμοσειρά). Αυτή προκύπτει από την όρο προς όρο παραγώγιση k-τάξης της αρχικής, είναι δυναμοσειρά με το ίδιο κέντρο και το ίδιο εσωτερικό διαστήματος σύγκλισης. Επομένως δυναμοσειρά με μη τετριμμένο διάστημα σύγκλισης είναι ομαλή (smooth – έχει παραγώγους κάθε τάξης) στο εσωτερικό του παραπάνω. Αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα. $y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-a)^i$ όπου $b_i = \prod_{j=1}^{k} (i+j)\, a_{i+k}$ και $\prod_{j=1}^{k} = 1$ όταν $j > k$. Το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της παραπάνω ταυτίζεται με το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της αρχικής. □

Απόδειξη. Έχουμε ότι $y^{(1)}(x) = y'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} (x-a)^i$.

Εφαρμόζουμε επαγωγή. Έστω ότι ισχύει ο τύπος για $k=J$. Οπότε $y^{(J)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{J} (i+j) a_{i+J} (x-a)^i$. Εφαρμό-

Ξέροντας το θεώρημα παραγωγισιμότητας έχουμε

$$y^{(J+1)}(x) = \frac{d\, y^{(J)}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} i \prod_{j=1}^{J} (i+j)\, a_{i+k} (x-a)^{i-1} \quad \text{και}$$

Θέτοντας $p = i-1 \iff i = p+1$ έχουμε ότι $y^{(J+1)}(x) =$

$$\sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \prod_{j=1}^{J} (p+1+j)\, a_{p+1+J} (x-a)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{J+1} (p+j)\, a_{p+J+1} (x-a)^p .$$

το οποίο συνάδει με τον γενικό τύπο. Επομένως η παραπάνω επαγωγή επιβεβαιώνει τον γενικό τύπο. Το τελευταίο μέρος του λήμματος προκύπτει άμεσα από το θεώρημα παραγωγισιμότητας. □

Παρατηρούμε ότι όταν υπολογίσουμε την k-τάξης παράγωγο στο κέντρο έχουμε

$$y^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} (i+j)\, a_{i+k} (a-a)^i$$

$$= \prod_{j=1}^{k} (0+j)\, a_{0+k}\, 0^0 = \prod_{j=1}^{k} j\, a_k = k!\, a_k .$$

Επομένως έχουμε ότι $a_k = y^{(k)}(a)/k!$ και επομένως

οποιαδήποτε δυναμοσειρά με μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης στο y μπορεί επίσης και εκφράζεται ως:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

για κάθε x στο διάστημα σύγκλισης, το οποίο εξασφαλίζεται με το θεώρημα Taylor.

Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty} x^i \ \forall x\in(-1,1)$.

Έχουμε ότι $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} \overset{(*)}{=} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, ενώ $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)^{(k)}$
$= \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} (i+j)\, x^i$. Συνεπώς $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} (i+j)\, x^i \ \forall x\in(-1,1)$.

Έτσι π.χ. αν $x=1/2$ έχουμε ότι

$$k=1 \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)}{2^i} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4,$$

$$k=2 \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)(i+2)}{2^i} = \frac{2!}{(1-1/2)^3} = 16 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

(*) Άσκηση: Δείξτε το επαγωγικά.

2. Ολοκληρωσιμότητα δυναμοσειρών.

Αναλόγως με την παραγωγισιμότητα είναι δυνατόν να αποδείξουμε το παρακάτω βασικό θεώρημα ολοκληρωσιμότητας για δυναμοσειρές. Προφανώς και αυτό θα αφορά σε περιπτώσεις που το διάστημα σύγκλισης είναι μη εκφυλισμένο.

Θεώρημα [Ολοκληρωσιμότητα] Έστω ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ έχει μη εκφυλισμένο διάστημα σύγκλισης. Τότε το $\int \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i\,dx$ υπάρχει, δίνεται από τον όρο προς όρο ολοκλήρωση της δυναμοσειράς, είναι και αυτό δυναμοσειρά με κέντρο το α, ενώ το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης του ταυτίζεται με το ανάλογο εσωτερικό της αρχικής. Το ορισμένο ολοκλήρωμα προκύπτει από το παραπάνω και το Θεμελιώδες Θεώρημα του λογισμού εφόσον το διάστημα ολοκλήρωσης καλύπτεται από το διάστημα σύγκλισης. □

Παρατηρήσεις:

1. Και αυτό δίνεται χωρίς απόδειξη.
2. Αποτελεί και αυτό αποτέλεσμα για το οποίο ισχύει η δυνατότητα μετάθεσης ορίων. Επειδή αρχικά ο υπολογισμός ανάγεται στην ολοκλήρωση πολυωνύμων οι δυναμοσειρές αποτελούν συναρτήσεις με εύκολα υπολογίσιμα ολοκληρώματα.
3. Έτσι $I(y(x)) := \int \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i dx \underset{\text{μετάθεση ορίων}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \int a_i (x-a)^i dx$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int (x-a)^i dx = c + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} (x-a)^{i+1}$$

$$\overset{j=i+1}{=} c + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j-1}}{j} (x-a)^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-a)^j$$ όπου

$$b_j = \begin{cases} c, & j=0 \\ a_{j-1}/j, & j>0. \end{cases}$$

5. Η απόφανση για το εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης μπορεί να εξαχθεί από το παραπάνω και την χρήση (και) του κριτηρίου του πηλίκου (Άσκηση - Κάντε το!).

6. αν $(x_1,x_2)\subseteq$ Διαστήματος Σύγκλισης τότε

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-a)^i\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= c+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}(x_2-a)^i - c - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}(x_1-a)^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i-1}}{i}\left[(x_2-a)^i-(x_1-a)^i\right].$$

7. Προφανώς και το αόριστο ολοκλήρωμα είναι ολοκληρώσιμο και ισχύει το Θεώρημα κ.ο.κ., αναλόγως με την παραγωγισιμότητα.

Άσκηση. Αν $I^{(k)}(y(x)) = \underbrace{\iint\cdots\int}_{k\ \text{φορές}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i (dx)^k$

να βρεθεί το $I^{(k)}(y(x))$ ως δυναμοσειρά. □

Παράδειγμα. $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \quad \forall x\in(-1,1).$

Έχουμε ότι $\int \frac{1}{1-x}\,dx \underset{\substack{u=1-x\\ -du=dx}}{=} c - \int \frac{1}{u}\,du = c-\ln(1-x)\ \forall x\in(-1,1)$

Επίσης βάσει των προηγούμενων $\int \sum_{i=0}^{\infty} x^i dx = c + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{i+1}$ $\forall x \in (-1,1)$ και επομένως [$x \in (-1,1) \Rightarrow |1-x| = 1-x$]

$$c - \ln(1-x) = c + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{i+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1-x) = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{i+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\overset{u=1-x}{\underset{u\in(0,2)}{\Rightarrow}} \quad \ln(u) = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-u)^{i+1}}{i+1} \quad \forall u \in (0,2)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(u) = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(u-1)^{i+1}}{i+1} \quad \forall u \in (0,2)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (u-1)^{i+1}, \quad \forall u \in (0,2). \ [*]$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι και ο λογάριθμος μπορεί να αναπαρασταθεί ως δυναμοσειρά με κέντρο το 1 όταν περιορισθεί κατάλληλα το πεδίο ορισμού του.

Επίσης έχουμε ότι όταν $u=0$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(u-1)^{i+1} \Big|_{u=0} =$
$= -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \to -\infty$ αφού ουσιαστικά πρόκειται για το αρνητικό της αρμονικής σειράς κάτι το οποίο ισούται με το $\lim_{u \to 0} \ln(u)$. Επιπλέον όταν $u=2$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(u-1)^{i+1} \Big|_{u=2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$$ που συγκλίνει.

Επομένως το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(u-1)^{i+1}$ είναι το $(0,2]$. Τέλος επειδή η $\ln u$ είναι συνεχής στο 2 και όποια δυναμοσειρά είναι συνεχής στο διάστημα σύγκλισης της έχουμε ότι

$$\ln 2 = \lim_{u \to 2^-} \ln u = \lim_{u \to 2^-} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (u-1)^{i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (u-1) \Big|_{u=2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}.$$

Επομένως βρήκαμε ότι η αρμονική εναλλάσσουσα σειρά ισούται με $\ln 2$ και επιπλέον

$$\ln x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (x-1)^i \quad \forall x \in (0,2]. \square$$