Συνέχεια Διάλεξης 28

- Εύρεση λύσεων σε ΣΔΕ με την μέθοδο των δυναμοσειρών
- Εφαρμογή στα Οικονομικά της Μερικής Ισορροπίας & Δυναμική Ευστάθεια αγοράς

Συνέχεια Διάλεξης 28

- Είδαμε ότι αν η

$$y' - \alpha y = b \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

έχει λύσεις της μορφής $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ τότε οι άγνωστοι (α_i) συντελεστές θα ικανοποιούν το (απαραιτήτως) σύστημα αναδρομικών σχέσεων:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{\alpha}{1}\left(\alpha_0 + \frac{b}{\alpha}\right) \\ \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}\alpha_1 \\ \alpha_3 = \frac{\alpha}{3}\alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n = \frac{\alpha}{n}\alpha_{n-1} \quad (n>1) \\ \vdots \end{array}\right.$$

- Παρατηρούμε ότι $\forall i>0$ ο α_i προσδιορίζεται μέσω του α_{i-1}
- Για $i=0$ ο α_0 παραμένει απροσδιόριστος:

θα είναι ακριβώς η σταθερά που θα προέκυ-
πτε αν ολοκληρώναμε (αορίστα) την εξίσωση ώστε
να βρούμε λύσεις.

Άρα θέτοντας $\underline{a_0 = c} \in \mathbb{R}$

χρειάζεται κ' επαγωγική Επιβεβαίωση: ας το σχολιάσουμε

$$a_1 = \frac{\alpha}{1}\left[c + \frac{b}{\alpha}\right] \checkmark$$

$$a_2 = \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\left[c + \frac{b}{\alpha}\right]$$

$$a_3 = \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left[c + \frac{b}{\alpha}\right]$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{\alpha^n}{1\cdot 2\cdots n}\left[c + \frac{b}{\alpha}\right] \quad (n \geq 1)$$

$$\vdots$$

Οπότε έχουμε ότι $a_i = \begin{cases} c, & i=0 \\ \dfrac{\alpha^i}{i!}\left[c + \dfrac{b}{\alpha}\right], & i>0 \end{cases}$

κ' η δυναμοσειρά $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = c x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!}\left[c + \frac{b}{\alpha}\right] x^i$

$$= c x^0 + \left[c + \frac{b}{\alpha}\right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!}$$

έχουμε αποφύγει την ολοκλήρωση σε αυτή την εξαγωγή φαίνεται να ικανοποιεί την εξίσωση $\forall c \in \mathbb{R}$.

– Θα έπρεπε να ελέγξουμε ότι έχω μη φραγμένο ΔΣ. Αν για κάποιες τιμές του c είχε φραγμένο ΔΣ τότε για αυτές τις τιμές οι αντίστοιχες δυναμοσειρές δεν θα μπορούσαν να αποτελούν λύσεις (γιατί;) κ' θα έπρεπε να εξαιρεθούν.

[Άσκηση: Βρείτε το ΔΣ της δυναμοσειράς]

– Μπορούμε να κάνουμε όμως κάτι ισχυρότερο: Χρησιμοποιώντας τα όσα ξέρουμε για την αναπαράσταση της e^x από δυναμοσειρές μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις λύσεις,

$$+\frac{b}{\alpha} = +\frac{b}{\alpha}\frac{(\alpha x)^0}{0!}$$

$$f(x) = c_0 x^0 + \left[c+\frac{b}{\alpha}\right]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\alpha x)^i}{i!} = \left[c+\frac{b}{\alpha}\right]\frac{(\alpha x)^0}{0!} + \left[c+\frac{b}{\alpha}\right]\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\alpha x)^i}{i!} - \frac{b}{\alpha} = \underbrace{\left[c+\frac{b}{\alpha}\right]}_{c^*}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha x)^i}{i!}}_{e^{\alpha x}} - \frac{b}{\alpha}$$

Το τοποθετούμε στην σειρά

— Γνωρίζουμε ότι $\forall y \in \mathbb{R}$ $e^y = \sum_{i=0}^{\infty} y^i / i!$

θέτοντας $y = \alpha x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!} = e^{\alpha x}$$

— Αφού $c \in \mathbb{R}$ τότε κ' το $c + \frac{b}{\alpha}$ υπάρχει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$, θέτοντας $c^* := c + \frac{b}{\alpha}$ έχουμε δηλ. ότι $c^* \in \mathbb{R}$

Οπότε παρατηρούμε ότι $f(x) = c^* e^{\alpha x} - \frac{b}{\alpha}$, $c^* \in \mathbb{R}$

α η είναι σαφώς ορισμένη συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

— Είναι εύλογο να επαληθεύσουμε

$$f'(x) = \alpha c^* e^{\alpha x}$$

$$f' - \alpha f = \alpha \cancel{c^* e^{\alpha x}} - \alpha \cancel{c^* e^{\alpha x}} + \cancel{\alpha} \frac{b}{\cancel{\alpha}}$$

$= b \iff f' - \alpha f = b$ οπότε πράγματι

κ. $f(x) = c^* e^{\alpha x} - \frac{b}{\alpha}$ είναι λύση $\forall c^* \in \mathbb{R}$

— Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι

$\Sigma\Lambda = \{ c^* e^{\alpha x} - \frac{b}{\alpha}, c^* \in \mathbb{R} \}$ δηλ. με το παραπάνω τελικά βρήκαμε όλες τις λύσεις

Άσκηση: Να βρεθούν αν υπάρχουν λύσεις της

$$y' - ay = b_0 + b_1 x \quad (*)$$ ✓

που έχουν την μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το μηδέν.

Εφαρμογή στα Οικονομικά: Δυναμική Ευστάθεια (γραμμικής) αγοράς

Έστω δυναμική αγορά που ζει σε συνεχή χρόνο $t \in \mathbb{R}$. Σε κάθε χρονική στιγμή οι συναρτήσεις προσφοράς κ' ζήτησης έχουν την μορφή: (εξωγενείς)

$$D(p) = c_0 - c_1 p$$
$$S(p) = c_2 + c_3 p$$

c_0, c_1, c_2, c_3 είναι ανεξάρτητα του t.

όπου c_0, c_1, c_2, c_3 ανεξάρτητα του t, εξωγενή, και $c_0 - c_2 > 0$, $c_0, c_2 \geq 0$, $c_1, c_3 > 0$.

* Να βρεθεί η τιμή ισορροπίας της αγοράς με σε κάθε χρονική στιγμή.

Απάντηση. Επειδή οι γραφές των $D(p)$, $S(p)$ είναι ανεξάρτητες του t, αναμένουμε ότι η p^e αν υπάρχει θα είναι ανεξάρτητη του t:

$$p^e: \quad \underline{D(p^e)} = \underline{S(p^e)} \iff$$

$$\underline{c_0 - c_1 p^e} = \underline{c_2 + c_3 p^e} \iff$$

$$c_0 - c_2 = (c_1 + c_3) p^e \iff \underline{p^e = \frac{c_0 - c_2}{c_1 + c_3}}$$

μοναδικότητα της τιμής ισορροπίας.

Η ύπαρξη & μοναδικότητα (και η σταθερότητα ως προς t) της p^e δεν εγγυώνται ότι η p^e θα επικρατεί σε κάθε t στην αγορά. Μας δίνεται ότι: α. στο t_0 η τιμή που επικρατεί είναι η P_0, και

β. η διαχρονική εξέλιξη της επικρατούσας τιμής

Δίνεται από την ΣΔΕ:

$$p'(t) = k\left(D(p) - S(p)\right), \quad k>0$$

Εξωγενές υπερβάλλουσα ζήτηση

όταν η υπερβάλλουσα ζήτηση > 0 η τιμή θα τείνει να αυξηθεί.

Να βρεθεί η διαχρονική εξέλιξη της τιμής (δηλ. η τιμή ως συνάρτηση του t)

Η $p(t)$ θα ικανοποιεί το ΠΑΤ

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad p'(t) = k\left(D(p) - S(p)\right) \\ &(\mathrm{II}) \quad p(t_0) = p_0 \end{aligned}\right\}$$

Αν αυτό έχει μοναδική λύση τότε αυτή θα αναγνωρισθεί ως η $p(t)$

Για την ΣΔΕ (I) έχουμε:

$$p' = k\big(\underbrace{D(p)}_{} - S(p)\big) = k\big[\overbrace{c_0 - c_1 p}^{D(p)} - \overbrace{c_2 - c_3 p}^{S(p)}\big]$$

$$\Leftrightarrow p' = -k(c_1+c_3)p + k(c_0-c_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{p'}_{y'} + \underbrace{k(c_1+c_3)}_{-\alpha}\underbrace{p}_{y} = \underbrace{k(c_0-c_2)}_{b} \qquad [x \to t]$$

$$y' - \alpha y = b, \quad \alpha \neq 0$$

Από προηγούμενους το ΣΛ της (I) δίνεται από τις

$$c^* e^{-k(c_1+c_3)t} - \frac{\cancel{k}(c_0-c_2)}{-\cancel{k}(c_1+c_3)} \to p^e, \quad c^* \in \mathbb{R}$$

$$= c^* e^{-k(c_1+c_3)t} + p^e, \quad c^* \in \mathbb{R} \ ✓$$

Για την (II) υπολογίζουμε τις λύσεις στο t_0 και

$$c^* e^{-k(c_1+c_3)t_0} + p^e = p_0 \Leftrightarrow$$

$$c^* = (p_0 - p^e)\, e^{k(c_1+c_3)t_0} \ ✓$$ οπότε κ' το

→ απόκλιση από την ισορροπία

ΠΑΤ έχει μοναδική λύση την

$$P(t) = (p_0 - p^e)\, e^{-k(c_1+c_3)(t-t_0)} + p^e$$

→ εκθετική με συντελεστή συνεχούς προσαρμογής

Που είναι κ' η ζητούμενη διαχρονική εξέλιξη.

* Αν $P_0 = P^e \Rightarrow P(t) = P^e \ \forall t \in \mathbb{R}$

(Αν η αγορά βρεθεί έστω κ' για στιγμή σε ισορροπία τότε είναι πάντα σε ισορροπία)

* Αν $P_0 \neq P^e \Rightarrow P(t) \neq P^e \ \forall t \in \mathbb{R}$

"στρίφνη" δυναμική συμπεριφορά

(αν βρεθεί εκτός ισορροπίας έστω κ' για στιγμή τότε είναι πάντα εκτός ισορροπίας) (επειδή το εκθετικό $>0 \ \forall t \in \mathbb{R}$)

* $k(c_1+c_3) > 0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} e^{-k(c_1+c_3)(t-t_0)} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{-k(c_1+c_3)(t-t_0)} + P^e = P^e$$

— Σε κάθε περίπτωση θα τείνει προς την ισορροπία.

Δυναμική Ευστάθεια

Επιστρέφουμε στην $y' - \alpha y = b$ κ' ασχολούμαστε με την περίπτωση που $\alpha = 0$ οπότε έχουμε την

$$y' = b \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = b \Leftrightarrow$$

$$dy = b\,dx$$

[λύνεται εύκολα με ολοκλήρωση $\int dy = \int b\,dx$

$$\Leftrightarrow y + c = bx + c^* \Leftrightarrow$$

$$y = c_* + bx \quad , \quad c_* \in \mathbb{R} \,]$$

Τι συμβαίνει αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των δυναμοσειρών;

* Υποθέτουμε λύσεις της μορφής $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ 4 άγνωστα
* Έχουμε $\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i\right)' = \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\alpha_{i+1} x^i$
* Αντικαθιστώντας στην $y' = b \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\alpha_{i+1} x^i = b \Leftrightarrow$$

$$(\overline{\nu}) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i x^i \quad \text{όπου}$$

$$\gamma_i = (i+1)\alpha_{i+1} \quad , \quad i \in \mathbb{N}$$

$$\delta_i = \begin{cases} b & , i=0 \\ 0 & , i>0 \end{cases}$$

Επομένως $(\nabla) \Leftrightarrow \gamma_i = \delta_i \ \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 = b \\ 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ n\alpha_n = 0 \quad n>1 \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = b \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \quad \forall n>1 \\ \vdots \end{cases}$$

Το α_0 έχει παραμείνει απροσδιόριστο. Αντιμετωπίζεται ως σταθερά ολοκλήρωσης:

$$\alpha_0 = C_x \in \mathbb{R}$$

Άρα η δυναμοσειρά που ψάχνουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i = C_x + bx + \sum_{i=2}^{\infty} \cancel{0 \cdot x^i}^{\,0}$$

$$= C_x + bx$$

* Άρα εντοπίστηκαν όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y = c_* + bx$$

Δεν χρειάζεται έλεγχος του μη εκφυλισμένου του ΔΣ αφού οι λύσεις είναι ήδη "αναγνωρισμένες" ως γραμμικές συναρτήσεις.