Συνέχεια Διάλεξης 13

Διαλέξεις 14 - 15

- Αρμονική, Υπεραρμονικές Σειρές

- Βασικός Λογισμός κ' Παραδείγματα

Συνεχεια Διαλεξης 13

$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots)$

$x_n = \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{x+1} \leq \max_{x \in [i, i+1]} \frac{1}{x+1}$

$\forall x \in [i, i+1]$ Επ $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{i+1}$ $\forall x \in [i, i+1], \forall i \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$\int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1} dx$ $\forall i \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα 4. [Αρμονική Σειρά]

$\to \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$

ΑΜΑ: $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \right)$. Έχουμε ότι η ΑΜΑ αποκλίνει

$\to$ έχει σχέση με $\int_{*}^{**} \frac{1}{x} dx$;

επειδή είναι μη φραγμένη. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\nexists (\gamma_n)$: $0 \leq \gamma_n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

κ' ότι η (γ_n) μη φραγμένη (γιατί;). Παρατηρούμε ότι $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \leq \int_i^{i+1} \max_{x \in [i, i+1]} \frac{1}{x+1} dx$$

$\int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \leq \frac{1}{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

$[i, i+1]$

$$= \int_i^{i+1} \frac{1}{i+1} dx = \frac{1}{i+1} \int_i^{i+1} dx = \frac{1}{i+1} \times \Big|_i^{i+1} = \frac{1}{i+1} (i+1-i)$$

σταθ. ως προς x

$x \Big|_i^{i+1}$

$= \frac{1}{i+1}$. Επομένως αθροίζοντας από $i=0$ εως n

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.} \quad (*)$$

Έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x+1} dx = \int_0^{n+1} \frac{1}{x+1} dx \overset{u=x+1}{=}$

$\to n+2$

$du = dx$

$\to u$ $\quad$ $\to du$ $\quad$ 1

$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx + \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1} dx$

$$= \int_1^{n+2} \frac{1}{u}\,du = \ln|u|\Big|_1^{n+2} = \ln(n+2) - \ln(1)$$

$$= \ln(n+2). \Longrightarrow \quad \ln(n+2) \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως $\gamma_n = \ln(n+2)$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(\ln(n+2)) =$

$$= (\ln 2, \ln 3, \ln 4, \ldots, \ln(n+2), \ldots)$$

$$\begin{array}{cccc} \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 & \ln(n+2) \\ \wedge\!\!| & \wedge\!\!| & \wedge\!\!| & \wedge\!\!| \\ 1 & 1+\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1} \end{array}$$

φράσσει κατά σημείο από κάτω των ΑΜΑ. Αν δεν είναι φραγμένη προκύπτει ότι κ' η ΑΜΑ δεν είναι φραγμένη. Έστω ότι η (γ_n) φραγμένη $\Longrightarrow$

$$\exists M > 0 : \ln(n+2) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{e αύξουσα}}{\Longrightarrow}$$

$\ln(n+2) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\ln(n+2)| = \ln(n+2)$

$$\exp(\ln(n+2)) \leq e^M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$n+2 \leq e^M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$n \le e^{M}-2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο. Άρα η (Sn)

μη φραγμένη $\Rightarrow$ η ΑΜΑ μη φραγμένη $\Rightarrow$

η ΑΜΑ αποκλίνουσα $\Rightarrow$ η αρμονική σειρά

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ. ∎ Συγκρίνουμε με την $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$ $|\alpha|<1$

Παρατήρηση: Παρόλο που $\frac{1}{i+1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$ δεν πηγαίνει "αρκετά γρήγορα" στο 0 ώστε το $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ να συγκλίνει καθώς το n μεγαλώνει. Είναι δυνατόν μάλιστα να αποδειχθεί ότι για "μεγάλο n" το $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$ αποκλίνει με "λογαριθμικό ρυθμό".

Διάλεξη 14 Τέλος Διάλεξης 13. ∎

Παράδειγμα 5. [Εναλλάσσουσα αρμονική]

ΑΜΑ: $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1}\right)$. Βάσει των όσων γνωρίζουμε μέχρι τώρα είναι αδύνατον να διακριβώσουμε το αν υπάρχει κ' με τι ισούται η

Εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

Είναι δυνατόν να δειχθεί (π.χ. μέσω δυναμοσειρών) ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = \ln 2$!!!

* σε σχέση με το παρ. 4 παρατηρούμε ότι η "αναδιάταξη" προσήμων σε άπειρες πλήθος όρων της σειράς είναι δυνατόν να μεταβάλλει την συμπεριφορά αυτής. Θα το διατυπώσουμε ακριβέστερα όταν μελετήσουμε την έννοια της απόλυτης σύγκλισης. $\boxed{\text{///}}$

Προτιμένω να συνεχίσουμε τα παραδείγματα μας αλλά κ να αναπτύξουμε μεθόδους που θα μας βοηθήσουν στο ό,τι μας χρειάζεται ένα βασικός λογισμό σειρών (που θα βοηθήσει στον λογισμό ορίων που έχουμε στην διάθεση μας):

Χρήσιμα για τα παρακάτω στοιχεία Λογισμού Σειρών

Λήμμα [Ομόσημοι Όροι]. Έστω ότι η (x_n) αποτελείται από ομόσημους όρους. Αν η ΑΜΑ της (x_n) είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει.

Απόδειξη. Αφού οι $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ έχουν το ίδιο πρόσημο τότε η $\left(x_0, x_0+x_1, x_0+x_1+x_2, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i, \dots\right)$ είναι μονότονη [αύξουσα αν $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, φθίνουσα αν $x_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$]. Αφού είναι κ' φραγμένη τότε η ΑΜΑ είναι συγκλίνουσα. $\boxtimes$

Το παραπάνω Λήμμα είναι επαρκές για να δείξουμε την ύπαρξη της υπερφαρμονικής

* Συγκρίνουμε το $\frac{1}{(i+1)^p}$ με την $\frac{1}{x^p}$ στο $[i, i+1]$

Έχουμε $\frac{1}{(i+1)^p} = \min_{x\in[i,i+1]} \frac{1}{x^p} \Leftrightarrow \frac{1}{(i+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \ \forall x\in[i,i+1] \Rightarrow \int_i^{i+1} \frac{1}{(i+1)^p} dx \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p} dx$

Θυμηθείτε $\int_1^y \frac{1}{x} dx = \ln y \to$ για αυτό μαθώ μας γιατί

σειράς:

Παράδειγμα 6. [Υπεραρμονική Σειρά] $p>1$

ΑΜΑ: $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p}\right)$ $\longrightarrow$ έχει σχέση με το $\int_{x}^{x} \frac{1}{(x+1)^p} dx$;

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^p}$

$\frac{1}{(n+1)^p} > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$. Επομένως έχουμε ομοσημία.

Άρα βάσει του παραπάνω λήμματος η υπεραρμονική σειρά θα υπάρχει αν η ΑΜΑ είναι φραγμένη.

Βάσει του πρώτου λήμματος Φραγή κ' Σύγκριση I η ΑΜΑ θα είναι φραγμένη αν $\exists\ (\delta_n)$:

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \delta_n \ \forall n\in\mathbb{N} \text{ κ' η } (\delta_n) \text{ φραγμένη}$$

(γιατί;). Παρατηρούμε ότι: $\to$ ανεξάρτητο του x

$\boxed{\forall i\in\mathbb{N}^*}=\{1,2,3,\ldots\}$ $\quad \frac{1}{(i+1)^p} = \int_i^{i+1} \frac{1}{(i+1)^p} dx =$

$$* = \int_i^{i+1} \min_{x\in[i,i+1]} \frac{1}{x^p} dx \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{Οπότε}$$

η $\frac{1}{x^p}$ φθ. φθίνουσα στο $[i, i+1]$

Αθροίζοντας από $i=1$ έως n έχουμε

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\frac{1}{(i+1)^p} = 1$ για $i=0$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq 1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}} \quad [*]$$

Επίσης $\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p}\,dx \overset{p>1}{=} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^{n+1} = \frac{1}{1-p}\left((n+1)^{1-p} - 1\right)$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^p}\,dx = \int x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} + c} \quad (*)$$

Οπότε $[*] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \frac{1-p}{1-p} + \frac{1}{1-p}\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$1 + \frac{1}{1-p}\left((n+1)^{1-p} - 1\right)$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)^p} \leq \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - p\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

→ ο καλώς το $n \to +\infty$

Θέτοντας $\delta_n := \boxed{\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - p\right]}$ η σειρά θα υπάρχει

επειδή $p>1 \Rightarrow 1-p<0 \Rightarrow x^{1-p} = \frac{1}{x^{p-1}} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$

$$\delta_n = \frac{1}{1-p}\left[\left(\frac{1}{n+1}\right)^{p-1} - p\right]$$

άρα η (δ_n) είναι φραγμένη. Αλλά $\frac{1}{n+1} \to 0$

κ' η $g(x) := \frac{1}{1-p}\left[x^{p-1} - p\right]$ είναι συνεχής στο

0 αφού $p>1$. Άρα από την Αλλ $\delta_n \to \frac{1}{1-p}\left[0^{p-1} - p\right]$

$= \frac{p}{p-1}$ οπότε αφού είναι συγκλίνουσα η (δ_n)

επίσης φραγμένη (γιατί;). Άρα η υπεραρμονική σειρά

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ υπάρχει. ⊡

Παρατήρηση: Το λήμμα είναι υπαρκτικό, αποντάει

μόνο στο i. κ' δεν μας πληροφορεί για το ii.

Στο παραπάνω παράδειγμα είναι δυνατόν να

αποδειχθεί ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p} = \zeta(p)$, $p>1$ όπου

ζ η συνάρτηση Ζήτα του Riemann.

Παρατήρηση: Η μη ύπαρξη της αρμονικής σειράς φαίνεται να σχετίζεται με την αποκλίνουσα συμπεριφορά του $\int_1^M \frac{1}{x}\,dx$ καθώς $M \to +\infty$

$\ln M \to +\infty$

Ενώ η ύπαρξη της υπεραρμονικής σειράς αντιστοίχως με την συγκλίνουσα συμπεριφορά του

$\int_1^M \frac{1}{x^p}\,dx$ καθώς $M \to +\infty$ επειδή $p>1$.

για $p<1$

Άσκηση – Υπεραρμονική σειρά: Να δειχθεί ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^p}$ δεν υπάρχει όταν $0 \le p \le 1$.

Τέλος Διάλεξης 14ης

Διάλεξη 15

Λήμμα [Άθροισμα Σειρών] Έστω ότι οι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ κ' $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ υπάρχουν. Τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i+y_i)$ υπάρχει κ' έχουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x_i+y_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i + \sum_{i=0}^{\infty} y_i .$$

Απόδειξη. Έστω η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i)\right) =$

$= \left(x_0+y_0,\ (x_0+y_0)+(x_1+y_1),\ (x_0+y_0)+(x_1+y_1)+(x_2+y_2),\ \dots,\ \sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i),\ \dots\right) = \left(x_0+y_0,\ (x_0+x_1)+(y_0+y_1),\ (x_0+x_1+x_2)+(y_0+y_1+y_2),\ \dots,\ \sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=0}^{n}y_i\right) \overset{\text{άθροισμα}}{=}$ ακολουθιών

$\left(x_0,\ x_0+x_1,\ x_0+x_1+x_2,\ \dots,\ \sum_{i=0}^{n}x_i,\ \dots\right) +$ → η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)$

$+ \left(y_0,\ y_0+y_1,\ y_0+y_1+y_2,\ \dots,\ \sum_{i=0}^{n}y_i,\ \dots\right).$ → η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n}y_i\right)$

Άρα $\left(\sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i)\right) = \left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n}y_i\right)$

ΑΜΑ αθροίσματος = άθροισμα ΑΜΑ

Κ' από όσα γνωρίζουμε για τα όρια: (άσκηση;)

$$\sum_{i=0}^{\infty}(x_i+y_i) = \lim \sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i) = \lim\left[\sum_{i=0}^{n}x_i + \sum_{i=0}^{n}y_i\right]$$

$$= \lim \underbrace{\sum_{i=0}^{n}x_i}_{\text{η σειρά συγκλίνει}} + \lim \underbrace{\sum_{i=0}^{n}y_i}_{\text{η δεύτερη σειρά}} = \sum_{i=0}^{\infty}x_i + \sum_{i=0}^{\infty}y_i \quad ∎$$

Λήμμα [Κοινός Παράγοντας] Έστω ότι η $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} x_i}$ υπάρχει κ' $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε η $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda x_i$ υπάρχει κ' ισχύει ότι

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} x_i.}$$

Απόδειξη. Έστω η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda x_i\right) =$

$$= \left(\lambda x_0,\ \lambda x_0 + \lambda x_1,\ \lambda x_0 + \lambda x_1 + \lambda x_2, \dots, \sum_{i=0}^{n} \lambda x_i, \dots\right)$$

$$= \left(\lambda x_0,\ \lambda(x_0 + x_1),\ \lambda(x_0 + x_1 + x_2), \dots, \lambda \sum_{i=0}^{n} x_i, \dots\right)$$

$$= \lambda\left(x_0,\ x_0 + x_1,\ x_0 + x_1 + x_2, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i, \dots\right).$$

βαθμωτός πολ/μος

Οπότε $\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda x_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$

ΑΜΑ βαθμωτού γινομένου βαθμωτό γινόμενο ΑΜΑ

Συνεπώς βάσει των όσων γνωρίζουμε για τα όρια

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda x_i = \lim \sum_{i=0}^{n} \lambda x_i = \lim \left[\lambda \sum_{i=0}^{n} x_i\right]$$

$$= \lambda \lim \sum_{i=0}^{n} x_i = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} x_i . \boxed{\equiv}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{3^i + 2^{i-1}}{2^{i-1} \cdot 3^i}\right]$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{3^i + 2^{i-1}}{2^{i-1} \cdot 3^i} = \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{3^i} = \frac{2}{2^i} + \frac{1}{3^i}$

$\forall i \geq 0.$

Επίσης έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \overset{\text{γεωμ. σειρά}}{=}$ $x = \frac{1}{2}$, $|1/2| < 1$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Επομένως βάσει του λήμματος

[κοινός παράγοντας], $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2^i} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 4.$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}$

$a = \frac{1}{3}$, $|\frac{1}{3}| < 1$

Επίσης $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \overset{\text{γεωμ.}}{\underset{\text{σειρά}}{=}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Επομένως εξουσίες του Λήμματος [Αθροίσματα σειρών]

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{3^i + 2^{i-1}}{2^{i-1} 3^i} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{3^i} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{2}{2^i} + \frac{1}{3^i} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} =$$

$$= 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}. \ \blacksquare$$

Άσκηση. Ισχύει ότι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \sum_{i=0}^{\infty} y_i$; Ναι ή όχι κ' γιατί; Είναι δυνατόν να υπάρχει η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$ αν υπάρχει έστω κ' μία από τις $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$;

* Τα δύο λήμματα που είδαμε μοιάζουν με αντίστοιχες ιδιότητες των ολοκληρωμάτων.

Λήμμα [Διάταξη]. Έστω ότι οι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ κ' $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ υπάρχουν. Επίσης, έστω ότι $x_i \leq y_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Τότε $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} y_i$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{\infty} y_i \leq 0$.

Από το λήμμα για το βαθμωτό γινόμενο (για $\lambda = -1$) έχουμε ότι $-\sum_{i=0}^{\infty} y_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-y_i)$. Από το λήμμα για το άθροισμα έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} x_i + \sum_{i=0}^{\infty} (-y_i) =$

$= \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - y_i)$. Η τελευταία είναι το όριο της ΑΜΑ $\left(x_0 - y_0,\ x_0 - y_0 + x_1 - y_1,\ \ldots,\ \sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i),\ \ldots\right)$.

Επειδή $x_i \leq y_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$, η ΑΜΑ έχει αρνητικούς όρους. Επομένως το όριο της (δηλ. η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - y_i)$) δεν μπορεί να είναι θετική (γιατί;).

$\boxtimes$

Παράδειγμα. Έστω οι γεωμετρικές σειρές $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i, \sum_{i=0}^{\infty} b^i$ με $|\alpha|, |b| < 1$ και $\alpha \le b$. Τότε $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \le \sum_{i=0}^{\infty} b^i$.

$x_i \le y_i$ ισχύει

Αυτό προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα ή και άμεσα αφού $\alpha \le b \iff 1-b \le 1-\alpha \overset{|\alpha|,|b|<1}{\implies}$

$$\frac{1}{1-\alpha} \le \frac{1}{1-b} \iff \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \le \sum_{i=0}^{\infty} b^i .$$

Λήμμα [Περιορισμένη Σειρά - Truncated Series]

Έστω ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει κ' $k>0$. Τότε κ' η $\sum_{i=k}^{\infty} x_i$ $(:= x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \dots)$ κ' ισούται με

παράμετρος περικοπής

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i$$

→ παρόμοια με αντίστοιχη ιδιότητα ολοκληρωμάτων: $\alpha < \beta < \gamma$, $\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Απόδειξη. Εφόσον υπάρχει η $\sum_{i=k}^{\infty} x_i$ θα είναι το όριο της $(x_k, x_k + x_{k+1}, x_k + x_{k+1} + x_{k+2}, \dots) =$

$$\Big(\sum_{i=0}^{k} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i, \sum_{i=0}^{k+1} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i, \dots\Big)$$

$n \ge k$

A

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} x_i, \sum_{i=0}^{k+1} x_i, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i, \dots\right)}_{B} - \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k-1} x_i, \sum_{i=0}^{k-1} x_i, \dots, \sum_{i=0}^{k-1} x_i, \dots\right)}_{\Gamma}$$

$\rightarrow n \geq k$

Παρατηρούμε ότι η B είναι η ΑΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)$ χωρίς τους όρους $x_0, x_0+x_1, \dots, \sum_{i=0}^{k-1} x_i$. Επομένως (γιατί;) $\lim B = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$. Η Γ είναι σταθερή στο $\sum_{i=0}^{k-1} x_i$. Επομένως $\lim \Gamma = \sum_{i=0}^{k-1} x_i$. Οπότε η A είναι συγκλίνουσα κ' $\lim A = \lim (B - \Gamma) =$

$$= \lim B - \lim \Gamma = \sum_{i=0}^{\infty} x_i - \sum_{i=0}^{k-1} x_i. \quad \square$$

Παράδειγμα: Έστω η γεωμετρική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ με $|\alpha| < 1$. Αν $k > 0$, έχουμε ότι $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i =$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}.$$

↳ ξέρουμε με τι ισούται από την εργασία μας όταν υπολογίσαμε $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$, $\alpha \neq 1$) Θέτοντας $n = k-1$

Π.χ. για $\alpha = 1/2$, $k = 10^{10}$, $\sum_{i=10^{10}}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2^{10^{10}}}}{1-\frac{1}{2}} =$

$= \frac{2}{2^{10^{10}}} = \frac{1}{2^{10^{10}-1}}$. ∎

Λύση: Στο παράδειγμα βλέπουμε ότι $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i$

$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{k\to+\infty} \alpha^k = 0.$ //

Μήπως το παραπάνω ισχύει γενικότερα; Δηλ.

αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ υπάρχει ισχύει ότι $\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=k}^{\infty} x_i = 0$;

Τέλος Διάλεξης 15 ∎