Συνέχεια Διάλεξης 7 - Διάλεξη 8

* Γεωμετρικός Ορισμός Ορίου

Συνέχεια Διάλεξης 7 - Διάλεξη 8

* Η συμπεριφορά των μονότονων κ' φραγμένων ακολουθιών να "συγκεντρώνονται ασυμπτωτικά γύρω" από πραγματικό αριθμό μας έδωσε τον τρόπο να αντιλαμβανόμαστε με ακρίβεια την έννοια της "ασυμπτωτικής συσσώρευσης" := σε κάθε διάστημα με κέντρο αυτόν τον αριθμό βρίσκεται σχεδόν όλη η ακολουθία με τον σύνολο των όρων που βρίσκονται εκτός να μπορεί να εξαρτάται από το διάστημα.

* Χρησιμοποιούμε το παραπάνω για να ορίσουμε την έννοια του ορίου: (θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απώλεια γενικότητας ανοικτά διαστήματα)

Ορισμός [Γεωμετρικός Ορισμός ορίου] Ο $l \in \mathbb{R}$ θα ονομάζεται όριο (limit) της πραγματικής ακολουθίας (x_n) αν: κάθε ανοικτό διάστημα με κέντρο το l περιέχει σχεδόν όλη την ακολουθία ~~(με το πεπερασμένο σύνολο των όρων που βρίσκονται εκτός να εξαρτάται από το διάστημα)~~

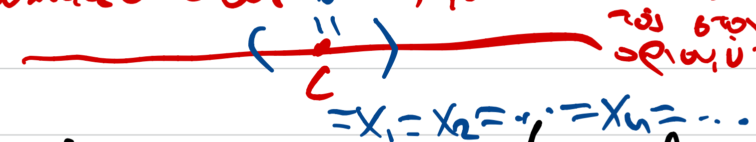
δηλ. όλοι οι όροι εκτός πεπερασμένου πλήθους αυτών βρίσκονται εντός του διαστήματος

Συμβολισμός-Ορολογία: Αν η (x_n) έχει όριο τότε ονομάζεται συγκλίνουσα (convergent). Η σύγκλιση της (x_n) στο ℓ θα συμβολίζεται $x_n \to \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$ ή $\lim x_n = \ell$.
Αν η (x_n) δεν έχει όριο τότε ονομάζεται αποκλίνουσα (divergent).

* Αν αντί ανοικτών διαστημάτων με κέντρο το ℓ χρησιμοποιούσαμε κλειστά ή οποιαδήποτε άλλη μορφή διαστήματος θα αποκτούσαμε ισοδύναμο ορισμό (γιατί;)

* Η (x_n) δεν θα συγκλίνει στο ℓ, αν υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ, εκτός του οποίου βρίσκεται άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας.

Άσκηση. Να δειχθεί ότι αν το πλήθος των όρων εκτός του διαστήματος είναι $\aleph_0$ ανεξάρτητο του διαστήματος τότε στον ορισμό του ορίου



Παραδείγματα:

1. Σταθερές Ακολουθίες: έστω $x_n = c \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (αυτό ισχύει μόνο για τις σταθερές ακολουθίες.) $\forall \varepsilon > 0$, $c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, επομένως $x_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (πλήθος όρων εκτός του $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$ – αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο σε σταθερές ακολουθίες – γιατί;) Επομένως $x_n \to c$ (δικαιολογεί το γνωστό και $\lim c = c$).

2. Εναλλάσσουσες Ακολουθίες: έστω $c \neq d$ και η $(c, d, c, d, \dots)$. Αυτή είναι αποκλίνουσα αφού: $x_n \not\to c$ αφού $d \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ για $\varepsilon \leq |c-d|$. Επομένως άπειρο πλήθος όρων δεν βρίσκεται στο $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Αντίστοιχα $x_n \not\to d$. Αν $\ell \in \mathbb{R}$ με $c \neq \ell \neq d$ τότε $x_n \not\to \ell$ αφού $x_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ όταν $\varepsilon = \min(|\ell - c|, |\ell - d|)$. ∎

Διάλεξη 7

Διάλεξη 8

Επομένως οι αναγράφουσες είναι συγκλίνουσες ακολουθίες.

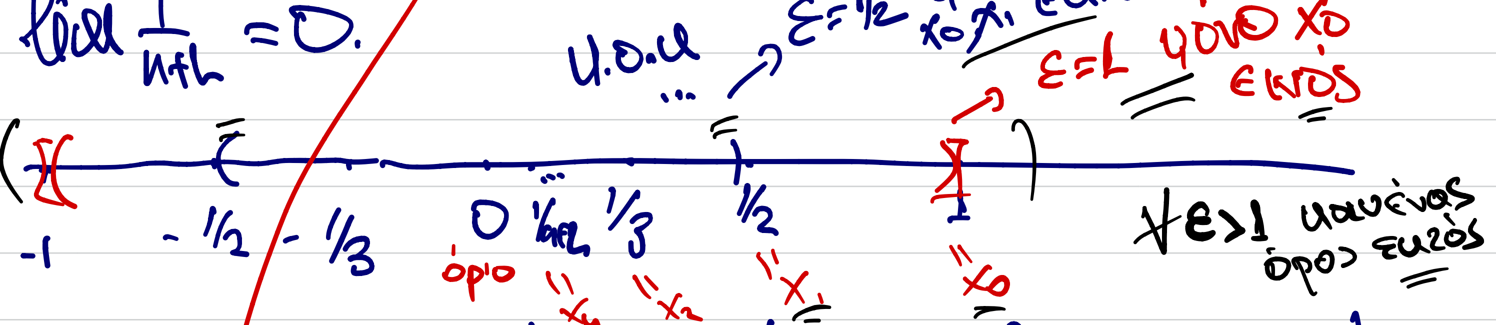
3. Φραγμένες κ' μονότονες: συγκλίνουσες (γιατί;) ✓

Αν (x_n) αύξουσα τότε $x_n \to \sup x_n$

Αν (x_n) φθίνουσα τότε $x_n \to \inf x_n$

π.χ. $\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$ ✓, $\inf\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ επομένως

$\lim \frac{1}{n+1} = 0$.



Θα υπάρχει τρόπος να βρούμε ποιοι όροι είναι εκτός του $(-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$.

$\Downarrow$

Θα μας χρειαστεί ο στριφνός αναλυτικός ορισμός του ορίου

4. $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots\right) \to$ δεν είναι μονότονη

$l-\varepsilon$ $\quad l+\varepsilon$

$0 \quad 1 \quad l \quad 2 \quad \dots \quad n$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_n$ → εντός του διαστήματος → μικρότερος φυσικός $> l+\varepsilon$

Αντίστοιχα έχουμε ότι $x_n \to 0$ (γιατί;)

(Άρα δεν χρειάζεται η μονοτονία για να έχουμε σύγκλιση)

γνησίως αύξουσα κ' δεν είναι φραγμένη

5. $(0,1,2,\dots,n,\dots)$ ✓ Έχουμε ότι αν $l\in\mathbb{R}$

$x_n \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $\forall n \geq$ μικρότερος φυσικός μεγαλύτερος του $l+\varepsilon$

Επομένως η (x_n) αποκλίνουσα: αποκλίνει "δραματικά" σχεδόν όλη η ακολουθία θα βρίσκεται εκτός του $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$ $\forall l\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon>0$.

* Παρόλο που ο γεωμετρικός ορισμός δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος στο να διαπιστώνουμε το αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα κ' στο να βρίσκουμε όρια όταν υπάρχουν, εντούτοις είναι εποπτικός για να δείχνουμε μερικά χρήσιμα

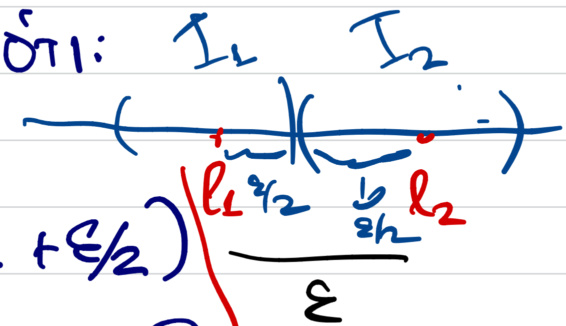
συμπεράσματα στον λογισμό των ορίων:

Λήμμα 1. [Μοναδικότητα ορίου] Αν η (x_n) συγκλίνουσα τότε το όριο της είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το όριο δεν είναι μοναδικό.

Αν $\underset{\in\mathbb{R}}{\ell_1} \neq \underset{\in\mathbb{R}}{\ell_2}$ με $x_n \to \ell_1$ και $x_n \to \ell_2$ τότε

για $\varepsilon := |\ell_1 - \ell_2| > 0$ έχουμε ότι:



Απόσταση μεταξύ ℓ_1, ℓ_2

Έστω

$$I_1 = (\ell_1 - \varepsilon/2, \ell_1 + \varepsilon/2)$$

$$I_2 = (\ell_2 - \varepsilon/2, \ell_2 + \varepsilon/2)$$

σχεδόν όλη η (x_n) βρίσκεται εντός

Οπότε $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Επειδή $x_n \to \ell_1$ κ' το $\varepsilon/2 > 0$, μόνο πεπερασμένου πλήθους όρων της (x_n) βρίσκονται εκτός του I_1. Επειδή $I_2 \subseteq I_1'$

$\Rightarrow$ στο I_2 βρίσκεται πεπ. πλήθος όρων της (x_n)

αυτό σημαίνει ότι μόνο πεπερασμένο πλήθος

$\Rightarrow$ στο $(-\infty, \ell_1 - \varepsilon/2] \cup [\ell_1 + \varepsilon/2, +\infty) \supseteq I_2$ βρίσκεται πλήθος πεπερασμένο όρων της (x_n)

όρων της (x_n) θα βρίσκεται στο I_2. Άτοπο αφού $x_n \to \ell_2$. ☒

* Το λήμμα επιβεβαιώνει ότι δεν είναι τυχαίο που δεν συναντήσαμε ποτέ και να έχει πάνω από ένα όρια.

* Το πλήθος των ορίων της (x_n) θα είναι είτε 0 (αποκλίνουσα) είτε 1 (συγκλίνουσα). Δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα.

Εκτός μαθήματος

* Το λήμμα οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο ορίζονται τα διαστήματα του $\mathbb{R}$. Σε πιο "εξωτικούς" ορισμούς διαστημάτων το λήμμα μπορεί να μην ισχύει. Π.χ. Αν ως μοναδικό ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ θεωρούνταν μόνο το $\mathbb{R}$ τότε κάθε ακολουθία

θα συνέβαινε σε κάθε πραγματικό αριθμό (γιατί;)
Τέτοιες γενικεύσεις μελετώνται από τον κλάδο των
Μαθηματικών που ονομάζεται Τοπολογία - Topology.