Συνέχεια Διάλεξης 7 - Διάλεξη 8

* Γεωμετρικός Ορισμός Ορίου

Συνέχεια Διάλεξης 7 - Διάλεξη 8

* Η συμπεριφορά των μονότονων κ' φραγμένων ακολουθιών να "συσσωρεύονται ασυμπτωτικά γύρω" από πραγματικό αριθμό μας έδωσε τον τρόπο να αντιλαμβανόμαστε με ακρίβεια την έννοια της "ασυμπτωτικής συσσώρευσης" := σε κάθε διάστημα με κέντρο αυτόν τον αριθμό βρίσκεται <u>σχεδόν όλη</u> η ακολουθία με τον σύνολο των όρων που βρίσκονται εκτός να μπορεί να εξαρτάται από το διάστημα.

* Χρησιμοποιούμε το παραπάνω για να ορίσουμε την έννοια του ορίου: (θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απώλεια γενικότητας ανοικτά διαστήματα)

Ορισμός [Γεωμετρικός Ορισμός ορίου] Ο $l \in \mathbb{R}$ θα ονομάζεται όριο (limit) της πραγματικής ακολουθίας (x_n) αν: <u>κάθε</u> ανοικτό <u>διάστημα</u> με κέντρο το l εμπεριέχει <u>σχεδόν όλη</u> την ακολουθία (με το πεπερασμένο σύνολο των όρων που βρίσκονται εκτός να εξαρτάται από το διάστημα]

δηλ. όλοι οι όροι εκτός πεπερασμένου πλήθους αυτών βρίσκονται εντός του διαστήματος

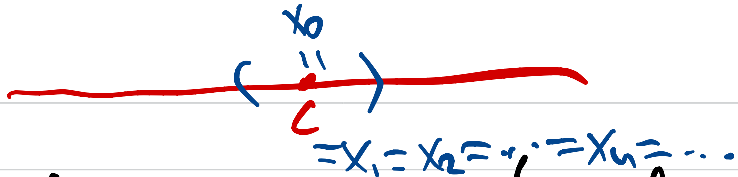
Συμβολισμός-Ορολογία: Αν η (x_n) έχει όριο τότε ονομάζεται συγκλίνουσα (convergent). Η σύγκλιση της (x_n) στο ℓ θα συμβολίζεται $x_n \to \ell$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$ ή $\lim x_n = \ell$.

Αν η (x_n) δεν έχει όριο τότε ονομάζεται αποκλίνουσα (divergent).

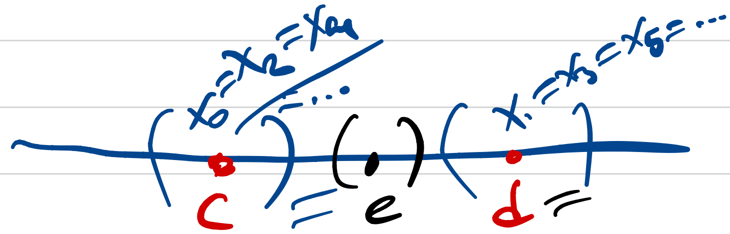
* Αν αντί ανοικτών διαστημάτων με κέντρο το ℓ χρησιμοποιούσαμε κλειστά ή όποια άλλη μορφή διαστήματος θα αποκτούσαμε ισοδύναμο ορισμό (γιατί;)

* Η (x_n) δεν θα συγκλίνει στο ℓ, αν υπάρχει ανοικτό διάστημα με κέντρο το ℓ, εκτός του οποίου βρίσκεται άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας.

Παραδείγματα:



1. Σταθερές Ακολουθίες: έστω $x_n = c \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\forall \varepsilon > 0$, $c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, επομένως $x_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (πλήθος όρων εκτός του $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$ – αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο σε σταθερές ακολουθίες – γιατί;) Επομένως $x_n \to c$ (δικαιολογεί το γνωστό και $\lim c = c$).



2. Εναλλάσσουσες Ακολουθίες: έστω $c \neq d$ και η $(c, d, c, d, \dots)$. Αυτή είναι αποκλίνουσα αφού: $x_n \not\to c$ αφού $d \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ για $\varepsilon \leq |c-d|$. Επομένως άπειρο πλήθος όρων δεν βρίσκεται στο $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Αντίστοιχα $x_n \not\to d$. Αν $\ell \in \mathbb{R}$ με $c \neq \ell \neq d$ τότε $x_n \not\to \ell$ αφού $x_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ όταν $\varepsilon = \min(|\ell-c|, |\ell-d|)$. ∎

Διάλεξη 7

Επομένως οι εναλλάσσουσες είναι συγκλίνουσες ακολουθίες.

3. Φραγμένες κ' μονότονες: συγκλίνουσες (γιατί;)

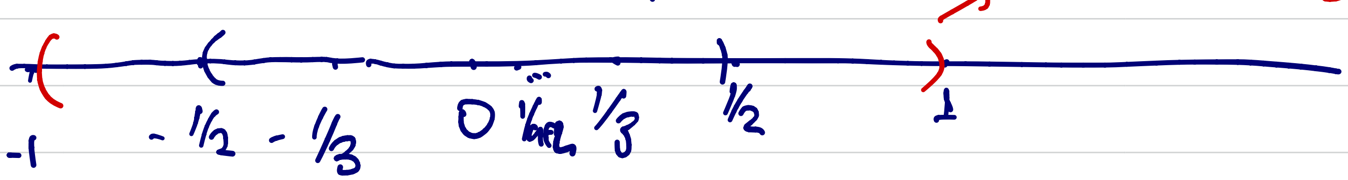
αν (x_n) αύξουσα τότε $x_n \to \sup x_n$

αν (x_n) φθίνουσα τότε $x_n \to \inf x_n$

π.χ. $\left(0, 1, 2, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$, $\inf \frac{1}{n+1} = 0$ επομένως $\lim \frac{1}{n+1} = 0$.

κ.ο.κ ... $\varepsilon = 1/2$ μόνο x_0, x_1 εκτός

$\varepsilon = 1$ μόνο x_0 εκτός



ώς υπάρχει τρόπος να βρούμε ποιοι όροι είναι εκτός του $(-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$.

Θα μας χρειαστεί ο <u>αυστηρός</u> αναλυτικός ορισμός του ορίου

4. $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots\right) \to$ δεν είναι μονότονη

Αντίστοιχα έχουμε ότι $x_n \to 0$ (γιατί;)

(Τώρα δεν χρειάζεται η μονοτονία για να έχουμε σύγκλιση)

5. $(0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$. Έχουμε ότι αν $\ell \in \mathbb{R}$

$x_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$, $\forall n \geq$ μικρότερος φυσικός μεγαλύτερος του $\ell+\varepsilon$

Επομένως η (x_n) αποκλίνουσα: αποκλίνει "δραματικά" σχεδόν όλη η ακολουθία θα βρίσκεται εκτός του $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ $\forall \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$.

* Παρόλο που ο γεωμετρικός ορισμός δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος στο να διαπιστώνουμε το αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα κ' στο να βρίσκουμε όρια όταν υπάρχουν, εντούτοις είναι επαρκής για να δείχνουμε μερικά χρήσιμα

συμπεράσματα στον λογισμό των ορίων:

Λήμμα 1. [Μοναδικότητα ορίου] Αν η (x_n) συγκλίνουσα τότε το όριο της είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το όριο δεν είναι μοναδικό. Αν $\ell_1 \neq \ell_2$ με $x_n \to \ell_1$ <u>και</u> $x_n \to \ell_2$ τότε για $\varepsilon := |\ell_1 - \ell_2| > 0$ έχουμε ότι:

Έστω
$$I_1 = \left(\ell_1 - \varepsilon/2, \ell_1 + \varepsilon/2\right)$$
$$I_2 = \left(\ell_2 - \varepsilon/2, \ell_2 + \varepsilon/2\right)$$

Οπότε $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Επειδή $x_n \to \ell_1$ κ' το $\varepsilon/2 > 0$, μόνο πεπερασμένου πλήθος όρων της (x_n) βρίσκεται εκτός του I_1. Επειδή $I_2 \subseteq I_1^c$ αυτό σημαίνει ότι μόνο πεπερασμένο πλήθος όρων της (x_n) θα βρίσκεται στο I_2. Άτοπο αφού $x_n \to \ell_2$. $\boxtimes$

* Το λήμμα επιβεβαιώνει ότι δεν είναι τυχαίο που δεν συναντήσαμε ποτέ κάτι να έχει πάνω από ένα όρια.

* Το πλήθος των ορίων της (x_n) θα είναι είτε 0 (αποκλίνουσα) είτε 1 (συγκλίνουσα). Δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα.

* Το λήμμα οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο ορίζονται τα διαστήματα του $\mathbb{R}$. Σε πιο "εξωτικούς" ορισμούς διαστημάτων το λήμμα μπορεί να μην ισχύει. Π.χ. Αν ως μοναδικό ανοιχτό διάστημα με κέντρο το ℓ θεωρούνταν μόνο το $\mathbb{R}$ τότε κάθε ακολουθία

θα συνέβαινε σε <u>κάθε</u> πραγματικό αριθμό (γιατί;)
Τέτοιες θεμελιώδεις μελετώνται από τον κλάδο των
Μαθηματικών που ονομάζεται Τοπολογία-Topology.