Διάλεξη 5-6

- Άλγεβρα κ' φραγή
- Μονοτονία Πραγματικών Ακολουθιών

Διάλεξη 5

Τα Λημ. 1 - 3 θα μας είναι χρήσιμα π.χ. σε περί-πτωση που η (x_n) δεν μας είναι απόλυτα γνωστή αλλά γνωρίζουμε ότι υπάρχει κ' μας ενδιαφέρει να ξέρουμε το αν είναι φραγμένη:

Παράδειγμα: Έστω ότι για την (x_n) ισχύει ότι

$$0 \le x_n \le \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ εκτός πεπερασμένου πλήθους}$$

όρων. Τότε κ' η (x_n) φραγμένη αφού

- από Λήμμα 3 μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους που δεν ικανοποιούν τις ανισότητες

- για τους υπόλοιπους έχουμε ότι $x_n = |x_n| \le |y_n| = y_n := 1/n+1$, ενώ η $(1/n+1)$ είναι φραγμένη.

- Το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 2 (ii)

Αλληλεπίδραση Φραγής κ' Άλγεβρας

Τι συμβαίνει με την φραγή όταν κάνουμε αλγεβρικές πράξεις επί φραγμένων ακολουθιών, διατηρείται;

- Οι αλγεβρικές πράξεις μπορούν να νοηθούν ως μετασχηματι-σμοί ακολουθιών. Επηρεάζουν την φραγή;

Λήμμα. [Φραγή κ' Άλγεβρα] Έστω $(x_n), (y_n)$ φραγμένες, και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

I. η $(x_n)+(y_n)$ φραγμένη, $= (x_n+y_n)$

II. η $\lambda(x_n)$ φραγμένη, και (λx_n)

III. η $(x_n)\otimes(y_n)$ φραγμένη. $(x_n y_n)$

Απόδειξη. Θα εργαστούμε με απόλυτα φράγματα. (x_n) κ' (y_n) φραγμένες $\Leftrightarrow \exists\, C_x, C_y > 0$:

$$\begin{cases} |x_n| \le C_x & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 1) \\ |y_n| \le C_y & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 2) \end{cases}$$

I. $(\alpha 1) + (\alpha 2)$ κατά μέλη $\Rightarrow |x_n| + |y_n| \le C_x + C_y \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 3)$

αλλά εξαιτίας της Τριγωνικής ανισότητας $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} : |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|)$

$$\begin{cases} |x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 4) \\ |x_n| + |y_n| \le C_x + C_y & \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha 3) \end{cases}$$

Από $(\alpha 3)$ κ' $(\alpha 4)$ $\quad |x_n + y_n| \le C_x + C_y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ οπότε το

$C_x + C_y > 0$ αποτελεί απόλυτο φράγμα για την $(x_n)+(y_n)$.

II. $|\lambda| \times (\alpha 1)$ κατά μέλη $\Rightarrow |\lambda|\,|x_n| \le |\lambda|\, C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

απόλ. τιμή του n-στού όρου της (λx_n)

Αλλά $|\lambda|\,|x_n| = |\lambda x_n| \Rightarrow |\lambda x_n| \le |\lambda| C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

το

επομένως το $|\lambda| C_x$ είναι απόλυτο φράγμα για την $\lambda(x_n)$.

III. $(\alpha 1) \times (\alpha 2)$ κατά μέλη $\Rightarrow |x_n|\,|y_n| \le C_x C_y \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$|x_n y_n|$

αποτελεί άνω φράγμα του όρου της $(x_n y_n)$

Αλλά $|x_n||y_n| = |x_n y_n| \Rightarrow |x_n y_n| \leq C_x C_y \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως το $C_x C_y \geq 0$ αποτελεί απόλυτο φράγμα για την $(x_n) \otimes (y_n)$. ■

* Η άλγεβρα διατηρεί την φραγή.

Η παραπάνω δομή δεν υπάρχει στην άλγεβρα μεταξύ μη φραγμένων ακολουθιών: είναι δυνατό καθε ενδεχόμενο – βρείτε παραδείγματα!

Όταν όμως προσθέτουμε μεταξύ τους φραγμένη με μη φραγμένη ακολουθία τότε:

Λήμμα [Μη φραγή] Έστω ότι (x_n) φραγμένη κ' (y_n) μη φραγμένη. Τότε $(x_n)+(y_n)$ μη φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω ότι η $(x_n)+(y_n)$ φραγμένη. Τότε $\exists\, L, M \in \mathbb{R}$:

$$L \leq x_n + y_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff$$

$$L - x_n \leq y_n \leq M - x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

(x_n) φραγμένη $\iff \exists \inf x_n$ κ' $\sup x_n$ κ' $\inf x_n \leq x_n \leq \sup x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \iff$ *

ανεξάρτητα του n

$$-\sup x_n \leq -x_n \leq -\inf x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}) \quad **$$

$\xrightarrow{\text{στοιχ. ορισμ.}}$ $\xrightarrow{\text{στοιχ. ορ.}}$ ✓ $\mathbb{C}^{*!}$

$$\Rightarrow \quad L - \sup x_n \leq y_n \leq M - \inf x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

κ' επομένως οι $L^* := L - \sup x_n \in \mathbb{R}$ κ' $M^* := M - \inf x_n \in \mathbb{R}$ αποτελούν αντίστοιχα κάτω κ' άνω φράγματα για την (y_n). Άτοπο (γιατί;). ∎

* Στο παραπάνω έχει σημασία ότι τα $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητα του n.

B. Μονοτονία

Είναι δυνατόν σε πραγματική ακολουθία

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

οι όροι να μην διατάσσονται σύμφωνα με την φυσική (ή την αντίστροφή της) τους διάταξη στην πραγματική ευθεία:

πχ. στην $\underline{(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots)}$

ο x_2 έπεται του x_1 αλλά $x_2 \leq x_1$ ενώ ο x_3 έπεται του x_2 αλλά $x_3 \geq x_2$.

Οι ακολουθίες στις οποίες αυτό <u>αποκλείεται</u> ονομάζονται μονότονες.

Σχηματικά ο συλλογισμός μας θα είναι:

Μονότονες πραγματικές συναρτήσεις

συνάρτησης ορισμός → μονότονες πρ. ακολουθίες

Προετοιμασία: Έστω $f: X \to \mathbb{R}$. Τώρα το X θα πρέπει να είναι διατεταγμένο (π.χ. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$)

Ορισμός: η f θα ονομάζεται:

i. αύξουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

ii. γνησίως αύξουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

iii. φθίνουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

iv. γνησίως φθίνουσα αν $\forall x_1, x_2 \in X$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Όταν η f ικανοποιεί κάποιο από τα i-iv ονομάζεται μονότονη. □

* Οι αντίστοιχοι αγγλικοί όροι:
  - i increasing
  - ii strictly increasing
  - iii decreasing
  - iv strictly decreasing

Monotonic

* Για τις περιπτώσεις iii-iv γραμματικά ακριβέστερος θα ήταν ο όρος αντιμονότονη.

Παράδειγμα.
αν η f σταθερή, τότε είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα. Αντίστροφα αν η f ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα τότε σταθερή αφού

αν $x_1 \neq x_2$ (έστω $x_1 < x_2$) $\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ☒

Άσκηση. Υπάρχει f ταυτόχρονα γνησίως αύξουσα κ' γνησίως φθίνουσα;

Παράδειγμα:

$X = \mathbb{R}$, $f(x) := \eta\mu(x)$. Μη μονότονη (γιατί;)
$X = \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$. Γν. αύξουσα. 4.0.4.
(βρείτε σύντ.) παρ.)

Εφόσον από τον συνεχτικό ορισμό της στρ. ακολουθίας έχουμε ότι $X = \mathbb{N}$ διατεταγμένο:

απουσιάζει από τον παραπάνω ορισμό
(για $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ αντί των x_1, x_2)

Ορισμός. [Μονοτονία]

Έστω η $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ (ισοδύναμα $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

πρ. ακολουθία. Αυτή θα ονομάζεται:

i. Αύξουσα αν η f είναι αύξουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 \Rightarrow \underset{=x_{n_1}}{f(n_1)} \leq \underset{=x_{n_2}}{f(n_2)}$ $\Leftrightarrow$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leq x_{n_2}$

ii. Γνησίως αύξουσα αν η f είναι γν. αύξουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) < f(n_2)$ $(x_{n_1} < x_{n_2})$

iii. Φθίνουσα αν η f είναι φθίνουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) \geq f(n_2)$ $(x_{n_1} \geq x_{n_2})$

iv. Γνησίως φθίνουσα αν η f είναι γν. φθίνουσα $\Leftrightarrow$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) > f(n_2)$ $(x_{n_1} > x_{n_2})$

Αν η (x_n) ικανοποιεί κάποιο από τα παραπάνω θα ονομάζεται μονότονη. $\blacksquare$

Χρήσιμη Ισοδυναμία:

Η (x_n) αύξουσα ανν $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$ (1)

Η (x_n) γνησίως αύξουσα ανν $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$ (2)

Η (x_n) φθίνουσα ανν $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq x_{n+1}$ (3)

Η (x_n) γνησίως φθίνουσα ανν $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > x_{n+1}$ (4)

* Το παραπάνω εξετάζει την συμπεριφορά κάθε ζεύγους διαδοχικών όρων. ΙΙΙ

Απόδειξη. (1) Έστω ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$. Έστω

$$n_1 < n_2 \Rightarrow n_2 - n_1 = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n_2 = n_1 + k.$$

Για $n = n_1$ $\overset{=}{} n_1+1$ $=$ n_1+2 $\vdots$ έχουμε $x_{n_1} \leq x_{n_1+1} \leq x_{n_1+2} \leq \dots x_{n_1+k} = x_{n_2}$

Επομένως αν $n_1 < n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leq x_{n_2}$ που επιβεβαιώνει τον ορισμό.

Αντίστροφα αν ισχύει ο ορισμός τότε για $n_1 = n$, $n_2 = n+1$ $\Rightarrow n < n+1 \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$

Άσκηση. Δείξτε αναλόγως τα (2)-(4). ΙΙΙ

Επομένως η (x_n) αύξουσα ανν

$$(x_0, \; x_1, \; x_2, \dots, \; x_n, \; \dots)$$

$\leq \quad \leq \quad \leq \dots \leq \quad \leq \dots$

γν. αύξουσα ανν

$< \quad < \quad < \dots < \quad < \dots$

φθίνουσα ανν

$\geq \quad \geq \quad \geq \dots \geq \quad \geq \dots$

γν. φθίνουσα ανν

$> \quad > \quad > \dots > \quad > \dots$

* Η μονοτονία αποτυγχάνει ανν έστω κ' μία από τις παραπάνω ανισότητες ισχύει με την λάθος φορά.

Παραδείγματα:

* Οι σταθερές ακολουθίες είναι ταυτόχρονα αύξουσες κ' φθίνουσες (γιατί;)

* Οι εναλλάσσουσες δεν είναι μονότονες αφού

(αν $c>d$) $\quad > \quad < \quad > \quad \quad < \quad > \quad <$

$$(c, d, c, d, \dots, c, d, \dots)$$

(αν $c<d$) $\quad < \quad > \quad < \quad \quad > \quad < \quad >$

* Η $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ γν. αύξουσα

$> \quad > \quad \quad > \quad >$

* η $\left(1 \overset{>}{,} \tfrac{1}{2} \overset{>}{,} \tfrac{1}{3} \overset{>}{,} \ldots \overset{>}{,} \tfrac{1}{n+1} \overset{>}{,} \ldots\right)$ γν. φθίνουσα.

Άσκηση. Εξετάστε όλα τα παραδείγματα ακολουθιών που έχουμε δει μέχρι τώρα ως προς την μονοτονία

Άσκηση. Τι συμβαίνει με τις αλγεβρικές πράξεις ακολουθιών της ίδιας μονοτονίας, ως προς την μονοτονία;

Γ. Μονοτονία κ Φράξη.

Έστω ότι η

(α) (γν.) αυξ.

$$\left(x_0 \underset{\leq}{\geq} x_1 \underset{\leq}{>} x_2 \underset{\leq}{>} \ldots \underset{\leq}{>} x_n \underset{\leq}{>} \ldots\right)$$

(β) (γν.) φθίν.

(α) Τότε $x_0 \leq x_n \;\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$

$\Rightarrow x_0 = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \Rightarrow$ η ακολουθία φραγμένη από κάτω β) Τότε $x_0 \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} x_n$

$\Rightarrow x_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \Rightarrow$ η ακολουθία

είναι φραγμένη από πάνω.

Επομένως οι μονότονες ακολουθίες έχουν αναγκαστικά κάποιου είδους φραγή

(αύξουσες από κάτω - φθίνουσες από πάνω)

Παράδειγμα η $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ δεν είναι φραγμένη επειδή αποτυγχάνει να είναι φραγμένη από πάνω.

Ερώτημα. Τι συμβαίνει όταν μια ακολουθία είναι ταυτόχρονα μονότονη κι' (πλήρως) φραγμένη;

— κάτι ενδιαφέρον που θα μας οδηγήσει στην έννοια του ορίου!