Διαλέξεις 27-28

Παραγωγισιμότητα:

— Παραδείγματα

— Εύρεση λύσεων σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Διάλεξη 27

Παραδείγματα:

1. $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$, ΔΣ $=(-1,1)$ μη εκφυλισμένο,

Άρα παραγωγίσιμη $\forall x\in(-1,1)$ με παράγωγο:

$$\frac{d\sum_{i=0}^{\infty} x^i}{dx} \overset{(\gamma)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{dx^i}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1}$$

$$\underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x^j \quad (**)$$

Η (**) θα έχει επίσης εσωτερικό του ΔΣ της $=(-1,1)$ (γιατί; επίσης τι συμβαίνει στην (**) για $x=1,-1$; μπορεί να διαπιστωθεί μέσω του ΚΤ;)

Ταυτόχρονα γνωρίζουμε ότι

$$\forall x\in(-1,1),\quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad K'$$

$$\frac{d\, 1/1-x}{dx} = \frac{d\,(1-x)^{-1}}{dx} = -\frac{1}{(1-x)^2}\frac{d\,1-x}{dx}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Άρα $\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\, x^i = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1,1)$

Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο στην εύρεση σειρών:

Πχ $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\left(\frac{1}{2}\right)^i =$

$= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\, x^i \Big|_{x=\frac{1}{2}} \underset{1/2 \in (-1,1)}{=} \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4.$

2. $\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}_{\text{παραγωγίσιμη}}$, $ΔΣ = \mathbb{R}$ επομένως είναι

παραγωγίσιμη $\forall x \in ΔΣ$ (γιατί;)

κ' $\frac{d\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!}{dx} \underset{(\gamma)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d\, x^i/i!}{dx}$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\frac{dx^i}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} i\, x^{i-1} = \longrightarrow \frac{i}{i!} \overset{i>0}{=} \frac{i}{1\cdot 2\cdots(i-1)\cdot i} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots(i-1)} = \frac{1}{(i-1)!}$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} \underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} x^j/j!$ ✓

Άρα $\forall x\in\mathbb{R}$ $\frac{d\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$, δηλ.

η συνάρτηση είναι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ΔΕ $f'=f$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Επίσης

$f(0) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i! \Big|_{x=0} = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \dots + \frac{0^n}{n!} + \dots$

$= \frac{0^0}{0!} = 1$

Επομένως η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ αποτελεί λύση του

Προβλήματος Αρχικών Τιμών [ΠΑΤ]

$$\left.\begin{aligned} f' &= f \\ f(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Ας βρούμε όλες τις λύσεις του ΠΑΤ:

* Για την ΔΕ έχουμε: $f' = f$ [*]

(I) Προφανώς η $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ την ικανοποιεί.

(II) Έστω $f \neq 0$. Τότε

$$[*] \Leftrightarrow f'/f = 1 \Leftrightarrow \frac{df}{f} = dx \Leftrightarrow$$

$f' = \frac{df}{dx}$

$$\int \frac{df}{f} = \int dx \Leftrightarrow \ln|f| = c + x, \ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |f| = e^c e^x, \ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |f| = ce^x, \ c > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ce^x, \ c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0.$$

Από (I),(II) έχουμε ότι το σύνολο των λύσεων της $f'=f$ είναι το $\Sigma\Lambda = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ce^x,\ c\in\mathbb{R}\}$ ✓

* Για την συνθήκη $f(0)=1$ με $f\in\Sigma\Lambda$ έχουμε ότι

$$f(0)=1 \iff ce^0=1 \iff c=1.$$

↳ εξίσωση ως προς c

Άρα το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση: $f(x)=e^x$.

Βρήκαμε όμως ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$ ικανοποιεί το ΠΑΤ.

Επομένως $\boxed{e^x=\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ∎ (*)

Εφαρμογή: Εύρεση λύσεων σε ΣΔΕ με την μέθοδο των δυναμοσειρών

* Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις:

Σχέσεις της μορφής

(*) $G\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x\right) = 0$

Όπου $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ή κατάλληλο υποσύνολο του, $y^{(n)}$ η nιοστής τάξης

π.χ. $y'' - y' + y = x^2$

$\Leftrightarrow y'' - y' + y - x^2 = 0$

Τάξη $= 2$

παράγωγος της y, $x \in \mathbb{R}$ κ' G κατάλληλη συνάρτηση.

* Τάξη της (*) ονομάζεται η μέγιστης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στην σχέση.

* Η (*) ονομάζεται γραμμική, αν η G είναι γραμμική συνάρτηση των $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y$ (όχι αναγκαστικά του x), οπότε έχει την μορφή

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

συντελεστές

όρος

- Όταν οι $a_i(x)$ σταθερές ως προς x $\forall i=0,\dots,n-1$ η (*) σταθερών συντελεστών

- Όταν η $b(x)$ σταθερή ως προς x η (*) σταθερού όρου

Οπότε η $1^{ης}$ τάξης γραμμική, σταθερών συντελεστών με σταθερό όρο έχει την γενική μορφή

Διάλεξη 28 $$y' - \alpha y = b \quad (**)$$ $\alpha = -\alpha_0$ Τέλος Διάλεξης 27

* Σύνολο λύσεων της (*) ονομάζεται το

$$\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ ικανοποιεί την εξίσωση} \}$$

- Επίλυση της (*) ονομάζεται η εύρεση του συνόλου λύσεων
- Είναι δυνατόν να είναι επαρκές για τις ανάγκες μας το να βρούμε κάποιες λύσεις
- Οι λύσεις είναι δυνατόν να ταξινομούνται με διάφορα κριτήρια [δεν προχωρούμε σε ταξινόμηση]
- Οι λύσεις γενικά προκύπτουν από περίπλοκες διαδικασίες ολοκλήρωσης

[Επομένως κάποιες λύσεις θα εξαρτώνται από σταθερές ολοκλήρωσης· πλήθος αυτών = τάξη της εξίσωσης]

Μέθοδος δυναμοσειρών:

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν να αποφεύγουμε την ολοκλήρωση κ' να βρίσκουμε λύσεις που έχουν μορφή δυναμοσειράς· ανάγονται στον εντοπισμό των συντελεστών της δυναμοσειράς μέσω της επίλυσης αναδρομικών σχέσεων.

Ας το δούμε στο παράδειγμα (★):

$$y' - \alpha y = b$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $\alpha \neq 0$ [Χρησιμοποιώντας την έννοια του πολλαπλασιαστή Euler κ' της ακριβούς εξίσωσης θα μπορούσαμε να βρούμε τις λύσεις μέσω

Ολοκληρώσεις - δεν θα το κάνουμε]

— Υποθέτουμε ότι υπάρχουν λύσεις της μορφής

$$(\Delta) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

κέντρο το 0

για να τις εντοπίσουμε αρκεί να βρούμε την ακολουθία των συντελεστών

Κάθε λύση (Δ) θα πρέπει να έχει μη εκφυλισμένο ΔΣ (γιατί;) - Θα πρέπει να το ελέγχουμε όποτε βρίσκουμε μια τέτοια υποψήφια λύση

— Αν η (Δ) έχει μη εκφυλισμένο ΔΣ είναι παραγωγίσιμη και

$$(\Delta^*) \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' \underset{(\text{γιατί;})}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i$$

- Αντικαθιστώντας τις (Δ) κ' (Δ*) στην (**)

έχουμε $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\alpha_{i+1}x^i - \alpha\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i = b$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\alpha_{i+1}x^i = b + \sum_{i=0}^{\infty}\alpha\alpha_i x^i$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\delta_i x^i \quad (***)$

με $\gamma_i = (i+1)\alpha_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$\delta_i = \begin{cases} b+\alpha\alpha_0, & i=0 \\ \alpha\alpha_i, & i>0 \end{cases}$$

ισότητα $\gamma_i = \delta_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$

- $(***) \Longleftrightarrow$

δυναμοσειρών με το ίδιο κέντρο $=0$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha\alpha_0 + b \\ 2\alpha_2 = \alpha\alpha_1 \\ 3\alpha_3 = \alpha\alpha_2 \\ \vdots \\ n\alpha_n = \alpha\alpha_{n-1}, \ n\geq 1 \\ \vdots \end{cases} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha}{1}\left(\alpha_0 + \frac{b}{\alpha}\right) \\ \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}\alpha_1 \\ \alpha_3 = \frac{\alpha\alpha_2}{3} \\ \vdots \\ \alpha_n = \frac{\alpha\alpha_{n-1}}{n}, \ n\geq 1 \\ \vdots \end{cases}$$

σύστημα από αναδρομικές σχέσεις ως προς την άγνωστη ακολουθία (α_i) ...

Διάλεξη 27

Συνέχεια (*)

Έστω, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!}(x-\alpha)^i$ $\qquad a_i = \frac{e^{\alpha}}{i!}$

κέντρο $= \alpha$

Να δείξετε ότι $\Delta\Sigma = \mathbb{R}$

* όταν $\alpha = 0$ αναλυτούμε την $\sum_{i=0} x^i / i!$

* Η δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη, και η παράγωγος έχει $\Delta\Sigma = \mathbb{R}$ κ' δίνεται

$$\frac{d \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!}(x-\alpha)^i}{dx} \underset{(\gamma)}{=} \sum_{i=0} \frac{d \frac{e^{\alpha}}{i!}(x-\alpha)^i}{dx} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!} \frac{d(x-\alpha)^i}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!} i (x-\alpha)^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{(i-1)!}(x-\alpha)^{i-1} \underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{j!}(x-\alpha)^j$$

κ' εδώ έχουμε $f' = f$

Υπολογίζουμε την $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!}(x-\alpha)^i$ στο $x=0$,

οπότε $f(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!}(0-\alpha)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!}(-\alpha)^i$

διάλεξη 24

$$= e^{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^i}{i!} = e^{\alpha} e^{-\alpha} = 1$$

↳ Θυμόμαστε ότι

$$e^{x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i! \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

κι επομένως για $x = -\alpha$

$$e^{-\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^i}{i!}$$

δείτε το: θα αντί του $f(0)$ υπολογίζαμε το $f(\alpha)$ θα έπαιρνα ένα καινούριο ΠΑΤ:

$f' = f$

$f(\alpha) = e^{\alpha}$

που λύνεται μοναδικά από την $f(x) = e^{x}$

Οπότε $f(0) = 1$

Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!} (x-\alpha)^i$

ικανοποιεί το $\left.\begin{array}{l} f' = f \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$ οπότε κ

του ΠΑΤ που είχαμε προηγουμένως: αλλά η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι η e^{x} οπότε

$$e^{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}}{i!} (x-\alpha)^i \quad \forall x, \alpha \in \mathbb{R}$$

[γιατί ισχύει ότι η εκθετική συνάρτηση αναπαρίσταται με τόσους τρόπους ως δυναμοσειρά → Θεωρία Αναλυτικών Συναρτήσεων]