Διαλέξεις 16-17

- Περισσότερα Παραδείγματα
- Απόδειξη Σύγκλισης
- Αλλαγή Μεταβλητής
- Κριτήριο του πηλίκου

Διάλεξη 16

Συνεχίζουμε με ένα ακόμη παράδειγμα η προσέγγιση της επίλυσης του οποίου θα μας οδηγήσει στο κριτήριο του πηλίκου.

Άσκηση. Να δειχθεί ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ υπάρχει.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\dots$

Λύση. Έχουμε ότι $\frac{1}{i!} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η ακολ. $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)$ είναι φραγμένη (γιατί;). Αρκεί να βρούμε (a_n) φραγμένη για την οποία $0 \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \le a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. (γιατί;)

Παρατηρούμε ότι (*) $\boxed{\frac{1}{i!} \le \frac{1}{2^{i-1}} \ \forall i \in \mathbb{N}}$: Επαγωγική απόδειξη του ισχυρισμού

για $i=0$: $\frac{1}{i!} = \frac{1}{0!} = 1 \le \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{0-1}} = 2$.

που είναι αληθές.

Έστω ότι το (*) ισχύει για $i=k$, $k \ge 1$, δηλ.

$$\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}. \quad (**)$$

Για $i=k+1$ έχουμε

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}\frac{1}{(k+1)}$$

σύγκριση

$$\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{1}{2}$$

από το προηγούμενο γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$

$$\frac{1}{k!}\frac{1}{k+1} \;?\; \frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2}$$

Ισχύει ότι $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{2}$ $\forall k \ge 1$. Προφανώς ισχύει

Επομένως $\frac{1}{k!}\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2}$ $\forall k \ge 1$.

Επομένως $\forall i \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{i!} \le \frac{1}{2^{i-1}} \Rightarrow$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \le \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{2^{i}}$

$$= 2\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}$$

$$2\cdot 2 = 4$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

γενικός όρος της γεωμετρικής με $a=\frac{1}{2}$

Επιλέγουμε $a_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Γνωρίζουμε $a_n \to 4$. Επομένως αφού η (a_n) αυξάνουσα είναι φραγμένη.

* Και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε παρόμοια μεθοδολογία με αυτά των αρμονικών-μεταρμονικών σειρών. Η φράση (ή η μη φράση) της ΑΜΑ διαπιστώνεται μέσω της σύγκρισης με βοηθητική ακολουθία. Στην περίπτωση αυτή γίνεται μέσω σύγκρισης με κατάλληλη γεωμετρική ΑΜΑ

Θα μπορούσε αυτό να γενικευτεί κ' να αλγοριθμηθεί; (:= εύρεση υπολογιστικά ευχερούς τρόπου που συγκρίνει την δεδομένη ΑΜΑ με κατάλληλη γεωμετρική κ' αποφαίνεται για την σύγκλιση)

Κριτήριο του πηλίκου

(για να μπορούμε να το διατυπώσουμε μας χρειάζεται εκλέπτυνση της έννοιας της σύγκλισης επίσης για σειρές)

Απόλυτη σύγκλιση

Κατάχρηση Ορολογίας: Στο εξής και προκειμένου να συνάδουμε με την αντίστοιχη βιβλιογραφία στην συνέχεια της ορολογίας θα χρησιμοποιούμε τους όρους η σειρά συγκλίνει/αποκλίνει (αντί των όρων η ΑΜΑ συγκλίνει (=) η σειρά υπάρχει / η ΑΜΑ αποκλίνει (=) η σειρά δεν υπάρχει.

Απόλυτη σύγκλιση:

Προκειμένου για την διατύπωση του κριτηρίου του πηλίκου θα μας χρειαστεί η παρακάτω επέκταση της έννοιας της σύγκλισης:

Ορισμός [Απόλυτη Σύγκλιση - Absolute Convergence]

Θα λέμε ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως αν η $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ συγκλίνει. ⊠

✓

* Αν $x_i \geq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ η απόλυτη σύγκλιση ταυτίζεται με την κλασσική σύγκλιση. (Ισχύει το ίδιο αν $x_i \leq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$;)

* Παρ. 1. Έστω $|\alpha| < 1$ κ' η γεωμετρική σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \left(= \frac{1}{1-\alpha}\right)$. Έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha^i| = \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha|^i$ ✓ που είναι επίσης γεωμετρική σειρά (γιατί;) κ' $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha|^i = \frac{1}{1-|\alpha|}$ οπότε η $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ συγκλίνει απολύτως. Άρα οι συγκλίνουσες γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν απολύτως. ⊠

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots =$

* Π.χ. 2. Έστω η εναλλάσσουσα αρμονική $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$ για την οποία μας έχει δοθεί ότι συγκλίνει στο ln2.

Συγκλίνει όμως απολύτως; Έχουμε ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^i}{i+1}\right| = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|(-1)^i|}{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ που είναι η αρμονική σειρά, που γνωρίζουμε ότι αποκλίνει. Άρα η εναλλάσσουσα αρμονική δεν συγκλίνει απολύτως.

— Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως τότε λέμε ότι συγκλίνει κατά συνθήκη (conditionally convergent).

* Η εναλλάσσουσα αρμονική είναι πρωτότυπο παράδειγμα κατά συνθήκη σύγκλισης.

* Τα παραπάνω μάλλον μας υποδεικνύουν ότι η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη της συνήθους σύγκλισης:

Λήμμα [Απόλυτη σύγκλιση] Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$ υπάρχει. Επίσης έχουμε ότι $\overset{(\alpha)}{0 \le x_i + |x_i|} \overset{(\beta)}{\le 2|x_i|}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Εξαιτίας της (α) η $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i + |x_i|)$ έχει ομόσημους όρους. Άρα προσπαθώντας να διαπιστώσουμε το αν αυτή συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΔΜΑ $\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i + |x_i|)\right)$ είναι φραγμένη (γιατί;). Εξαιτίας της (β) έχουμε ότι $0 \le \sum_{i=0}^{n} (x_i + |x_i|) \le \sum_{i=0}^{n} 2|x_i|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η $\left(\sum_{i=0}^{n} 2|x_i|\right)$ είναι φραγμένη (γιατί;). Για το τελευταίο αρκεί το να υπάρχει η $\sum_{i=0}^{\infty} 2|x_i|$ (γιατί;). Αλλά έχουμε (γιατί;) ότι

υπάρχει εξαιτίας της απόλυτης σύγκλισης

$\sum_{i=0}^{\infty} 2|x_i| = 2\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \in \mathbb{R}$. Άρα η $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i + |x_i|)$ υπάρχει οπότε $\sum_{i=0}^{\infty} (x_i + |x_i|) - \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| =$ γιατί;

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(x_i + |x_i| - |x_i|\right) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \in \mathbb{R}. \quad \square$$

* Επομένως Απόλυτη Σύγκλιση $\Longrightarrow$ Σύγκλιση

αλλά Σύγκλιση $\not\Longrightarrow$ Απόλυτη Σύγκλιση

π.χ. Εναλλάσσουσα Αρμονική Σειρά

Συνεπώς η απόλυτη σύγκλιση είναι εκλέπτυνση της συνήθους σύγκλισης

* $\Rightarrow$ Στην σύγκλιση για απολύτως συγκλίνουσες σειρές δεν έχει σημασία η διάταξη των $x_0, x_1, \dots, x_n$ και τα αθροίσματα αυτών μέσα στην σειρά.

$\Rightarrow$ Στην σύγκλιση για κατά συνθήκη συγκλίνουσες σειρές έχει σημασία η διάταξη κ' τα αθροίσματα.

Τέλος Διάλεξης 16 $\square$

Διάλεξη 17

Θεώρημα Riemann: Αν η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ κατά συνθήκη συγκλίνουσα τότε $\forall c \in \mathbb{R}$ υπάρχει διάταξη των $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ τέτοια ώστε αν αυτοί αθροιστούν με αυτή την σειρά, η προκύπτουσα σειρά να συγκλίνει στο c (κ' αντίστοιχα για την απόκλιση)

!!!

* Δηλ. η αριθμητική των όρων κάθε απολύτως συγκλίνουσας σειράς είναι ίδια με την συνήθη αριθμητική για πεπερασμένου πλήθους αθροίσματα. Η αριθμ. των όρων στις κατά συνθήκη συγκλίνουσες σειρές είναι πιο "περίεργη".

$\Downarrow$ μετασχηματισμοί σε απολύτως συγκλίνουσες σειρές.

Αλλαγή Μεταβλητής

— Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ απολύτως συγκλίνουσα, $G:\{k,k+1,\dots\}\to\mathbb{N}$ 1-1. (αναστρέψιμη)

Τότε
$$\sum_{i=k}^{\infty} x_i = \sum_{j\in G(\{k,k+1,\dots\})} x_{G^{-1}(j)}$$

↳ σύνολο τιμών της G

$j=G(i)$

$i=G^{-1}(j)$

κ' $i=0,1,2,\dots$

$j=0,1,2,\dots$

$G(i)=G(i^*) \Rightarrow i=i^*$

είναι εφικτό να αναπαραστήσουμε κ' αυτό στη μορφή $\sum_{j=0}^{\infty}$

Αλλαγή Μεταβλητής όπως στα ολοκληρώματα

(Χρήσιμη π.χ. σε υπολογισμούς)

Π.χ. Έστω $|\alpha|<1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$ κ' θεωρούμε το $\sum_{i=k}^{\infty} \alpha^i = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$, για $k\geq 0$. Θεωρούμε επίσης την

αν για i,i^* $G(i)=G(i^*) \Leftrightarrow i-k=i^*-k \Leftrightarrow i=i^*$

$j=G(i):=i-k$ οπότε η $G:\{k,k+1,\dots\}\to\mathbb{N}$ 1-1.

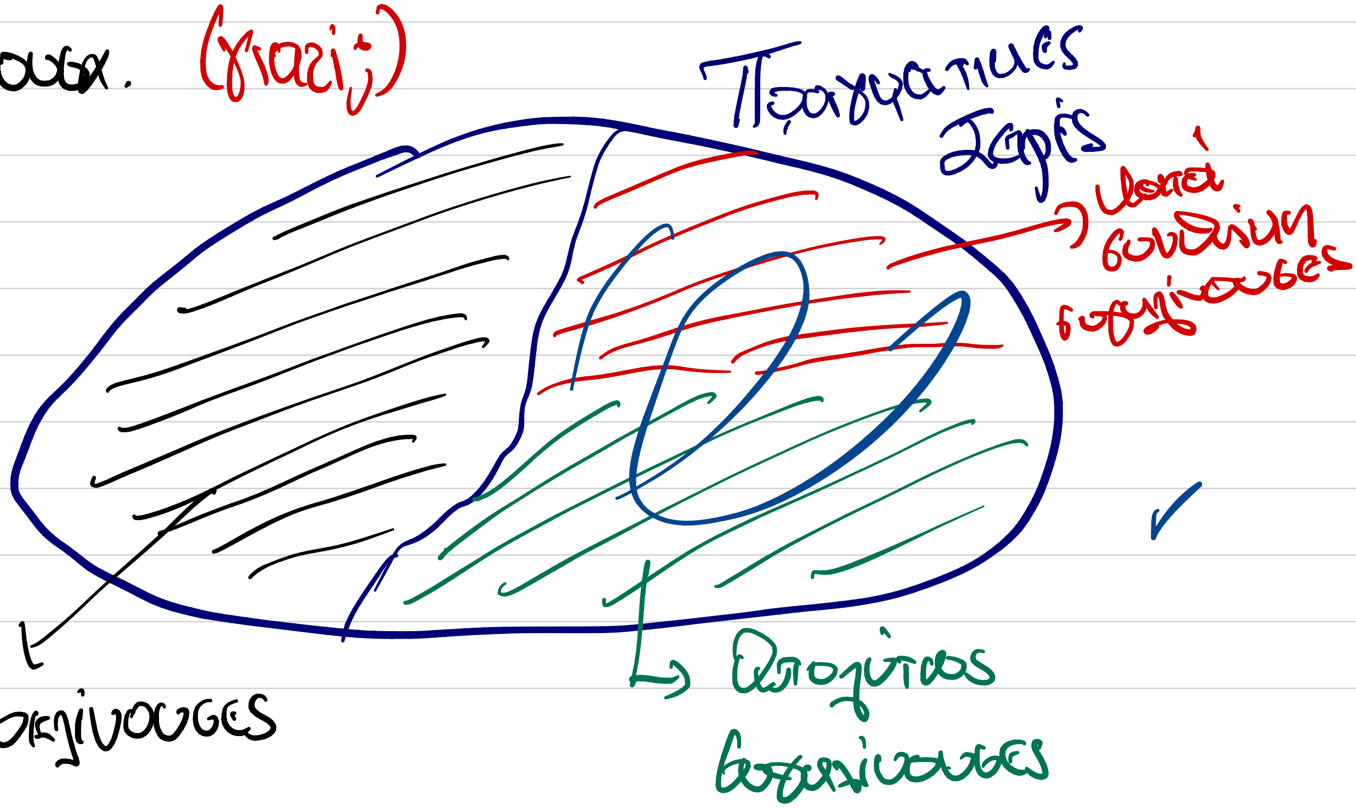
$G(\{k,k+1,\dots\})=\mathbb{N}$ και $G^{-1}(j)=j+k$. Οπότε

$$\sum_{i=k}^{\infty} a^i = \sum_{j\in\mathbb{N}} a^{\sigma^{-1}(j)} = \sum_{j=0}^{\infty} a^{j+k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a^k a^j \overset{(\text{γιατί;})}{=} a^k \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a^j}_{\frac{1}{1-a}} \overset{|a|<1}{=} \frac{a^k}{1-a} \quad \text{Οπότε}$$

κ' καταλήγουμε στον τύπο της περικομμένης γεωμετρικής σειράς μέσω της αλλαγής μεταβλητής από i σε j.

* Εξαιτίας του Θεωρ. του Riemann αν θα θέλαμε να επεκτείνουμε την αλλαγή μεταβλητής κ' σε απολύτως συγκλίνουσες σειρές θα έπρεπε η σ να είναι κ' αύξουσα. (γιατί;)



Κριτήριο του Πηλίκου – Ratio Test

- Αλγόριθμος που συνεισφέρει στην διακρίβωση του ζητήματος της σύγκλισης για δεδομένη σειρά:

Έστω η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ (*)

i. Υποθέτοντας ότι $x_i \neq 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (αν $x_i \neq 0$ για άπειρο πλήθος από i είναι δυνατόν να διασφαλίσουμε το παρακάτω μέσω αλλαγής μεταβλητής)

Κατασκευάζουμε την βοηθητική ακολουθία από τις απόλυτες τιμές των πηλίκων διαδοχικών όρων

$$\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right),$$

ii. Βρίσκουμε (αν υπάρχει) το $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| := L$ (προφανώς $L \geq 0$ – γιατί;)

iii. Αν

α. $L<1$ η (*) συγκλίνει απολύτως

β. $L>1$ η (*) αποκλίνει

γ. $L=1$ το κριτήριο είναι μη πληροφοριακό.

Σχόλια:

* Το κριτήριο αποφαίνεται για την σύγκλιση - δεν βρίσκει την σειρά! (μην μπερδέψουμε το L με την $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$)

* Η διατύπωση του αλγορίθμου δεν είναι πλήρης. Π.χ. είναι δυνατόν να συμπληρωθεί σε κάποιες περιπτώσεις που το L δεν υπάρχει.

* Το κριτήριο δεν αφορά! Αποφαίνεται μεταξύ απόλυτης σύγκλισης κ' απόκλισης. Επομένως στην περίπτωση που η $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ είναι κατά συνθήκη συγκλίνουσα θα αναμένουμε ότι το κριτήριο θα είναι μη πληροφοριακό (αλλά θα πρέπει να είναι πληροφοριακό κ' σε άλλες περιπτώσεις - γιατί;)

* Υπάρχει μια ιεραρχία εκλεπτύνσεων του κριτηρίου όταν L=1 (επεκτείνει το εύρος ισχύος του κριτηρίου)

* Χρησιμοποιεί το L προκειμένου να συγκρίνει την $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i\right)$ με κατάλληλη γεωμετρική σειρά.

Παραδείγματα — Υπολογισμοί

Για τις παρακάτω σειρές να γίνει χρήση του ΚΠ (κριτηρίου) λόγου και να ελεγχθεί το κριτήριο της απόλυτης σύγκλισης/απόκλισης:

1. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$, $x_i = \frac{1}{i!} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 = L.$$

$L = 0 < 1$ άρα έχουμε απόλυτη σύγκλιση

(το γνωρίζαμε - γιατί;)

☑

2. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^i}{(i+1)^2}$, $x_i = \frac{e^i}{(i+1)^2} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left| \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{e^n}{(n+1)^2}} \right| \checkmark$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \frac{e^{n+1}}{e^n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 e^{n+1-n} =$$

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 e \longrightarrow e := L$$

Στο 4 θα έχουμε $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \frac{1}{e} \to \frac{1}{e}$

$L > 1$ οπότε η σειρά αποκλίνει. ☒

3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (i+1)^k}{i!}$, $k>0$, $x_i = \frac{(-1)^i (i+1)^k}{i!} \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$.

→ εξουδετ. από την απολ. τιμή.

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+2)^k / (n+1)!}{(-1)^n (n+1)^k / n!} \right| =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^k \frac{n!}{(n+1)!} = \underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^k}_{\to 1^k} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow 0 := L$$

$L < 1$ οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως. ☒

4. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)^2}{e^i}$, $x_i = \frac{(i+1)^2}{e^i} > 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Εξετάζοντας το παράδειγμα 2 αποφαινόμαστε άμεσα ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως — γιατί;

Τέλος Διάλεξης 17 ☒