Διάλεξη 3

Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙΙ

Περαιτέρω Παραδείγματα

Συμβολισμοί

Ισότητα – Σχεδόν παντού ισότητα

Στοιχεία άλγεβρας

Διάλεξη 3

*για παρακάτω κ' μέχρι να το αναιρέσουμε όπου αναφερόμαστε σε "ακολουθία" θα εννοούμε "πραγματική ακολουθία".

Περαιτέρω παραδείγματα πραγματικών ακολουθιών:

8. Έστω οικονομία που λειτουργεί σε διακριτό χρόνο κ' άπειρο πλήθος χρονικών στιγμών. Επομένως ο χρόνος λειτουργίας επισημαίνεται από το $\mathbb{N}$. (το 0 θεωρείται η παρούσα χρονική στιγμή κ' οποιοδήποτε $\mathbb{N} \ni t > 0$ μελλοντική).

Έστω ποσό $X \geq 0$ κ' καθαρό επιτόκιο μεταξύ διαδοχικών χρονικών στιγμών $R > 0$. Η χρηματοροή

$$\Big(\underbrace{X(1+R)^0}_{=X},\ X(1+R)^1, \ldots, X(1+R)^t, \ldots\Big)$$

συναθροίζει την μελλοντική αξία του X στην χρονική στιγμή t, $\forall t \in \mathbb{N}$.
Προφανώς είναι πραγματική ακολουθία (γιατί; $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(t) = X(1+R)^t$, $t \in \mathbb{N}$)

9. Έστω η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί (δείτε Στατ. ΙΙ) ότι για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, η ροπή n-οστής τάξης της κατανομής είναι η $\frac{n!}{\lambda^n} \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Επομένως πρόκειται για πραγματική ακολουθία η διανυσματική μορφή της οποίας είναι η

$$\left(\underbrace{\frac{0!}{\lambda^0}}_{=1}, \frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda^2}, \frac{6}{\lambda^3}, \ldots, \frac{n!}{\lambda^n}, \ldots\right).$$

Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η ακολουθία αναπαριστά την κατανομή.

* Το 8 μας λέει ότι η έννοια της πραγματικής ακολουθίας είναι δυνατόν να εμφανίζεται στην οικονομική θεωρία σε υπόβαθρο οικονομιών που λειτουργούν σε διακριτό κ' άπειρο χρόνο. Το 9 ότι μάλλον η έννοια εμφανίζεται συχνά στην θεωρία πιθανοτήτων.

* Ταυτοποίηση ακολουθίας από πεπερασμένο πλήθος όρων:

– Στα προηγούμενα παραδείγματα ήταν δυνατόν να καθορίσουμε την ακολουθία από πεπερασμένο πλήθος όρων αυτής. Αυτό ήταν δυνατόν επειδή η f είχε συγκεκριμένο τύπο. Αυτό είναι δυνατόν να μην ισχύει:

Π.χ. σκεφτείτε την δυνατότητα οι όροι της ακολουθίας να είναι απολύτως αυθαίρετοι – για να την περιγράψουμε θα έπρεπε να δώσουμε 1-1 όλους τους όρους. Αδύνατο!

* Ακολουθίες ως λύσεις αναδρομικών συστημάτων:

– Π.χ. έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = x_{n-1} + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$\mathbb{N} - \{0\}$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = x_0 + 1 \\ x_2 = x_1 + 1 \\ \vdots \end{cases}$$

άπειρες εξισώσεις + άπειροι άγνωστοι $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$

Αναδρομικό σύστημα εξισώσεων

Για το συγκεκριμένο: μοναδική λύση η $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$

σχετικό κ' με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέσω της χρήσης δυναμοσειρών

– Γενικά: κάποιες ακολουθίες είναι δυνατόν να περιγράφονται ως λύσεις αναδρομικών συστημάτων – κ' αυτές "εύκολα περιγράψιμες"!

Ζητήματα Συμβολισμού:

Βάσει των ορισμών θα συμβολίζουμε για πραγμ. ακολ.:

είτε α. ως διάνυσμα $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$
είτε β. ως συνάρτηση $f(n) = x_n$
είτε γ. αναμειγνύοντας τα α, β ως (x_n)

Αρχικά θα χρησιμοποιούμε – αναλόγως της περίστασης κ' τους τρεις. Αργότερα θα σταθεροποιηθούμε κυρίως στο γ.

Σχέσεις μεταξύ ακολουθιών

Ισότητα Ακολουθιών.

Ο διανυσματικός ορισμός μας επιτρέπει να εννοήσουμε εύκολα την έννοια της ισότητας μεταξύ πραγματικών ακολουθιών:

* Υπενθύμιση $x, y \in \mathbb{R}^n$ κ' $x = y \iff x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ (κατά σημείο – pointwise – ορισμός)

Ορισμός. Οι ακολουθίες $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ κ' $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ θα είναι ίσες ανν $x_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλ.

αν κ' μόνο αν

$$\begin{cases} x_0=y_0\\ x_1=y_1\\ x_2=y_2\\ \vdots \\ x_n=y_n\\ \vdots \end{cases} \to \text{άπειρο πλήθος από ισότητες μεταξύ ακολουθιών.}$$

Παράδειγμα. Έστω η $(0,0,\dots,0,\dots) \to A$ και η $(1,1,0,0,\dots,0,\dots) \to B$

σταθερή στο 0

$$f(n)=\begin{cases}1, & n=0,1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

Προφανώς είναι άνισες αφού $\underset{=0}{x_0} \neq \underset{=1}{y_0}$, $\underset{=0}{x_1} \neq \underset{=1}{y_1}$.

* Παρατηρούμε η ισότητα αποτυγχάνει εξαιτίας πεπερασμένου πλήθους από ισοτικές σχέσεις.

Έστω η $(0,1,0,1,\dots) \to \Gamma$

εναλλάσσουσα

Εδώ έχουμε $A \neq \Gamma$ επειδή $\underset{=0}{x_n} \neq \underset{=1}{y_n}$ $\forall n$ περιττό

Η ισότητα αποτυγχάνει εξαιτίας άπειρου πλήθους από ισοτικές σχέσεις.

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε μεταξύ των δύο φαινομένων ;

σ. συμβολισμός

"Θα λέμε ότι η (x_n) έχει την ιδιότητα P σχεδόν παντού αν το x_n έχει την P $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός πεπερασμένου πλήθους από n"

θεωρείται αμελητέο

π.χ. Τόσο η A όσο και η B είναι σχεδόν παντού μηδενικές.
Η Γ δεν είναι αφού $x_n \neq 0$ $\forall n$ περιττό

άπειρο πλήθος όρων που δεν έχουν την P (P = ίσο με μηδέν)

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποκτούμε γενίκευση της έννοιας της ισότητας:

Ορισμός. Οι $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ κ' $(y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ θα είναι σχεδόν παντού ίσες $\left((x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \underset{\sigma.\pi.}{=} (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)\right)$ αν

$x_n = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ εκτός πεπερασμένου πλήθους όρων.

* $= \Rightarrow \underset{\sigma.\pi.}{=}$ (πλήθος όρων $= 0$) ✓
* $\forall (x_n)$, $(x_n) \underset{\sigma.\pi.}{=} (x_n)$ (αναακλαστική ιδ., πλ. όρων $=0$) ✓
* αν $(x_n) \underset{\sigma.\pi.}{=} (y_n) \Rightarrow (y_n) \underset{\sigma.\pi.}{=} (x_n)$ (συμμετρική - επειδή είναι συμμετρική η ισότητα μεταξύ όρων)
* αν $(x_n) \underset{\sigma.\pi.}{=} (y_n)$ κ' $(y_n) \underset{\sigma.\pi.}{=} (z_n) \Rightarrow (x_n) \underset{\sigma.\pi.}{=} (z_n)$

(μεταβατική ιδιότητα - σημεία διαφωνίας μεταξύ $(x_n), (z_n)$
$\leq$ Max(σημ. διαφωνίας μεταξύ $(x_n), (y_n)$,
σημ. διαφωνίας μεταξύ $(y_n), (z_n)$) ✓

άσκηση!

Άσκηση. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια της $=$ χρησιμοποιώντας τον συναρτησιακό ορισμό;

Επομένως η $\underset{σ.π.}{=}$ ικανοποιεί παρόμοιες ιδιότητες με την συνήθη $=$ κ' μπορεί να διακρίνει μεταξύ ακολουθιών που δεν είναι ίσες επειδή αποτυγχάνουν πεπερασμένο (αμελητέο) πλήθος ισοτήτων κ' μη.

π.χ. $A \underset{σ.π.}{=} B$ αλλά $A \underset{σ.π.}{\neq} Γ$.

Άσκηση. Στα n-διάστατα διανύσματα τι νόημα θα είχε η $\underset{σ.π.}{=}$;

* Σημαντικό: θα δούμε ότι η $\underset{σ.π.}{=}$ "διατηρεί τα όρια"

Στοιχεία άλγεβρας πραγματικών ακολουθιών

Σχόλιο: εφόσον αντιλαμβανόμαστε τις πραγματικές ακολουθίες (και) ως διανύσματα, είναι εύλογο να ορίσουμε αλγεβρικές πράξεις μεταξύ τους: όπως στα διανύσματα "κατά σημείο".

1. Πρόσθεση (Pointwise Addition)
(κατά σημείο)

Ορισμός: Το άθροισμα $(x_n)+(y_n)$ είναι πραγματική ακολουθία που ορίζεται ως

$$(x_n)+(y_n) := (x_n+y_n)$$

(δηλ. $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)+(y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) = (x_0+y_0, x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n, \ldots)$) ∎

Σημ. η πράξη της πρόσθεσης ορίζεται όπως αναφέραμε: κατά σημείο. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η πράξη είναι μεταθετική (κατά σημείο πρόσθεση πραγματικών - μεταθετική), γενικεύεται εύκολα σε όποιο πεπερασμένο πλήθος προσθετέων και είναι προσεταιριστική (γιατί;), ενώ το ουδέτερο στοιχείο είναι η σταθερή ακολουθία στο 0.

2. Βαθμωτός πολλαπλασιασμός (Scalar Product)

Ορισμός. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda(x_n)$ (το βαθμωτό γινόμενό τους) είναι πραγματική ακολουθία που ορίζεται ως

$$\lambda(x_n) := (\lambda x_n) \checkmark$$

$$\left(\text{Σημ. } \lambda(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) := (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \ldots)\right)$$

Άσκηση. Δείξτε ότι:

α. αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $[\lambda+\mu](x_n) = \lambda(x_n) + \mu(x_n)$

β. $\lambda[(x_n)+(y_n)] = \lambda(x_n) + \lambda(y_n)$

γ. $[\lambda+\mu][(x_n)+(y_n)] =$

$= \lambda(x_n) + \lambda(y_n) + \mu(x_n) + \mu(y_n)$

δ. $1(x_n) = (x_n)$

* Το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών είναι διανυσματικός χώρος όταν εφοδιασθεί με τις δύο παραπάνω πράξεις.

Άσκηση. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τις πράξεις 1–3 χρησιμοποιώντας τον συναρτησιακό ορισμό;

3. Σημειακό γινόμενο (Pointwise Product)

Ορισμός. Το σημειακό γινόμενο $(x_n) \otimes (y_n)$ είναι πραγματική ακολουθία που ορίζεται ως:

$$(x_n) \otimes (y_n) = (x_n y_n)$$

(δηλ. $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \otimes (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) :=$
$= (x_0 y_0, x_1 y_1, \ldots, x_n y_n, \ldots)$)

Άσκηση. Δείξτε ότι:
α. Το $\otimes$ είναι μεταθετικό
β. $(x_n) \otimes [(y_n) + (z_n)] = (x_n) \otimes (y_n) + (x_n) \otimes (z_n)$
γ. $\lambda (x_n) \otimes (y_n) = (x_n) \otimes \lambda (y_n)$
δ. Ουδ. στοιχείο του $\otimes$: η $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$

* Τα παραπάνω τα βλέπουμε χωρίς να ενεργοποιούμε σε περίπλοκα ζητήματα άλγεβρας. Προσέξτε όμως το εξής το οποίο επί της ουσίας μας λέει ότι η άλγεβρα στις ακολουθίες είναι "πιο περίπλοκη" από ότι στο $\mathbb{R}$:

$$\underset{\neq (0,0,0,\ldots,0,\ldots)}{(1,0,1,0,\ldots)} \otimes \underset{\neq (0,0,\ldots,0,\ldots)}{(0,1,0,1,\ldots)} = (0,0,0,\ldots,0,\ldots)$$

Οπότε είναι δυνατόν πολλαπλασιάζοντας ακολουθίες καμμία εκ των οποίων δεν είναι το ουδ. στοιχείο της + να αποκτούμε το ουδέτερο στοιχείο της +. (αυτό ονομάζεται μηδενοδιαίρεση – division by zero – κ' είναι αδύνατο στο $\mathbb{R}$, γιατί;)