Διάλεξη 2η: Πραγματικές Ακολουθίες

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΙΣΟΤΗΤΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Θα προσπαθήσουμε να καταλάβουμε με ακρίβεια το γνωστό από τον λογισμό μας:

$$\underset{;}{x} \xrightarrow[;]{} y \in \mathbb{R}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της πραγματικής ακολουθίας (real sequence)

Έναυσμα: n-διάστατα πραγματικά διανύσματα:

$\downarrow$

διατεταγμένες n-άδες πραγματικών αριθμών σε γραμμή ή στήλη (δεν θα προχωρήσουμε τόσο στην άλγεβρα ώστε να έχει σημασία αυτό).

$$\begin{array}{ccccc} (x_0, & x_1, & x_2, & \dots, & x_{n-1}) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{array}$$

→ Διάταξη έχει σημασία το σε ποια θέση βρίσκεται κάθε συνιστώσα π.χ. $(0,1) \neq (1,0)$

→ Οι θέσεις επισημαίνονται από το $\{0,1,2,\dots,n-1\} \subseteq \mathbb{N}$ ✓

Τι θα συνέβαινε αν κατασκευάζαμε διάνυσμα του οποίου οι θέσεις επισημαίνονται από όλο το $\mathbb{N}$;

$$\big(\underset{\overset{\uparrow}{0}}{x_0},\ \underset{\overset{\uparrow}{1}}{x_1},\ \underset{\overset{\uparrow}{2}}{x_2},\ \ldots,\ \underset{\overset{\uparrow}{n}}{x_n},\ \ldots\big)$$

Διανυσματικός Ορισμός Πραγματικής ακολουθίας:

Πραγματική ακολουθία ονομάζεται όποιο διάνυσμα πραγματικών αριθμών που έχει πρώτο όρο, δεν έχει τελευταίο όρο, και το πλήθος των όρων του ταυτίζεται με το πλήθος των φυσικών αριθμών, δηλ. για διάταξη της μορφής

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \quad \square$$

Συναρτησιακός Ορισμός Πραγματικής Ακολουθίας:

Πραγματική ακολουθία είναι όποια συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Θεώρημα. Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι (περιγράφουν το ίδιο αντικείμενο).

Απόδειξη. A. [Διαν. ορ. $\Rightarrow$ Συν. ορ.]

Έστω η $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Ορίζουμε την $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ως εξής: $f(n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

B. [Συν. ορ. $\Rightarrow$ Διαν. ορ.].

Έστω η $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα

$$(f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots)$$

που είναι πραγματική ακολουθία με τη μορφή διανύσματος. $\square$

Παρατήρηση: Ο διανυσματικός ορισμός θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε στοιχεία άλγεβρας μεταξύ ακολουθιών. Ο συναρτησιακός θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε σημαντικές ιδιότητες που μπορεί να έχει μια ακολουθία όπως η φραγή ή η μονοτονία. Τα παραπάνω είναι σημαντικά για την κατανόηση των ορίων.

— Πραγματική ακολουθία: Real Sequence

— Οι πραγματικές ακολουθίες δεν έχουν τελευταίο όρο. Δεν θα πρέπει να υπερβάλουμε τα όρια (που θα δούμε αργότερα) με τέτοιου είδους μαθηματικές διατυπώσεις.

Παραδείγματα:

1. Σταθερές ακολουθίες: Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η σταθερή ακολουθία στο c θα είναι $(c, c, \dots, c, \dots)$ ή ισοδύναμα η $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = c$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

π.χ. η σταθερή στο 0 είναι η $(0, 0, \dots, 0, \dots)$.

2. Ταυτοτική ακολουθία είναι η
$(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ ή ισοδύναμα η $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Εναλλάσσουσες ακολουθίες μεταξύ δύο πραγματικών: Έστω $c, d \in \mathbb{R}$ με $c \neq d$ η εναλλάσσουσα ακ. μεταξύ των c, d είναι η εξής:

$$\underset{0}{c}, \underset{1}{d}, \underset{2}{c}, \underset{3}{d}, \dots) \text{ ή ισοδύναμα η } f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ με } f(n) = \begin{cases} c, & n \text{ άρτιο} \\ d, & n \text{ περιττό.} \end{cases}$$

π.χ. Εναλ. μεταξύ των $0, 1$: $(0, 1, 0, 1, \dots)$
» » των $1, 0$: $(1, 0, 1, 0, \dots)$.

Άσκηση: Προσπαθήστε να κατασκευάσετε πραγματικές ακολουθίες μεταξύ 3 ή 4 πραγματικών.

4. Έστω η ακολουθία $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$: η ακολουθία των θετικών πρώτων ακεραίων.

5. Γεωμετρική Ακολουθία. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και έστω η πραγματική ακολουθία $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots)$ ή ισοδύναμα $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = \alpha^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
$1''$

6. Έστω η ακολουθία $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/(n+1), \dots)$ ή ισοδύναμα η $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = 1/(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Έστω η ακολουθία $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n+1}, \dots\right)$ ή ισοδύναμα η $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.