Διάλεξη 18

- Παραδείγματα για πληροφοριακότητας του Κ.Π.
- Παραδείγματα εμφάνισης πραγματικών ανωμαλιών κ' στερών στα Οικονομικά

Διάλεξη 18

Το ΚΠ έχει νόημα

κ' μπορούμε να το εφαρμόσουμε για $\alpha\neq 0$

5. $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i$ $\qquad x_i=\alpha^i\neq 0\ \forall i\in\mathbb{N}$

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{|\alpha^{n+1}|}{|\alpha^n|}=|\alpha|=L \text{ (γιατί;)}$$

Βάση του ΚΠ: Όταν i. $|\alpha|<1$ έχουμε απόλυτη σύγκλιση. (το γνωρίζαμε)

ii. $|\alpha|>1$ έχουμε απόκλιση (το γνωρίζαμε)

iii. $|\alpha|=1$ το Κ.Π. μη πληροφοριακό (ξέρουμε ότι έχουμε απόκλιση)

6. $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}$ [κατά συνθήκη συγκλίνουσα - αν υπάρχει το L αναμένουμε να είναι 1 - γιατί;]

$x_i=\frac{(-1)^i}{i+1}\neq 0\ \forall i\in\mathbb{N}$. $\quad \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\left|\frac{(-1)^{n+1}/(n+2)}{(-1)^n/(n+1)}\right|$

$$=\frac{n+1}{n+2}\to 1.$$

Τα 5iii-6-7 δείχνουν ότι όταν το Κ.Π. είναι μη πλ. μπορεί να συμβαίνει οτιδήποτε — σχέση με ΤΜΡΟ

7. $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^p}$, $p>1$ (γνωρίζουμε ότι έχουμε απόλυτη σύγκλιση - γιατί;)

$x_i=\frac{1}{(i+1)^p}>0\ \forall i\in\mathbb{N}$. $\quad \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\left|\frac{1/(n+2)^p}{1/(n+1)^p}\right|$

$$=\frac{(n+1)^p}{(n+2)^p}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^p\to 1^p=1=:L$$

integral test

Το Κ.Π. είναι μη πληροφοριακό.

Παραδείγματα Εμφάνισης Πραγματικών Ακολουθιών κ' Πραγματικών Σειρών στα Οικονομικά.

Γενικό Υπόβαθρο:

- Οικονομία που λειτουργεί σε διακριτό χρόνο
  (Discrete time economy)
- Ο χρόνος αναπαρίσταται από το σύνολο των φυσικών, $t \in \mathbb{N}$

  ↓ χρονική στιγμή

  $t=0$ παρόν

  $t>0$ μελλοντική στιγμή

- Σε αυτό το υπόβαθρο όποιο χαρακτηριστικό της οικονομίας λαμβάνει πραγματικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή θα αναπαρίσταται από πραγματική ακολουθία. Η διαδικασία μερικής άθροισης επί αυτής θα δείχνει συσσώρευση στον χρόνο.
- Χάριν απλούστευσης θεωρούμε ότι δεν υπάρχει πηγή αβεβαιότητας που να επηρεάζει την εν λόγω οικονομία.

A. Χρηματοοικονομικοί Τίτλοι κ' Τιμολόγηση σε υπόβαθρο βεβαιότητας

Έστω $A_t \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{N}$. Το A_t θεωρείται ότι είναι απόδοση (χρηματική ή άλλη) την οποία υπόσχεται χρηματοοικονομικός τίτλος που εκδίδεται στο παρόν ($t=0$) για την χρονική στιγμή T. Η πραγματική ακολουθία $(A_0, A_1, \dots, A_T, \dots)$ κωδικοποιεί αυτή την χρονικά διατεταγμένη συλλογή από αποδόσεις.

Στο απλοϊκό μας υπόβαθρο ο ίδιος ο τίτλος μπορεί να ταυτιστεί με την ακολουθία των αποδόσεών του:

Ορισμός: Στο υπόβαθρό μας, χρηματοοικονομικός τίτλος που εκδίδεται στο παρόν είναι όποια πραγματική ακολουθία $(A_0, A_1, \dots, A_T, \dots)$ με $A_t \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{N}$.

* Ο ορισμός μας είναι μη πλήρης αφού στην πραγματικότητα:

α. Ο τίτλος μπορεί να έχει κ' άλλα χαρακτηριστικά πέρα των αποδόσεών του (π.χ. μετοχές - ιδιοκτησία)

β. Οι αποδόσεις γενικά ενέχουν αβεβαιότητα (περιγράφονται ως ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών - πιο περίπλοκα αντικείμενα).

Ορισμός. Διάρκεια T^* του τίτλου είναι το μέγιστο T για το οποίο ισχύει ότι $A_{T+k}=0 \ \ \forall k>0$.

(η πιο απομακρυσμένη χρονική στιγμή μετά την οποία οι αποδόσεις μηδενίζονται)

Όταν το $T^* \in \mathbb{R}$ (δηλ. "$T^* = +\infty$") τότε ο τίτλος ονομάζεται διηνεκής.

* Σε υπόβαθρο αβεβαιότητας το T^* είναι γενικά τυχαία μεταβλητή.

Συνάρτηση Τιμολόγησης του τίτλου θα ονομάζεται οποια συνάρτηση δέχεται την ακολουθία των αποδόσειρών κ' αποδίδει μη αρνητικό αριθμό (τιμή του τίτλου) [κ' ικανοποιεί κ' κάποιες προϋποθέσεις, π.χ. γραμμικότητα, στις οποίες δεν θα αναφερθούμε]

Υπό κάποιες προϋποθέσεις η τιμολόγηση του τίτλου από τις αγορές στις οποίες συναλλάσσεται θα δίνεται

στο $t=0$ οπότε κ' εκδίδεται

από:

Θεώρημα Τιμολόγησης: Αν

α. δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών κ' ο τίτλος μπορεί να διατεθεί σε όποιο ποσό είναι στο $t=0$

β. Υπάρχει μοναδικό σταθερό μονοπεριόδου επιτόκιο στην οικονομία $R>0$.

γ. Υπάρχει τέλειος ανταγωνισμός κ' πληροφοριακή αποτελεσματικότητα,

Τότε η τιμή p του τίτλου με αποδόσεις $(A_0, A_1, \ldots, A_T, \ldots)$ δίνεται από:

Πραγμ. σειρά.

$$p = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{A_t}{(1+R)^t}$$

εφόσον η σειρά συγκλίνει.

Παρούσα αξία της A_t στο παρόν βάσει του R

* Λογική απόδειξη.

* Αν T^* πεπερασμένο τότε $p = \sum_{t=0}^{T^*} \frac{d_t}{(1+R)^t}$ (πεπ. άθροισμα)

Όταν $T^* = +\infty$ τότε η p γίνεται από γνήσια πραγματική σειρά.

* Παράδειγμα: έστω $c>0$, $\mu \geq 0$ (ρυθμός μεγ. αποδόσεων)

κ' $d_t = \begin{cases} 0, & t=0 \\ c\,(1+\mu)^t, & t>0 \end{cases}$ (μηδενική απόδοση στην έκδοση)

δηλ. η ακολουθία των αποδόσεων είναι η

$$(0, c(1+\mu), c(1+\mu)^2, \dots, c(1+\mu)^T, \dots) \quad T>0$$

Τότε ο τίτλος είναι διηνεκής κ' βάσει του θεωρήματος

$$p = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{d_t}{(1+R)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} c\,\frac{(1+\mu)^t}{(1+R)^t} \quad d_0=0$$

$$= c \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+\mu}{1+R}\right)^t$$ (;) το οποίο θα συγκλίνει

$\alpha = \frac{1+\mu}{1+R}$

ανν (γιατί;) $\left|\frac{1+\mu}{1+R}\right| < 1 \iff \frac{1+\mu}{1+R} < 1 \iff \mu < R$

ρυθμός μεγ. αποδ. < συντ. προεξ.

Οπότε κ' $p = c\,\dfrac{(1+M)/(1+R)}{1-\dfrac{1+M}{1+R}} =$

$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \dfrac{x}{1-x}$, $|x|<1$

$= c\,\dfrac{(1+M)/\cancel{(1+R)}}{(R-M)/\cancel{(1+R)}} = \dfrac{c\,(1+M)}{R-M}$

* π.χ. $M=0$, $p = \dfrac{c}{R}$ ✓

* Όταν $M \geq R$ τότε $n\,c \sum_{t=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+M}{1+R}\right)^t$ εκπομπίνει ως μη φραγμένη (γιατί;) οπότε κ' θεωρούμε ότι η τιμή που επικρατεί μεγαλώνει χωρίς φράγμα (φούσκα)

Η συνθήκη $\underline{M<R}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως μια "απλοϊκή" συνθήκη μη ύπαρξης φούσκας - No Bubble Condition.

B. Διαδικασία Δημιουργίας Χρήματος από το Τραπεζικό σύστημα

$\longrightarrow$

Τραπεζικό Σύστημα με Τεχνολογία ψηφιακών διαθεσίμων

Χρήμα = σύνολο των καταθέσεων στις εμπορικές τράπεζες (χ.τ.τ.)

Εμπορικές Τράπεζες
→ δέχονται καταθέσεις / δίνουν δάνεια

Κεντρική Τράπεζα
→ μπορεί κ' δημιουργεί χρήμα εκ του μηδενός

Επιβάλλει την διατήρηση ρευστών διαθεσίμων ✓

→ φτιάχνει καταθέσεις εκ του μηδενός

αν X το σύνολο των καταθέσεων
Επιβάλλει ότι το αX δεν μπορεί να δοθεί ως δάνειο, $\alpha \in [0,1]$

Όταν $\alpha = 0$
Όλες οι καταθέσεις μπορούν να δανειστούν

Όταν $\alpha = 1$
Οι εμπορικές τράπεζες δεν μπορούν να δίνουν δάνεια
(Θησαυροφυλάκια)

Επηρεάζει το α

Χρονισμός (t)	Ενέργεια Τραπ. Συστ.

0 — Η κεντρική Τρ. δημιουργεί το C ως κατάθεση αC → δεν δαν. ; $(1-\alpha)C$ → δανείσιμο → πιστ. ως κατάθ. σε λογ. του δανειο-λήπτη ✓

1 — Κατά μέγιστο το $(1-\alpha)C$ δανείζεται
⇒ Κατά μέγιστο νέο χρήμα $= (1-\alpha)C$ → δημιουργείται από την λογ. του δανειστού

$\alpha(1-\alpha)C$ δεν δαν. ; $(1-\alpha)^2 C$ δανείσιμο

2
⋮
T — Κατά μέγιστο το $(1-\alpha)^T C$ δανείζεται
⇒ κατά μέγιστο νέο χρήμα $(1-\alpha)^T C$

$\alpha(1-\alpha)^T C$ δεν δαν. ; $(1-\alpha)^{T+1} C$ δανείσιμο

⋮

⋮

Επομένως:

α. η ακολουθία

$$\left(C, (1-\alpha)C, (1-\alpha)^2 C, \dots, (1-\alpha)^T C, \dots \right)$$

κωδικοποιεί την μέγιστη αύξηση της προσφοράς χρήμα-
τος που μπορεί να συμβεί από την δανειοδοτική
λειτουργία του τραπεζικού συστήματος σε κάθε χρονι-
κή στιγμή, δεδομένης της αρχικής ενέργειας της
Κεντρικής Τράπεζας.

β. Εφαρμόζοντας μερική άθροιση στην προηγούμενη
ακολουθίας την ΑΜΜ

$$\left(c,\ c\left(1+(1-\alpha)\right),\ c\left(1+(1-\alpha)+(1-\alpha)^2\right), \dots,\ c\sum_{t=0}^{T}(1-\alpha)^t, \dots\right)$$

η οποία μας πληροφορεί για την μέγιστη
σωρευτική αύξηση της προσφοράς χρήματος
από την προηγούμενη διαδικασία σε κάθε χρονική
στιγμή.

Το $c\sum_{t=0}^{\infty}(1-\alpha)^t$ μας πληροφορεί για την μέγιστη τέτοια αύξηση καθόλη την διάρκεια ζωής της οικονομίας

– Όταν $\alpha=0$ η $\sum_{t=0}^{\infty}(1-\alpha)^t=+\infty$ (η σειρά αποκλίνει ως μη φραγμένη - γιατί;) – Οι εμπ. τράπεζες μπορούν να δανείζουν όλες τις καταθέσεις, όποια δημιουργία χρημ. από την Κ.Τρ. μπορεί να αυξάνει χωρίς φράγμα την προσφ. χρήματος συν τω χρόνω.

$\beta=1-\alpha$, $\beta\in[0,1)$

– Όταν $\alpha>0$ ($\alpha\in(0,1]$) η $c\sum_{t=0}^{\infty}(1-\alpha)^t \overset{(i)}{=} c\frac{1}{1-(1-\alpha)}=\frac{c}{\alpha}$

(i) $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \underset{0\leq\beta<1}{=} \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha}$

Που δείχνει ότι η αρχική δημ. ποσότητας c από την Κ.Τρ. μπορεί τελικά να δημιουργήσει συνολική ποσότητα $\frac{c}{\alpha}\geq c$. $\frac{c}{\alpha}=c \iff \alpha=1$

Οπότε οι εμπορικές τράπεζες δεν μπορούν να δημιουργήσουν χρήμα. ■