Απλό Παράδειγμα Εξίσωσης
$2^{\text{ης}}$ Τάξης

Να βρεθούν οι λύσεις της $y''=y$ $(*)$ που έχουν την μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το 0.

Έστω η $y=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i$ όποια τέτοια λύση. Γνωρίζουμε ότι εφόσον υπάρχει θα είναι ομαλή στο εσωτερικό του διαστήματος σύγκλισης της (γιατί;) και ότι $y'=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\alpha_{i+1}x^i$ και $y''=\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)\alpha_{i+2}x^i$ (γιατί;). Αντικαθιστώντας στην $(*)$ παίρνουμε την

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)\alpha_{i+2}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x^i \qquad (**)$$

και από την έννοια της ισότητας δυναμοσειρών η $(**)$ είναι ισοδύναμη με το απειροπληθές αναδρομικό σύστημα εξισώσεων ως προς την (α_i):

$$(i+2)(i+1)\alpha_{i+2}=\alpha_i\,,\quad \forall i\in\mathbb{N} \qquad (***).$$

Οι πρώτες εξισώσεις του $(***)$ είναι οι:

$$\left.\begin{array}{ll} i=0, & 2\alpha_2=\alpha_0 \\ i=1, & 3\cdot 2\alpha_3=\alpha_1 \\ i=2, & 4\cdot 3\alpha_4=\alpha_2 \\ i=3, & 5\cdot 4\alpha_5=\alpha_3 \\ & \vdots \end{array}\right\}$$

οπότε και γίνεται εμφανές ότι στο $(***)$ δεν υπάρχει καμμία πληροφορία για τον προσδιορισμό των α_0,α_1 οπότε αυτές θα είναι οι ανεξάρτητες "σταθερές ολοκλήρωσης" (γιατί το πλήθος τους είναι δύο;).

Θέτοντας $\alpha_0=c_1$, $\alpha_1=c_2$ έχουμε ότι

$$\alpha_2=\frac{1}{2}c_1$$
$$\alpha_3=\frac{1}{2\cdot 3}c_2$$

$\alpha_4 = \frac{1}{4 \cdot 3}\alpha_2 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} c_1$, $\alpha_5 = \frac{1}{5\cdot 4}\alpha_3 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} c_2$ οπότε

και γενικότερα έχουμε ότι $\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{i!}\, c_1 & , i \text{ άρτιο} \\ \frac{1}{i!}\, c_2 & , i \text{ περιττό} \end{cases}$

(προσπαθήστε να το ελέγξετε επαγωγικά). Συνεπώς εφόσον είναι καλώς ορισμένες οι ζητούμενες λύσεις θα έχουν την μορφή:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i = \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i!} c_1 x^i + \sum_{i=1,3,5,\ldots} \frac{1}{i!} c_2 x^i$$

$$= c_1 \sum_{i=0,2,4,\ldots} \frac{1}{i!} x^i + c_2 \sum_{i=1,3,5,\ldots} \frac{1}{i!} x^i \quad (A)$$

Προκειμένου να ελέγξουμε το καλώς ορισμένο μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του πηλίκου σε καθε μία από τις δύο σειρές στο (A) κάνοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς στους δείκτες ή να προσπαθήσουμε να τις "αναγνωρίσουμε" συμπληρώνοντας όρους για να σχηματιστούν κατάλληλα εκθετικά. Προς τούτο μετασχηματίζουμε τις σταθερές $c_1 = c_1^* + c_2^*$ και $c_2 = c_1^* - c_2^*$ όπου c_1^*, c_2^* δύο νέες ανεξάρτητες σταθερές. Παρατηρούμε ότι αφού εξ' ορισμού

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix}$$ και η μήτρα

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ είναι μη ιδιάζουσα, ο παραπάνω μετασχηματισμός δεν αλλοιώνει την ανεξαρτησία των αρχικών σταθερών c_1, c_2 - δηλ. για όποια τιμή των c_1, c_2 υπάρχει μοναδική τιμή των c_1^*, c_2^* που την αποδίδει (εξηγείστε!). Αντικαθιστώντας στο (A) έχουμε ότι

$$y = (c_1^* + c_2^*) \sum_{i=0,2,4,\ldots} \frac{1}{i!} x^i + (c_1^* - c_2^*) \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i =$$

$$= c_1^* \left(\sum_{i=0,2,4,\ldots} \frac{1}{i!} x^i + \sum_{i=1,3,5,\ldots} \frac{1}{i!} x^i \right) + c_2^* \left(\sum_{i=0,2,4,\ldots} \frac{1}{i!} x^i - \sum_{i=1,3,5,\ldots} \frac{1}{i!} x^i \right)$$

$(-1)^i = 1,\ i=0,2,\dots$
$(-1)^i = -1,\ i=1,3,\dots$

$$C_1^* \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i + C_2^* \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(-1)^i x^i =$$

$$= C_1^* \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i + C_2^* \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(-x)^i =$$

$$= C_1^* e^{x} + C_2^* e^{-x}.$$

(Επαληθεύστε τα γνώριμα αναπτύγματα για λύσεις της (*))

Οπότε καταλήγουμε στην απάντηση $y(x) = C_1^* e^{x} + C_2^* e^{-x}$, $C_1^*, C_2^* \in \mathbb{R}$.

Άσκηση:

Να βρεθούν οι ανάλογες λύσεις για τις εξισώσεις

1. $y'' = y + \beta$
2. $y'' = y + \beta x$
3. $y''' = y$
4. $y''' = y'$.