ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ SOLOW ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ

Α. Χωρίς Τεχνολογική Πρόοδο

Συνάρτηση Παραγωγής (Αύξουσα, Κοίλη, Σταθερές Αποδόσεις Κλίμακας)

$$Y = F(K, L) = K^{a} L^{1-a}$$

Πρόβλημα Επιχείρησης (Τέλεια Ανταγωνιστικές Αγορές)

$$\max_{K,L} F(K, L) - rK - wL$$

FOC

$$w = \frac{\partial F}{\partial L} = (1-a)\frac{Y}{L}, \qquad r = \frac{\partial F}{\partial K} = (1-a)\frac{Y}{K}$$

$$wL + rK = Y$$

Συσσώρευση Κεφαλαίου

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

$\dot{K} \equiv \dfrac{dK}{dt}$. $\delta \in [0,1]$: Συντελεστής απόσβεσης

Μεγέθη ανά Εργαζόμενο

$$y \equiv \frac{Y}{L}, \quad k \equiv \frac{K}{L}$$

Συνάρτηση Παραγωγής ανά Εργαζόμενο

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^a L^{1-a}}{L} = K^a L^{1-a-1} = K^a L^{-a} = \left(\frac{K}{L}\right)^a \Leftrightarrow y = k^a$$

Συσσώρευση Κεφαλαίου ανά Εργαζόμενο

$$k=\frac{K}{L}\Leftrightarrow \ln k=\ln K-\ln L\Leftrightarrow \frac{d\ln k}{dt}=\frac{d\ln K}{dt}-\frac{d\ln L}{dt}\Leftrightarrow \frac{1}{k}\frac{dk}{dt}=\frac{1}{K}\frac{dK}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L} \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

$$y=k^{a}\Leftrightarrow \ln y=a\ln k\Leftrightarrow \frac{d\ln y}{dt}=a\frac{d\ln k}{dt}\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=a\frac{1}{k}\frac{dk}{dt}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{y}=a\frac{\dot{k}}{k} \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

Υπόθεση: Ο πληθυσμός μεγενθύνεται με ρυθμό n

$$\frac{\dot{L}}{L}=n\Leftrightarrow \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}=n\Leftrightarrow \frac{1}{L}dL=ndt\Leftrightarrow \int\frac{1}{L}dL=n\int dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln L=nt+C\Leftrightarrow L=e^{nt}e^{C}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(t)=L(0)e^{nt}$$

Υπόθεση: Οι εργαζόμενοι αποτελούν σταθερό ποσοστό, λ, του πληθυσμού.

$$L(t) = \lambda N(t) \Leftrightarrow \ln L = \ln \lambda + \ln N \Leftrightarrow \frac{d \ln L}{dt} = \frac{d \ln \lambda}{dt} + \frac{d \ln N}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = 0 + \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \Leftrightarrow \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{N}}{N} = n \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

(1), (2) και (3):

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - n \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + n$$

$$\dot{K} = sY - \delta K \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta \Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k} + n = s\frac{Y/L}{K/L} - \delta \Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{y}{k} - n - \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{k} = sy - (n+\delta)k$$

Η μακροοικονομική συμπεριφορά στο υπόδειγμα του Solow συνοψίζεται στις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$y = k^{a}$$
$$\dot{k} = sy - (n+\delta)k$$

Σημείο Σταθερής Κατάστασης (Steady State): $\dot{k} = 0$

$$0 = sy - (n+\delta)k \Leftrightarrow sk^{a} = (n+\delta)k \Leftrightarrow \frac{k}{k^{a}} = \frac{s}{n+\delta} \Leftrightarrow k^{1-a} = \frac{s}{n+\delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^{*} = \left[\frac{s}{n+\delta}\right]^{\frac{1}{1-a}}$$

$$y^{*} = (k^{*})^{a} = \left[\frac{s}{n+\delta}\right]^{\frac{a}{1-a}}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{y} = a\frac{\dot{k}}{k} = 0$$

$$y=\frac{Y}{L}\Leftrightarrow \ln y=\ln Y-\ln L\Leftrightarrow \frac{d\ln y}{dt}=\frac{d\ln Y}{dt}-\frac{d\ln L}{dt}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}-\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{\dot{L}}{L}\Leftrightarrow 0=\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{\dot{L}}{L}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{L}}{L}=n$$

$$\dot{k}=sy-(n+\delta)k\Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k}=s\frac{y}{k}-(n+\delta)\Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k}=s\frac{k^{a}}{k}-(n+\delta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}}{k}=sk^{a-1}-(n+\delta)$$

$$s\frac{y}{k}=sk^{a-1}$$

Β. Με Τεχνολογική Πρόοδο

Συνάρτηση Παραγωγής

$$Y = F(K, AL) = K^{a}(AL)^{1-a} = A^{1-a}K^{a}L^{1-a}$$

Ανά εργαζόμενο:

$$y = k^{a}A^{1-a}$$

Η τεχνολογία αυξάνεται με σταθερό ρυθμό g_A**:** $\frac{\dot{A}}{A} = g_A$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g_A \Leftrightarrow \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = g_A \Leftrightarrow \frac{1}{A}dA = g_A dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{A}dA = g_A \int dt \Leftrightarrow \ln A = g_A t + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = e^{g_A t}e^{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(t) = A(0)e^{g_A t}$$

$$y = k^a A^{1-a} \Leftrightarrow \ln y = a \ln k + (1-a)\ln A \Leftrightarrow \frac{d \ln y}{dt} = a\frac{d \ln k}{dt} + (1-a)\frac{d \ln A}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} + (1-a)\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{y} = a\frac{\dot{k}}{k} + (1-a)\frac{\dot{A}}{A}$$

ή

$$g_y = ag_k + (1-a)g_A$$

Παρατηρήστε ότι αν στον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου $\dot{K} = sY - \delta K \;\Leftrightarrow\; \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta$

το $\frac{Y}{K}$ είναι μία σταθερά, τότε και $\frac{\dot{K}}{K}$ μία σταθερά.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι αν ο λόγος $\frac{Y}{K}$ είναι σταθερός, το ίδιο θα ισχύει και για τον λόγο

$$\frac{y}{k} = \frac{Y/L}{K/L}$$

Συνεπώς, y και k μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό, γ:

$$g_y = g_k \equiv \gamma$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = a\frac{\dot{k}}{k} + (1-a)\frac{\dot{A}}{A} \;\Leftrightarrow\; \gamma = a\gamma + (1-a)g_A \;\Leftrightarrow\; (1-a)\gamma = (1-a)g_A \;\Leftrightarrow\; \gamma = g_A$$

Δηλαδή, y και k μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό που μεγεθύνεται η τεχνολογία.

Μεγέθη ανά αποτελεσματικό εργαζόμενο

$$\tilde{y} \equiv \frac{Y}{AL}, \quad \tilde{k} \equiv \frac{K}{AL}$$

$$\frac{Y}{AL} = \frac{K^a (AL)^{1-a}}{(AL)^a (AL)^{1-a}} = \frac{K^a}{(AL)^a} = \left(\frac{K}{AL}\right)^a \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{k}^a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{k}^a$$

$$\tilde{k} = \frac{K}{AL} \Leftrightarrow \ln \tilde{k} = \ln K - \ln A - \ln L \Leftrightarrow \frac{d \ln \tilde{k}}{dt} = \frac{d \ln K}{dt} - \frac{d \ln A}{dt} - \frac{d \ln L}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tilde{k}} \frac{d\tilde{k}}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dK}{dt} - \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} - \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} \Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - g - n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} + g + n$$

$$\dot{K} = sY - \delta K \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y/(AL)}{K/(AL)} - \delta \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - \delta \Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} + g + n = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - n - g - \delta \Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - (n + g + \delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (n + g + \delta)\tilde{k}$$

Η μακροοικονομική συμπεριφορά στο υπόδειγμα του Solow με τεχνολογική πρόοδο (μεγέθη ανά αποτελεσματικό εργαζόμενο) συνοψίζεται στις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$\tilde{y} = \tilde{k}^{a}$$

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (n + g + \delta)\tilde{k}$$

Πορεία Ισορροπημένης Ανάπτυξης (Balanced Growth Path)

$$\dot{\tilde{k}} = 0$$

$$0 = s\tilde{y} - (n + g + \delta)\tilde{k} \Leftrightarrow s\tilde{k}^{a} = (n + g + \delta)\tilde{k} \Leftrightarrow \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}^{a}} = \frac{s}{n + g + \delta} \Leftrightarrow \tilde{k}^{1-a} = \frac{s}{n + g + \delta} \Leftrightarrow$$

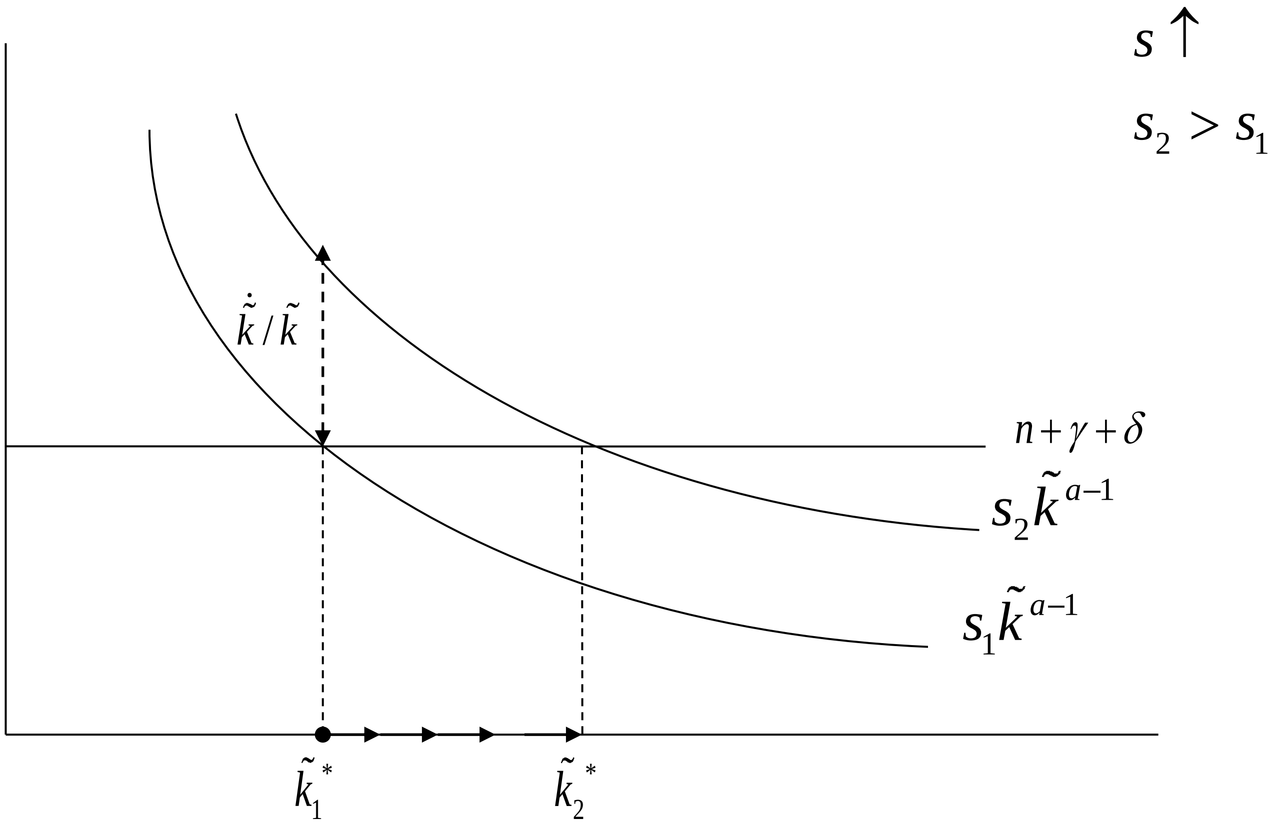
$$\Leftrightarrow \tilde{k}^{*} = \left[\frac{s}{n + g + \delta}\right]^{\frac{1}{1-a}}$$

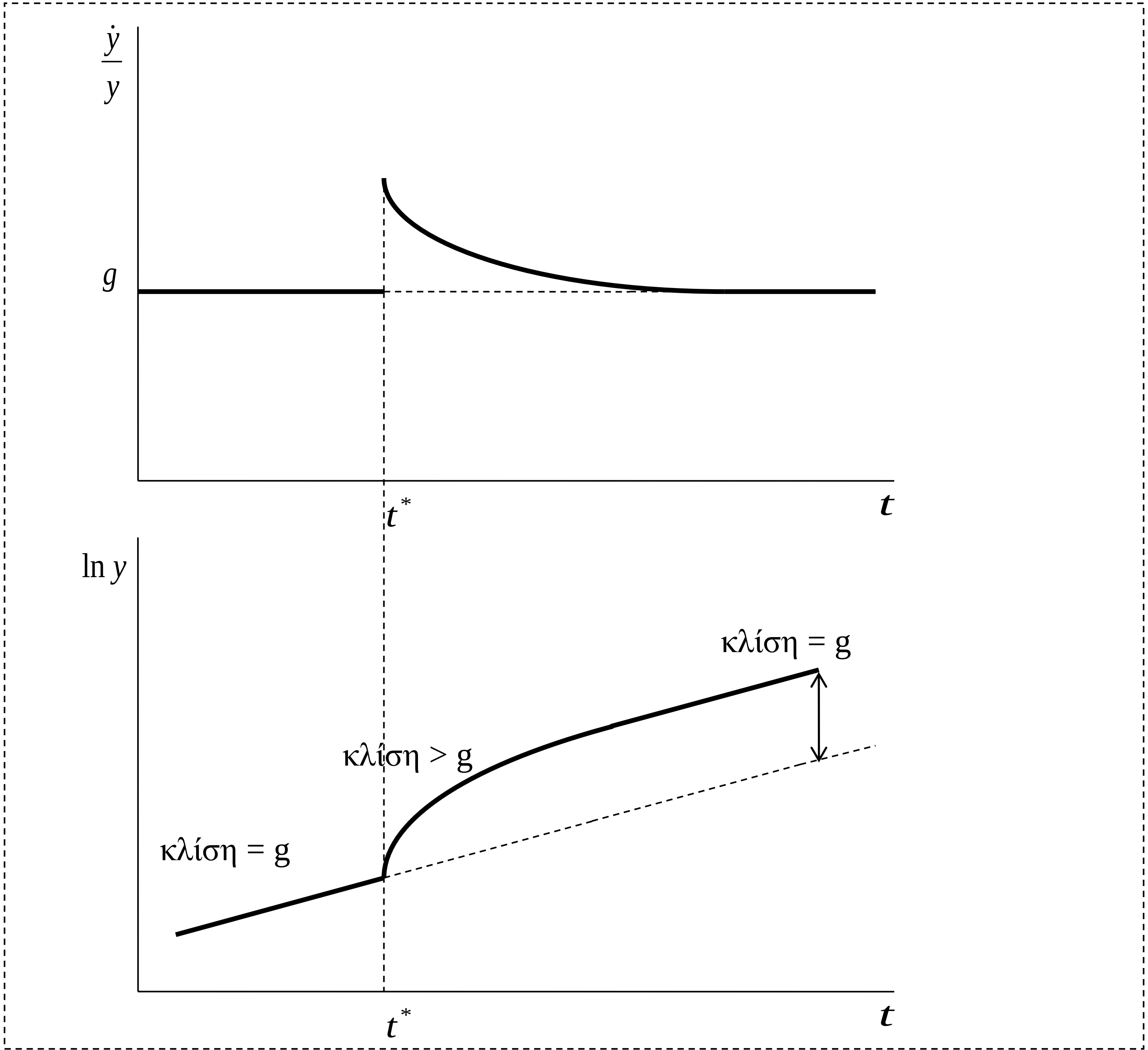
$$\tilde{y}^{*} = (\tilde{k}^{*})^{a} = \left[\frac{s}{n + g + \delta}\right]^{\frac{a}{1-a}}$$

$$\tilde{y}^{*} = \left(\frac{Y}{AL}\right)^{*} = \left(\frac{y}{A}\right)^{*} = \left[\frac{s}{n + g + \delta}\right]^{\frac{a}{1-a}} \Leftrightarrow y^{*}(t) = A(t)\left[\frac{s}{n + g + \delta}\right]^{\frac{a}{1-a}}$$

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (n + g + \delta)\tilde{k} \Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - (n + g + \delta) \Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\frac{\tilde{k}^{a}}{\tilde{k}} - (n + g + \delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = s\tilde{k}^{a-1} - (n + g + \delta)$$


$s \uparrow$
$s_2 > s_1$
$\dot{\tilde{k}} / \tilde{k}$
$n+\gamma+\delta$
$s_2 \tilde{k}^{a-1}$
$s_1 \tilde{k}^{a-1}$
$\tilde{k}_1^*$
$\tilde{k}_2^*$



$\dot{y}/y$
g
t^*
t
$\ln y$
κλίση = g
κλίση > g
κλίση = g
t^*
t