

Φροντιστήριο 22/11/2022

Άσκηση 5

$$APL = \frac{Y}{L} \stackrel{!}{=} MPL$$

$$Y = (b \cdot k^\theta + cL^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$b, c > 0$$

$$\theta < 1$$

$$\pi = pY - rK - wL$$

$$APL = \frac{Y}{L} = \frac{(bk^\theta + cL^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{L}$$

$$\begin{aligned} MPL &= \frac{dY}{dL} = \frac{1}{\theta} (bk^\theta + cL^\theta)^{\frac{1}{\theta} - 1} \cdot \theta c L^{\theta-1} \\ &= (bk^\theta + cL^\theta)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \cdot c L^{\theta-1} = (bk^\theta + cL^\theta)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \cdot c L^{-1} \\ &= c \cdot Y^{1-\theta} \cdot L^{-(1-\theta)} = c \cdot Y^{1-\theta} \cdot L^{-1} \\ &= c \cdot \frac{Y^{1-\theta}}{L^{1-\theta}} = c \left(\frac{Y}{L}\right)^{1-\theta} = c \cdot APL^{1-\theta} \end{aligned}$$

Agumon 3

Agumon 5

$$APL = \frac{Y}{L} \stackrel{!}{=} MPL$$

$$Y = (b \cdot K^\theta + c \cdot L^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$b, c > 0$$

$$\theta < 1$$

$$APL = \frac{(bK^\theta + cL^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{L}$$

$$\begin{aligned} MPL &= \frac{dY}{dL} = \frac{1}{\theta} (bK^\theta + cL^\theta)^{\frac{1}{\theta} - 1} \cdot \theta \cdot c \cdot L^{\theta-1} \\ &= (bK^\theta + cL^\theta)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \cdot c \cdot L^{\theta-1} (bK^\theta + cL^\theta)^{\frac{\theta-1}{\theta} \cdot \theta} \cdot cL \\ &= c \cdot Y^{1-\theta} \cdot L^{-(1-\theta)} = c \cdot Y^{1-\theta} \cdot L^{-1} = c \cdot \frac{Y^{1-\theta}}{L} = c \cdot APL^{1-\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2k^{1/3} L^{2/3} + A < 2F(KL) \Rightarrow$$

$$2k^{1/3} L^{2/3} + A < 2k^{1/3} L^{2/3} + 2A \quad \text{DRS}$$

$$\text{VII) } Y = k^{1/3} L^{2/3} + A = F(KL)$$

$$F(2k, 2L) = 2k^{1/3} 2L^{2/3} + A = 2k^{1/3} L^{2/3} + A > 2F(KL) \quad \text{(IRS)}$$

$2(k^{1/3} L^{2/3})$

$$\Rightarrow 2K^{1/3}L^{2/3} + \bar{A} < 2F(K, L) \Rightarrow$$

$$2K^{1/3}L^{2/3} + \bar{A} < 2K^{1/3}L^{2/3} + 2\bar{A} \quad \text{DRS}$$

Άσκηση 3

Ελαττωτική παραγωγή $a+B=1/3+1/3=2/3 < 1$ \rightarrow αυτάρκεια

$$i) Y = k + k^{1/3} \cdot L^{1/3} = Y(k, L)$$

$$\text{Όταν } \lambda > 0 \Rightarrow Y(\lambda k, \lambda L) = \lambda k + (\lambda k)^{1/3} \cdot (\lambda L)^{1/3} = \lambda k + \lambda^{1/3} \cdot k^{1/3} \cdot \lambda^{1/3} \cdot L^{1/3} = \lambda k + \lambda^{2/3} \cdot k^{1/3} \cdot L^{1/3}$$

$$\text{Όταν } \lambda = 2 \Rightarrow Y(2k, 2L) = 2k + 2^{2/3} \cdot k^{1/3} \cdot L^{1/3} < 2Y \Rightarrow \text{DRS}$$

$$ii) Y = (k \cdot L)^{1/3} + A = F(k, L)$$

$$\text{Όταν } \lambda = 2 \Rightarrow F(\lambda k, \lambda L) = F(2k, 2L) = (2k \cdot 2L)^{1/3} + A = 2^{2/3} \cdot (k \cdot L)^{1/3} + A = 2^{2/3} \cdot Y - A + A = 2^{2/3} \cdot Y < 2Y$$

i) $Y = K^{1/2} \cdot L^{1/2}$ \Rightarrow Ελέγχω παρα $\alpha + \beta = 1/2 + 1/2 = 1$ \Rightarrow 2 καθ. αποδόσεων
υπομάρ (CRS)

ii) $Y = K^{2/3} \cdot L^{2/3}$ \Rightarrow $\alpha + \beta = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 1$ Αυξημένες αποδόσεις
υπομάρ (IRS)

iii) $Y = K^{1/3} \cdot L^{2/3}$ \Rightarrow $\alpha + \beta = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ \Rightarrow φθίνουσες αποδόσεις
υπομάρ DRS

iv) $Y = K + L \Rightarrow$ Έστω $\lambda > 0$; $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda K + \lambda L = \lambda(K + L) = \lambda Y$ CRS

$$V = K^a L^{(1-a)}$$

MONO via Cobb Douglas

• $A \vee a + (1-a) = 1 \Rightarrow C.R.S$

• $A \vee a + (1-a) < 1 \Rightarrow D.R.S$

• $A \vee a + (1-a) > 1 \Rightarrow I.R.S$

Άσκηση 3

$$F(K, L) \\ \lambda > 0$$

- Αν $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F \Rightarrow$ C.R.S
- Αν $F(\lambda K, \lambda L) > \lambda F \Rightarrow$ I.R.S
- Αν $F(\lambda K, \lambda L) < \lambda F \Rightarrow$ D.R.S

$$MPL = C \cdot (APL)^{1-\theta}$$

$$\frac{dMPL}{MPL} = g_{MPL} = \frac{d}{C} + \frac{dAPL}{(APL)^{1-\theta}} \Rightarrow$$

$$g_{MPL} = \left(\frac{dAPL}{APL} \right) (1-\theta) = g_{APL} (1-\theta)$$

$$g_{MPL} = g_{APL} (1-\theta)$$

$\theta = 1 \Rightarrow \textcircled{I} \quad g_{MPL} = 0 \quad \textcircled{\times}$

$\theta = 0 \Rightarrow \textcircled{I} \quad g_{MPL} = g_{APL}$

$0 < \theta < 1 \Rightarrow \textcircled{I} \quad g_{MPL} < g_{APL}$

$$X = a \cdot b$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

***Στον πίνακα δεν φαίνεται η 4^η υποπερίπτωση όπου το θ παίρνει αρνητικές τιμές. Σε κάθε τέτοια περίπτωση το g_{MPL} θα είναι μεγαλύτερο του g_{APL} . Κατά συνέπεια ο εργαζόμενος έχει κίνητρο να διαπραγματευτεί την αύξηση του μισθού με βάση το g_{MPL} .