ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. Κατατακτήριες Ιανουάριος 2018
<u>διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες</u>

ΜΕΡΟΣ Α

<u>1</u> (4 μονάδες)

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -\ln(x+1)$

1. Να γίνει το γράφημά της
2. Να βρεθούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0 = 0$

β) Θεωρούμε την εξίσωση: $x^4 + y^4 = 2$, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της
2. Να διαπιστωθεί ότι $\{x = 1,\ y = 1\}$ είναι το σημείο ισοελαστικότητας του x ως προς y

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \ln(x+1) - 2x$ στο θετικό διάστημα: $x \geq 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

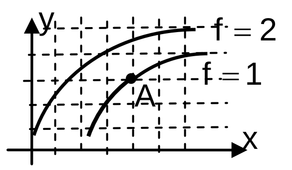
δ) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $\{f(x) = x^{-1},\ g(x) = x^{3/2}\}$, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων,
2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ ημιάξονα

<u>2</u> (4 μονάδες)

α) Να βρεθεί η μερική παράγωγος f_x της συνάρτησης $f(x,y) = \max\{2x, y+x\}$

β) Στο γράφημα παραπλεύρως δίνονται δύο ισοσταθμικές μιας συνάρτησης $f(x,y)$. Στο σημείο A:



1. Να βρεθούν τα πρόσημα των μερικών παραγώγων.
2. Να εκτιμηθεί η μερική παράγωγος f_x.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = -x - y + 1$

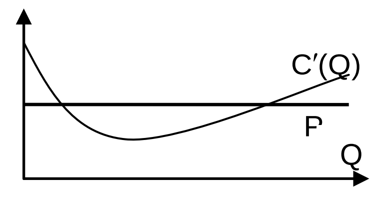
1. Να δοθούν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της.
2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της στην τετραγωνική περιοχή: $\{1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 4\}$

δ) Το περιορισμένο στάσιμο της συνάρτησης $f = 2x + y$ με τον περιορισμό $g = x^2 + y^2 = 5$, είναι $(x = 2, y = 1)$. Να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

ΜΕΡΟΣ Β

<u>3</u> (1 μονάδα)

Μία παραγωγική μονάδα λειτουργεί με οριακό κόστος $C'(Q)$, και με τιμή διάθεσης μιας μονάδας του προιόντος σταθερή: P, όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί η βιωσιμότητα της επιχείρησης.



<u>4</u> (1 μονάδα)

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = \sqrt{X} + 2\sqrt{Y} \,\|\, C = vX + wY = c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x, y\}$ γραφικά.

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx / wy, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v / w.

γ) Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.

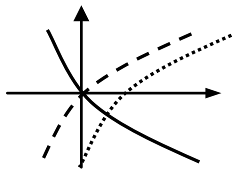
ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. Κατατακτήριες Ιανουάριος 2018
<u>*διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες*</u>

ΜΕΡΟΣ Α

<u>1</u> *(4 μονάδες)*
α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = -\ln(x+1)$
1. Να γίνει το γράφημά της
2. Να βρεθούν η γραμμική και η παραβολική της προσέγγιση στο σημείο: $x_0 = 0$

<u>Λύση</u>



1. Το γράφημά της $-\ln(x+1)$ είναι αυτό της $\ln x$ μετατοπισμένο οριζοντίως κατά -1, δηλαδή κατά 1 προς τα αριστερά, οπότε διέρχεται από την αρχή του συστήματος, και τέλος ανεστραμμένος ως προς τον οριζόντιο άξονα λόγω του αρνητικού πρόσημου.
2. Στο σημείο $x_0 = 0$, βρίσκουμε τις τιμές:

$$f(x) = -\ln(x+1)\big|_{x=0} = -\ln 1 = 0,\quad f'(x) = -1/(x+1)\big|_{x=0} = -1,\quad f''(x) = 1/(x+1)^2\big|_{x=0} = 1$$

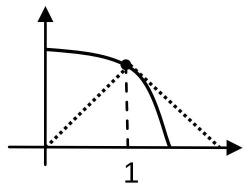
$f_{γρ}(x) = f(0) + f'(0)x = 0 - 1x = -x$, γραμμική

$f_{παρ}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 - 1x + \frac{1}{2}x^2 = -x + \frac{1}{2}x^2$, παραβολική

▲

β) Θεωρούμε την εξίσωση: $x^4 + y^4 = 2$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$
1. Να γίνει το γράφημά της
2. Να διαπιστωθεί ότι $\{x = 1,\ y = 1\}$ **είναι το σημείο ισοελαστικότητας του** x **ως προς** y

<u>Λύση</u>



1. Είναι της γνωστής μορφής: $x^\rho + y^\rho = c$ με $\rho > 1$, οπότε μοιάζει με την περιφέρεια κύκλου, πιο καμπυλοειδής διότι ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος του 2.
2. Καταρχήν επαληθεύουμε ότι το σημείο ικανοποιεί την εξίσωση. Γραφικά είναι το σημείο όπου η ακτίνα έχει ίδια απόλυτη κλίση με την εφαπτομένη. *Το σημείο ισοελαστικότητας του* x *ως προς* y *είναι ίδιο με αυτό του* y *ως προς* x. Παραγωγίζοντας πλεγμένα, βρίσκουμε:

$$4x^3 + 4y^3y' = 0 \Rightarrow y' = -x^3 / y^3$$

Έχουμε: $(x = 1, y = 1) \Rightarrow y' = -1$, $E_x y = \frac{xy'}{y} = \frac{1(-1)}{1} = -1$, σημείο ισοελαστικότητας

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να παραγωγίσουμε εξαρχής ως προς y:

$4x^3x' + 4y^3 = 0 \Rightarrow x' = -y^3 / x^3 = -1$, $E_y x = \frac{yx'}{x} = \frac{1(-1)}{1} = -1$, σημείο ισοελαστικότητας

▲

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = \ln(x+1) - 2x$ **στο θετικό διάστημα:** $x \ge 0$
1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

<u>Λύση</u>

1. Είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης: $\ln(1+x)$, με την γραμμική: $-2x$. Εξάλλου έχουμε:

$f(x) = \ln(1+x) - 2x \Rightarrow f'(x) = (1+x)^{-1} - 2,\ f''(x) = -(1+x)^{-2} < 0$, αρνητική $2^η$ παράγωγο

2. Έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού.
1. Το μέγιστο θα βρίσκεται στο στάσιμο, αν υπάρχει:

$f'(x) = (1+x)^{-1} - 2 = 0 \Rightarrow (1+x) = 1/2 \Rightarrow x = -1/2$, δεν βρίσκεται στο θετικό διάστημα,

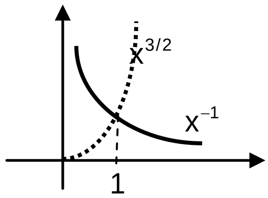
2. Στο αριστερό σύνορο: $x = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$, ισχύει η συνθήκη για max
Επομένως η λύση και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή θα είναι:

$x^* = 0,\ f^* = f(0) = 0$ ▲

δ) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $\{f(x)=x^{-1},\ g(x)=x^{3/2}\}$**, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2. Να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των δύο καμπύλων και του θετικού $y-$ **ημιάξονα**



__Λύση__

1. Βρίσκουμε το σημείο τομής:

$$\frac{1}{x}=x^{3/2}\Rightarrow x^{5/2}=1\Rightarrow x=1$$

2. Το εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1 x^{-1}dx-\int_0^1 x^{3/2}dx=\ln x\Big|_0^1-\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1=[0-(-\infty)]-2/5\to+\infty$$

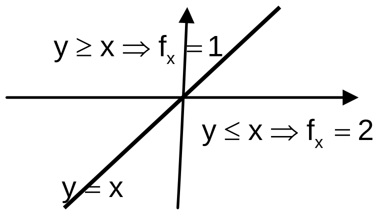
Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει και επομένως το εμβαδό είναι άπειρο

2. (4 μονάδες)

α) Να βρεθεί η μερική παράγωγος f_x **της συνάρτησης** $f(x,y)=\max\{2x,y+x\}$

__Λύση__

Η συνάρτηση είναι τμηματικά ορισμένη:



$$f(x,y)=\max\{2x,y+x\}=\begin{cases}2x & \text{αν } 2x\ge y+x\Rightarrow y\le x\\ y+x & \text{αν } y+x\ge 2x\Rightarrow y\ge x\end{cases}$$

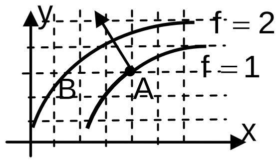
$$\Rightarrow f_x=\begin{cases}2 & \text{αν } y\le x\\ 1 & \text{αν } y\ge x\end{cases}$$

▲

β) Στο γράφημα παραπλεύρως δίνονται δύο ισοσταθμικές μιας συνάρτησης $f(x,y)$**. Στο σημείο A:**

1. Να βρεθούν τα πρόσημα των μερικών παραγώγων

2. Να εκτιμηθεί η μερική παράγωγος f_x**.**



__Λύση__

1. Η διανυσματική κλίση δείχνει γνήσια αριστερά-πάνω προς την μεγαλύτερη ισοσταθμική. Επομένως οι μερικές παράγωγοι έχουν τα πρόσημα: $\{f_x<0,\ f_y>0\}$.

2. Μεταβάλλοντας μόνο το x, πηγαίνουμε από το σημείο A οριζοντίως προς τα αριστερά στο σημείο B, και βρίσκουμε:

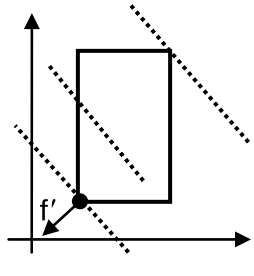
$$\left.\begin{array}{l}\Delta_x f=f(B)-f(A)=2-1=1\\ \Delta x=x_B-x_A\approx 1.5-4=-2.5\end{array}\right\}\Rightarrow f_x\approx\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\frac{1}{-2.5}=-0.4$$

▲

γ) Θεωρούμε την γραμμική συνάρτηση: $f(x,y)=-x-y+1$

Να δοθούν τα γραφήματα των ισοσταθμικών της, και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της στην τετραγωνική περιοχή: $\{1\le x\le 2,\ 1\le y\le 4\}$

__Λύση__



Οι ισοσταθμικές είναι ευθείες με αρνητική κλίση:

$$f(x,y)=-(x+y)+1=c\Rightarrow y=-x-c+1$$

και οι τιμές αυξάνουν προς αριστερά-κάτω διότι:

$$\{f_x=-1<0,\ f_y=-1<0\}$$

Η μέγιστη τιμή θα βρίσκεται στην κορυφή αριστερά-κάτω:

$$(x^*=1,\ y^*=1)\Rightarrow f^*=-(1+1)+1=-1$$

▲

δ) Το περιορισμένο στάσιμο της συνάρτησης $f = 2x + y$ με τον περιορισμό $g = x^2 + y^2 = 5$, είναι $(x = 2, y = 1)$. Να χαρακτηριστεί το στάσιμο ως ακρότατο, αναλυτικά και γραφικά στο επίπεδο.

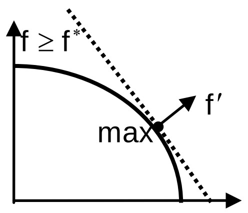
__Λύση__

Για τον αναλυτικό χαρακτηρισμό υπολογίζουμε την πλαισιωμένη εσσιανή ορίζουσα της συνάρτησης Lagrange:

$$L = f + \lambda(c - g) = 2x + y + \lambda(5 - x^2 - y^2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} L_x = 2 - 2\lambda x \\ L_y = 1 - 2\lambda y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} L_{xx} = -2\lambda & L_{xy} = 0 \\ L_{yx} = 0 & L_{yy} = -2\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\tilde{H}_L = \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} & -g_x \\ L_{yx} & L_{yy} & -g_y \\ -g_x & -g_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -2\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda(-4) - 4(-8\lambda) = 40\lambda = 20 > 0 \ ,$$

διότι: $\lambda = \dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{2}$



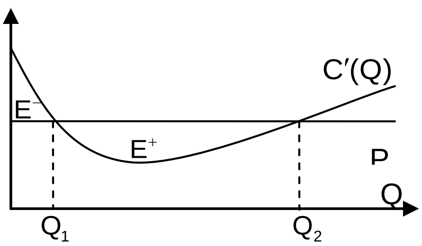
Είναι γνήσια θετική και επομένως το σημείο χαρακτηρίζεται ως *περιορισμένο γνήσιο τοπικό μέγιστο*.
Γραφικά διαπιστώνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι *περιορισμένο γνήσιο ολικό μέγιστο,* διότι ο κυκλικός περιορισμός βρίσκεται εξολοκλήρου στην κάτω σταθμική της γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης.

▲

ΜΕΡΟΣ Β

__3__ *(1 μονάδα)*

Μία παραγωγική μονάδα λειτουργεί με οριακό κόστος $C'(Q)$, και με τιμή διάθεσης μιας μονάδας του προϊόντος σταθερή: P, όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί αν η επιχείρηση είναι βιώσιμη.



__**Λύση.**__ Μέχρι την παραγωγή Q_1 έχουμε οριακή ζημιά διότι η μοναδιαία τιμή είναι μικρότερη από το οριακό κόστος: $P < C'(Q)$, στη συνέχεια έχουμε οριακό κέρδος μέχρι την παραγωγή Q_2 διότι έχουμε: $P > C'(Q)$, και στη συνέχεια πάλι έχουμε οριακή ζημιά. Επομένως το **μέγιστο λειτουργικό κέρδος βρίσκεται στην παραγωγή** Q_2. Το μέγιστο αυτό λειτουργικό κέρδος ισούται με το προσημασμένο εμβαδό μεταξύ των δύο καμπύλων μέχρι το Q_2, δηλαδή με την διαφορά των δύο θετικών εμβαδών:

$$V\Pi^* = \int_0^{Q_2} V\Pi'(Q)dQ = E^+ - E^-$$

Από το γράφημα διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω διαφορά είναι γνήσια θετική: $E^+ > E^-$, και επομένως η λειτουργία είναι συμφέρουσα. Θα είναι και βιώσιμη αν το παραπάνω λειτουργικό κέρδος υπερκαλύπτει το σταθερό κόστος:

$$E^+ - E^- > FC$$

▲

4 *(1 μονάδα)*

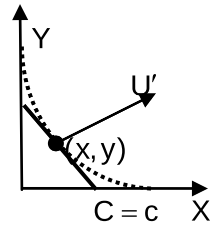
Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = 2\sqrt{X} + \sqrt{Y} \parallel C = vX + wY = c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x, y\}$ γραφικά.

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx / wy, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v / w. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.

Λύση



α) Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη, για οιεσδήποτε μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών.

β) Η λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση περιορισμένης στασιμότητας:

$$\left.\frac{U_X}{U_Y} = \frac{C_X}{C_Y}\right\} \Rightarrow \left.\frac{1/\sqrt{X}}{1/2\sqrt{Y}} = \frac{v}{w}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = 4\frac{w^2}{v^2}$$

Διαπιστώσαμε ότι ο λόγος συμμετοχής των συντελεστών στην κατανάλωση εξαρτάται μόνο από τον λόγο των μοναδιαίων τιμών τους. Το ίδιο θα ισχύει και για τον λόγο των δαπανών: :

$$\frac{x}{y} = \frac{4w^2}{v^2} \Rightarrow \frac{vx}{wy} = \frac{4w}{v} \Rightarrow \left(\frac{vx}{wy}\right) = 4\left(\frac{v}{w}\right)^{-1}$$

Η ελαστικότητα της εξάρτησης δίνεται από την δύναμη -1, οπότε έχουμε:

$$\%d\left(\frac{vx}{wy}\right) = -\%d\left(\frac{v}{w}\right) \quad \text{ή ισοδύναμα: } \%d(vx) - \%d(wy) = -(\%dv - \%dw)$$

Δηλαδή:

1. Αν ο λόγος των τιμών αυξηθεί κάποιο ποσοστό, ο λόγος των αντίστοιχων δαπανών θα ελαττωθεί κατά το ίδιο αυτό ποσοστό, οριακά.

2. Αν αυξηθεί η τιμή του ενός αγαθού σε σχέση με το άλλο κατά κάποιο ποσοστό, τότε η αντίστοιχη δαπάνη θα ελαττωθεί σε σχέση με την δαπάνη στο άλλο αγαθό κατά το ίδιο αυτό ποσοστό, οριακά.

Υπενθυμίζουμε ότι οριακά η ποσοστιαία μεταβολή ενός λόγου ισούται με την διαφορά της ποσοστιαίας μεταβολής του παρονομαστή από αυτή του αριθμητή.

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε πρώτα την πλήρη λύση και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τον ζητούμενο λόγο:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{U_X}{U_Y} = \dfrac{C_X}{C_Y} \\ C = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{1/\sqrt{X}}{1/2\sqrt{Y}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}Y = v^2X / 4w^2 \\ vX + v^2X / 4w = c\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{x = \frac{4cw}{4vw + v^2}, \ y = \frac{cv}{vw + 4w^2}\right\} \quad \text{είναι η λύση}$$

Για τον λόγο συμμετοχής των δύο αγαθών στη συνολική δαπάνη, βρίσκουμε πάλι:

$$\frac{vx}{wy} = \frac{\dfrac{4wvc}{4wv + v^2}}{\dfrac{wvc}{4w^2 + wv}} = \frac{4(4w^2 + wv)}{4wv + v^2} = 4\frac{w}{v} = 4\left(\frac{v}{w}\right)^{-1}$$

ΤΕΛΟΣ