11. Ομογένεια

Άσκηση 1η: Για τις παρακάτω συναρτήσεις $f(x,y)$, να βρεθεί η ελαστικότητα κλίμακας, στο γενικό σημείο (x,y) και στο συγκεκριμένο σημείο $(x=4, y=8)$.

Λύση:

- $f(x,y) = x^{1/2} y^{1/3}$

Έχουμε $f_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/3}$

$f_y = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-2/3}$

- Η μερική ελαστικότητα ως προς x είναι:

$$\varepsilon_x = E_x f = \frac{x f_x}{f(x,y)} = \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/3}}{x^{1/2} y^{1/3}} = \frac{1}{2}$$

(σταθερή οπότε και στο σημείο (4,8) έχουμε $\varepsilon_x = \frac{1}{2}$)

- Η μερική ελαστικότητα ως προς y είναι:

$$\varepsilon_y = E_y f = \frac{y f_y}{f(x,y)} = \frac{y \cdot \frac{1}{3} x^{1/2} y^{-2/3}}{x^{1/2} y^{1/3}} = \frac{1}{3}$$

(σταθερή οπότε και στο σημείο (4,8) έχουμε $\varepsilon_y = \frac{1}{3}$)

Επομένως η ελαστικότητα κλίμακας είναι:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(σταθερή οπότε και στο σημείο (4,8) έχουμε $\varepsilon_r = \frac{5}{6}$)

Το ποσοστιαίο διαφορικό είναι:

$$\%df = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy) = \frac{1}{2}(\%dx) + \frac{1}{3}(\%dy)$$

- $f(x,y) = 3xy - x^2$

Έχουμε $f_x = 3y - 2x$

$f_y = 3x$

- Η μερική ελαστικότητα ως προς x είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{x f_x}{f(x,y)} = \frac{x(3y-2x)}{3xy - x^2} \overset{x=4}{\underset{y=8}{=}} \frac{4(24-8)}{96-16} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$$

- Η μερική ελαστικότητα ως προς y είναι:

$$\varepsilon_y = \frac{y f_y}{f(x,y)} = \frac{y(3x)}{3xy-x^2} = \frac{3xy}{3xy-x^2} = \frac{96}{96-16} = \frac{96}{80} = \frac{6}{5}$$

Επομένως η ελαστικότητα κλίμακας είναι:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{x(3y-2x)}{3xy-x^2} + \frac{3xy}{3xy-x^2} =$$

$$= \frac{3xy - 2x^2 + 3xy}{3xy - x^2} = \frac{2(3xy-x^2)}{3xy-x^2} = 2$$

(σταθερή οπότε και στο σημείο $(x=4, y=8)$ έχουμε $\varepsilon_r = 2$)

Το ποσοστιαίο διαφορικό είναι:

$$\%df = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy) = \frac{4}{5}(\%dx) + \frac{6}{5}(\%dy)$$

▸ $f(x,y) = 8+6x+10y-x^2-y^2$

Έχουμε $f_x = 6-2x$

$f_y = 10-2y$

- Η μεριική ελαστικότητα ως προς x είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{x f_x}{f(x,y)} = \frac{x(6-2x)}{8+6x+10y-x^2-y^2} \overset{x=4}{\underset{y=8}{=}} \frac{4(6-8)}{32} = -\frac{1}{4}$$

- Η μερική ελαστικότητα ως προς y είναι:

$$\varepsilon_y = \frac{y f_y}{f(x,y)} = \frac{y(10-2y)}{8+6x+10y-x^2-y^2} \overset{x=4}{\underset{y=8}{=}} \frac{8(10-16)}{32} = -\frac{3}{2}$$

Επομένως η ελαστικότητα κλίμακας είναι:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x+\varepsilon_y = \frac{x(6-2x)}{8+6x+10y-x^2-y^2} + \frac{y(10-2y)}{8+6x+10y-x^2-y^2} =$$

$$= \frac{6x-2x^2+10y-2y^2}{8+6x+10y-x^2-y^2} \overset{x=4}{\underset{y=8}{=}} -\frac{7}{4}$$

Το ποσοστιαίο διαφορικό είναι:

$$\%df = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy) = -\frac{1}{4}(\%dx) - \frac{3}{2}(\%dy)$$

Άσκηση 2η: Η εξίσωση $f(x,y,z) = x^2y + yz^2 + y^3 = 14$, ορίζει πλεγμένα το z ως συνάρτηση των $\{x,y\}$. Να βρεθεί η ελαστικότητα κλίμακας, στο γενικό σημείο (x,y) καθώς και στο συγκεκριμένο σημείο $(x=3, y=1, z=2)$.

Λύση:

Έχουμε $x^2y + yz^2 + y^3 = 14$ (1)

- Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς x, οπότε έχουμε:

$$2xy + y \cdot 2z z_x = 0 \Leftrightarrow z_x = -\frac{2xy}{2yz} = -\frac{x}{z} \quad (1)$$

- Παραγωγίζουμε πλεγμένα ως προς y, οπότε έχουμε:

$$x^2 + z^2 + 2yz z_y + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow z_y = -\frac{x^2+z^2+3y^2}{2yz} \quad (2)$$

- Η μερική ελαστικότητα ως προς x, είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{x\, z_x}{z} \overset{(1)}{=} \frac{x}{z}\left(-\frac{x}{z}\right) = -\frac{x^2}{z^2}$$

- Η μερική ελαστικότητα ως προς y, είναι:

$$\varepsilon_y = \frac{y\, z_y}{z} \overset{(2)}{=} \frac{y}{z}\left(-\frac{x^2+z^2+3y^2}{2yz}\right) = -\frac{x^2+z^2+3y^2}{2z^2}$$

οπότε η ελαστικότητα κλίμακας είναι:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y = -\frac{x^2}{z^2} - \frac{x^2+z^2+3y^2}{2z^2} =$$

$$= -\frac{3x^2+z^2+3y^2}{2z^2} \overset{x=3}{\underset{y=1,z=2}{=}} -\frac{27+4+3}{8} = -\frac{34}{8}$$

αφού το σημείο $(x=3, y=1, z=2)$ επαληθεύει την εξίσωση $f(x,y,z) = 14$.

Άσκηση 3η: Αν η $z = z(x,y)$ είναι ομογενής βαθμού $\kappa = 2$ και τα $\{x, y\}$ ελαττωθούν αμφότερα κατά 3%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του z, αν η αρχική τιμή του είναι $z = 40$.

Λύση:

Έχουμε

$$\%\Delta x \cong \%dx = -3\%$$
$$\%\Delta y \cong \%dy = -3\% \quad \text{(εκτίμηση)}$$

Από την εξίσωση του Euler, έχουμε:

$$x f_x + y f_y = \kappa f$$, όπου κ ο βαθμός ομογένειας της f

τότε

$$\frac{x f_x}{f} + \frac{y f_y}{f} = \kappa \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \kappa \Leftrightarrow \varepsilon_r = \kappa = 2$$

Από το ποσοστιαίο διαφορικό έχουμε:

$$\%dz = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(\%dx) =$$
$$= \varepsilon_r \cdot (\%dx) = 2 \cdot (-3\%) = -6\%$$

Οπότε έχουμε:

$$\%\Delta z = \%dz = -6\% \Leftrightarrow \frac{\Delta z}{z} \cdot 100 = -6 \Leftrightarrow$$
$$\Delta z = z \cdot (-0{,}06) = -40 \cdot 0{,}06 = -2{,}4$$

Άσκηση 4η: Οι παρακάτω συναρτήσεις ορίζονται στη περιοχή $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Να διαπιστωθεί ότι είναι αύξουσες ομογενείς βαθμού 1, και σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης. Επίσης, να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές τους.

Λύση:

- $f(x,y) = 2x+y$

- Ομογένεια

Για κάθε $t>0$, έχουμε:

$$f(tx,ty) = 2(tx)+(ty) = t(2x+y) = t^1 f(x,y)$$

οπότε η f είναι ομογενής 1ου βαθμού

- Μονοτονία

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2>0 \\ f_y = 1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι γνήσια αύξουσα}$$

- Ελαστικότητα υποκατάστασης

$$\sigma = E_{\frac{dy}{dx}}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{E_{\frac{y}{x}}\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{E_{\frac{y}{x}}\left(h\left(\frac{y}{x}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{y}{x} \cdot \frac{h'\left(\frac{y}{x}\right)}{h\left(\frac{y}{x}\right)}} = \frac{x\, h\left(\frac{y}{x}\right)}{y\, h'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

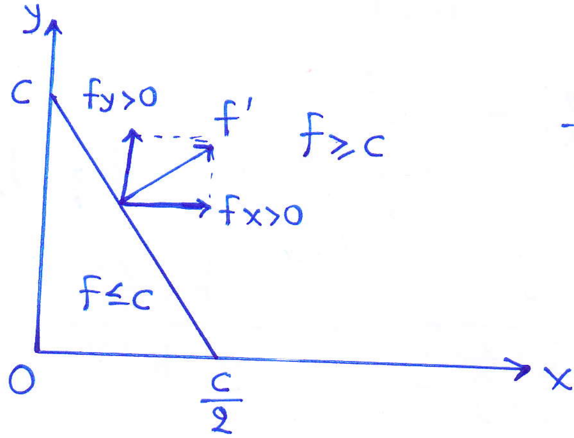
όμως $y' = h\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{f_x}{f_y} = -2$ τότε

$$h'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

οπότε $\sigma = \frac{x}{y} \cdot \frac{-2}{0} \longrightarrow -\infty$

- Ισοσταθμικές:

$f(x,y) = c \iff 2x + y = c \iff y = -2x + c$



x	0	c/2
y	c	0

Ρυθμός υποκατάστασης: $y' = -\frac{f_x}{f_y} = -2 < 0$

$y'' = 0$ (σταθερος ρυθμός υποκατάστασης)

Η f είναι οιονεί κοίλη και οιονεί κυρτή ως γραμμική.

- $f(x,y) = \left(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2$

- Ομογένεια

Για κάθε $t > 0$, έχουμε:

$f(tx, ty) = \left(\sqrt{tx} + 2\sqrt{ty}\right)^2 = \left(\sqrt{t}\sqrt{x} + 2\sqrt{t}\sqrt{y}\right)^2 =$

$= \sqrt{t}^2 \left(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2 = t^1 \cdot f(x,y)$

οπότε η f είναι ομογενής $1^{ου}$ βαθμού.

- Μονοτονία

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right) = \frac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{\sqrt{x}} > 0$$

$$f_y = \frac{2}{2\sqrt{y}} \cdot 2\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right) = \frac{2\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}} > 0$$

$\Rightarrow$ η f είναι γνήσια αύξουσα

- Ελαστικότητα υποκατάστασης

$$\sigma = E_{\frac{dy}{dx}}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{E_{\frac{y}{x}}\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{E_{\frac{y}{x}}\left(h\left(\frac{y}{x}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{y}{x} \cdot \frac{h'\left(\frac{y}{x}\right)}{h\left(\frac{y}{x}\right)}} = \frac{x\, h\left(\frac{y}{x}\right)}{y \cdot h'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

όμως $y' = h\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\frac{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{\frac{2\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}}} =$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

οπότε $h'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x}}} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}}$

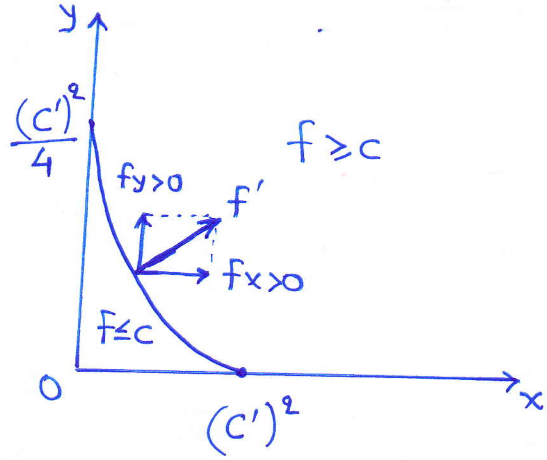
άρα $\sigma = \frac{x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}{y\left(-\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{-1}\right)} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2 > 0$

αφού $\sigma = 2 > 0$ τότε η f ορίζει φθίνων ρυθμό υποκατάστασης.

- Ισοσταθμικές

$$f(x,y) = c \iff \left(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right)^2 = c \iff \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = c^{1/2} \iff$$

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = c'$$



Αφού οι πάνω σταθμικές είναι κυρτές περιοχές τότε η f είναι οιονεί κοίλη.

- $f(x,y) = \left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^{3/2}$

- Ομογένεια

Για κάθε $t>0$, έχουμε:

$$f(tx,ty) = \left((tx)^{2/3} + (ty)^{2/3}\right)^{3/2} = \left(t^{2/3}x^{2/3} + t^{2/3}\cdot y^{2/3}\right)^{3/2} =$$

$$= \left(t^{2/3}\right)^{3/2} \cdot \left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^{3/2} = t^1 \cdot f(x,y).$$

οπότε η f είναι ομογενής 1ου βαθμού.

- Μονοτονία

$$f_x = \frac{3}{2}\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} = x^{-1/3}\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^{1/2} > 0$$

$$f_y = \frac{3}{2}\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3} = y^{-1/3}\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^{1/2} > 0$$

τότε η f είναι γνήσια αύξουσα.

- Ελαστικότητα υποκατάστασης

$$\sigma = E_{\frac{dy}{dx}}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,h\left(\frac{y}{x}\right)}{y \cdot h'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

όπου $y' = h\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x^{-1/3}\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^{1/2}}{y^{-1/3}\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^{1/2}} =$

$$= -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

οπότε $h'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2/3}$

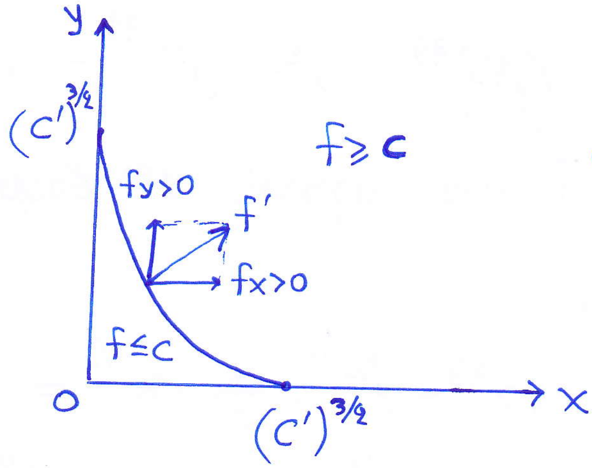
άρα $\sigma = \frac{x}{y} \cdot \frac{-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}}{-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2/3}} = \frac{3x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 3 > 0$

τότε η f ορίζει φθίνων ρυθμό υποκατάστασης.

- Ισοσταθμικές

$f(x,y) = c \Leftrightarrow \left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^{3/2} = c \Leftrightarrow x^{2/3}+y^{2/3} = c^{2/3} \Leftrightarrow$

$x^{2/3}+y^{2/3} = c'$



Αφού οι πάνω σταθμικές είναι κυρτές περιοχές τότε η f είναι οιονεί κοίλη

- $f(x,y) = x^{3/4} y^{1/4}$

  - Ομογένεια

    Για κάθε $t>0$, έχουμε:

    $$f(tx,ty) = (tx)^{3/4}(tx)^{1/4} = t^{3/4} \cdot x^{3/4} \cdot t^{1/4} \cdot y^{1/4} =$$
    $$= t^{1} \cdot f(x,y)$$

    οπότε η f είναι ομογενής $1^{ου}$ βαθμού.

  - Μονοτονία

    $$\left.\begin{aligned} f_x &= \frac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4} \geq 0 \\ f_y &= \frac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι αύξουσα}$$

  - Ελαστικότητα υποκατάστασης

    $$\sigma = E_{\frac{dy}{dx}}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\, h\left(\frac{y}{x}\right)}{y\, h'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

    όπου $y' = h\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{f_x}{f_y} = -\dfrac{\frac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4}}{\frac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4}} = -3\frac{y}{x}$

    οπότε $h'\left(\frac{y}{x}\right) = -3$

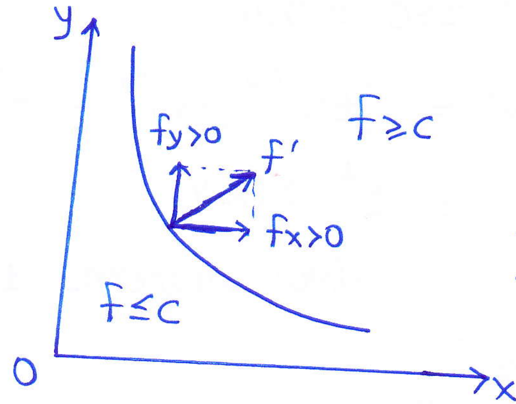
    άρα $\sigma = \dfrac{x}{y} \dfrac{-3\frac{y}{x}}{-3} = 1 > 0$

    τότε η f ορίζει φθίνων ρυθμό υποκατάστασης.

- Ισοσταθμικές

$$f(x,y) = c \iff x^{3/4} y^{1/4} = c \iff x^3 y = c^4 \iff$$

$$y = c' x^{-3}$$



Αφού οι πάνω σταθμικές είναι κυρτές περιοχές τότε η f είναι οιονεί κοίλη

- $f(x,y) = \left(x^{-2} + y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

- Ομογένεια

Για κάθε $t>0$, έχουμε:

$$f(tx,ty) = \left((tx)^{-2} + (ty)^{-2}\right)^{-1/2} = \left(t^{-2}x^{-2} + t^{-2}y^{-2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(t^{-2}\right)^{-1/2}\left(x^{-2} + y^{-2}\right)^{-1/2} = t^{1} f(x,y)$$

οπότε η f είναι ομογενής $1^{ου}$ βαθμού

- Μονοτονία

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\frac{1}{2}\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-3/2} \cdot \frac{-2}{x^3} = x^{-3}\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-3/2} > 0 \\ f_y &= -\frac{1}{2}\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-3/2} \cdot \frac{-2}{y^3} = y^{-3}\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-3/2} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

η f είναι γνήσια αύξουσα

- Ελαστικότητα υποκατάστασης

$$\sigma = E_{\frac{dy}{dx}}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,h\left(\frac{y}{x}\right)}{y\,h'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

όμως $\quad y' = h\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x^{-3}\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-3/2}}{y^{-3}\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-3/2}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^3$

οπότε $\quad h'\left(\frac{y}{x}\right) = -3\left(\frac{y}{x}\right)^2$

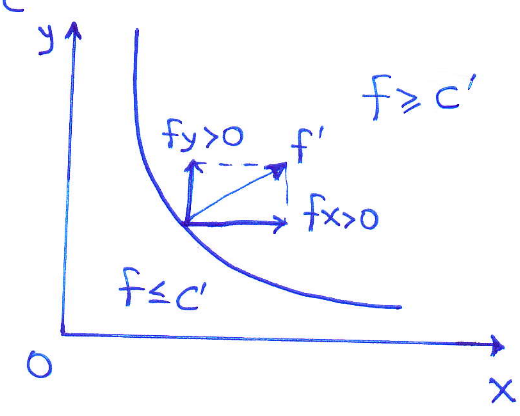
άρα $\quad \sigma = \frac{x}{y}\cdot\frac{-\left(\frac{y}{x}\right)^3}{-3\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{3y}\cdot\frac{y}{x} = \frac{1}{3} > 0$

οπότε η f ορίζει φθίνων ρυθμό υποκατάστασης.

- Ισοσταθμικές

$f(x,y) = c \iff \left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = c \iff x^{-2}+y^{-2} = c^{-2} \iff$

$x^{-2}+y^{-2} = c'$



Αφού οι πάνω σταθμικές είναι κυρτές περιοχές τότε η f είναι οιονεί κοίλη.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η ελαστικότητα υποκατάστασης υπολογίζεται και ως εξής:

$$\sigma = \frac{f_x f_y}{y\left(f_{xy} f_y - f_{yy} f_x\right)}$$