B_1. Μερική Παράγωγος
Διανυσματική Παράγωγος

2014-2015

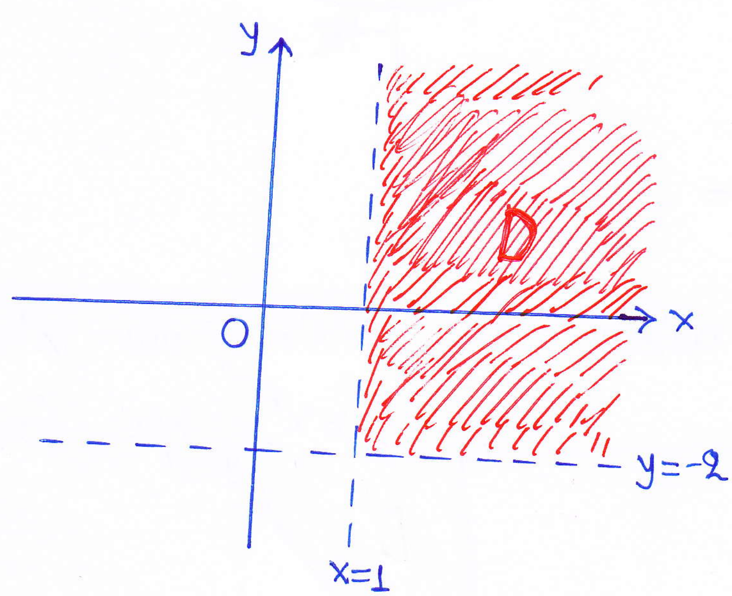
Άσκηση 1η: Να βρεθούν και να σκιαγραφηθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Λύση:

- $f(x,y) = \ln(x-1) + 2\ln(y+2)$

H f ορίζεται όταν $x-1>0$ και $y+2>0$

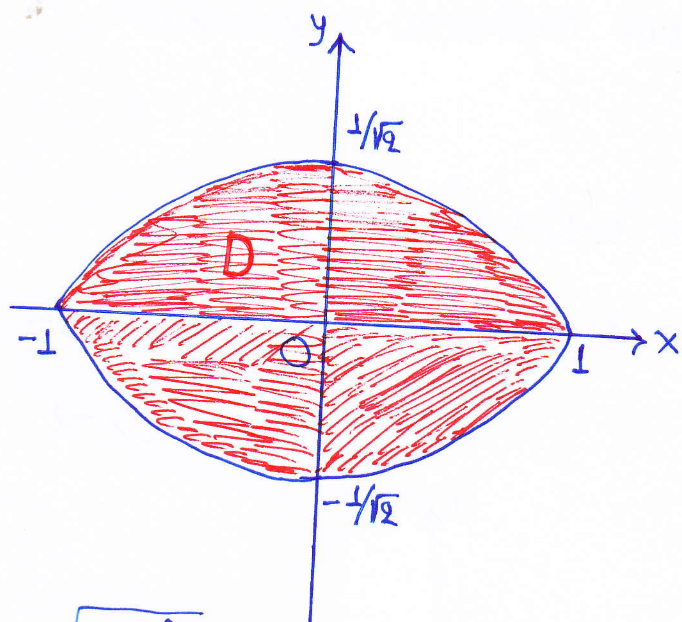
$x>1$ και $y>-2$



▸ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-2y^2}}$

Η f ορίζεται όταν $1-x^2-2y^2>0 \Leftrightarrow x^2+2y^2<1 \Leftrightarrow$

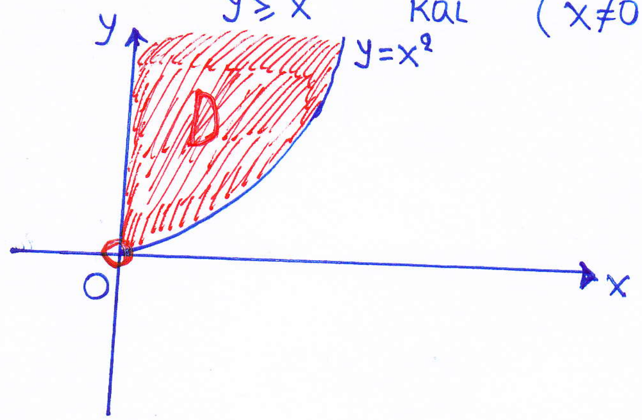
$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}<1 \quad (\text{έλλειψη})$$



▸ $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+y^2}$

Η f ορίζεται όταν $y-x^2\geq 0$ και $x^2+y^2\neq 0$

$y\geq x^2$ και ($x\neq 0$ ή $y\neq 0$)



- $f(x,y) = \dfrac{1}{e^{x+y}-1}$

Η f ορίζεται όταν $e^{x+y}-1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{x+y} \neq 1 \Leftrightarrow$

$e^{x+y} \neq e^0 \Leftrightarrow x+y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -x$

οπότε το D είναι όλο το επίπεδο ($\mathbb{R}^2$) εκτός από τα σημεία της ευθείας $y=-x$.

Άσκηση 2η: Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

Λύση:

- $f(x,y) = 2x+5y+1$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2 \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = 5$

- $f(x,y) = 2x^2-xy+y^2+4x-y+1$

$f_x = 4x-y+4 \quad , \quad f_y = -x+2y-1$

- $f(x,y) = \ln xy^2$

$f_x = \dfrac{1}{xy^2} \cdot y^2 = \dfrac{1}{x} \quad , \quad f_y = \dfrac{1}{xy^2} \cdot 2xy = \dfrac{2}{y}$

- $f(x,y) = x^a \cdot y^\beta$

$f_x = a x^{a-1} y^\beta \quad , \quad f_y = \beta x^a y^{\beta-1}$

- $f(x,y) = x^a y^{1-a}$

  $f_x = a\, x^{a-1} y^{1-a} = a\left(\frac{x}{y}\right)^{a-1}, \quad f_y = (1-a)\, x^a y^{-a} = (1-a)\left(\frac{x}{y}\right)^a$

- $f(x,y) = \sqrt{2x+4y}$

  $$f_x = \frac{1}{2\sqrt{2x+4y}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+4y}}$$

  $$f_y = \frac{1}{2\sqrt{2x+4y}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{2x+4y}}$$

- $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^2+y^2}$

  $$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

  $$f_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- $f(x,y) = \left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$

  $$f_x = -\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2} \cdot \left(-x^{-2}\right) = \left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2} \cdot x^{-2}$$

  $$f_y = -\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2} \cdot \left(-y^{-2}\right) = \left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2} \cdot y^{-2}$$

- $f(x,y) = \max\{2x+y,\ x-3y\} =$

  $$= \begin{cases} 2x+y, & \text{αν } 2x+y \geq x-3y \\ x-3y, & \text{αν } 2x+y \leq x-3y \end{cases} = \begin{cases} 2x+y, & \text{αν } x \geq -4y \\ x-3y, & \text{αν } x \leq -4y \end{cases}$$

οπότε $f_x = \begin{cases} 2, & \alpha\nu \ x \geq -4y \\ 1, & \alpha\nu \ x \leq -4y \end{cases}$, $f_y = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \ x \geq -4y \\ -3, & \alpha\nu \ x \leq -4y \end{cases}$

- $f(x,y) = \min\{2x, 3y\} = \begin{cases} 2x, & \alpha\nu \ 2x \leq 3y \\ 3y, & \alpha\nu \ 2x \geq 3y \end{cases}$

οπότε $f_x = \begin{cases} 2, & \alpha\nu \ 2x \leq 3y \\ 0, & \alpha\nu \ 2x \geq 3y \end{cases}$, $f_y = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \ 2x \leq 3y \\ 3, & \alpha\nu \ 2x \geq 3y \end{cases}$

- $f(x,y) = \exp\{2x - xy + y^2\}$

$f_x = \exp\{2x - xy + y^2\} \cdot (2-y)$

$f_y = \exp\{2x - xy + y^2\} \cdot (-x+2y)$

- $f(x,y) = |2x-y| = \begin{cases} 2x-y, & \alpha\nu \ 2x \geq y \\ y-2x, & \alpha\nu \ 2x < y \end{cases}$

οπότε $f_x = \begin{cases} 2, & \alpha\nu \ 2x \geq y \\ -2, & \alpha\nu \ 2x < y \end{cases}$, $f_y = \begin{cases} -1, & \alpha\nu \ 2x \geq y \\ 1, & \alpha\nu \ 2x < y \end{cases}$

- $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz^2$

$f_x = 2x - 2y$, $f_y = -2x + z^2$, $f_z = 2yz$

- $f(x,y,z) = x^{1/4} y^{1/4} \cdot z^{1/2}$

$f_x = \frac{1}{4} x^{-3/4} y^{1/4} z^{1/2}$, $f_y = \frac{1}{4} x^{1/4} y^{-3/4} \cdot z^{1/2}$, $f_z = \frac{1}{2} x^{1/4} y^{1/4} z^{-1/2}$

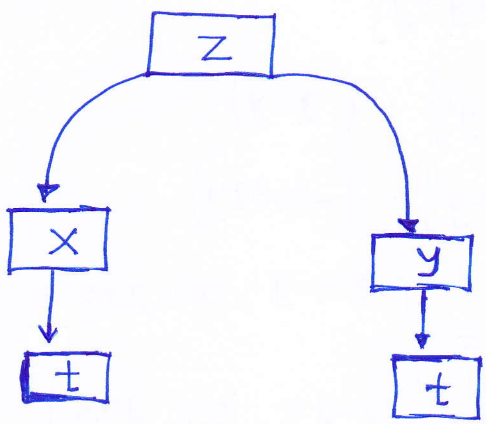
Άσκηση $3^{η}$: Για κάθε μία από τις παρακάτω συνθέσεις, να δοθεί το δέντρο εξάρτησης και να επαληθευτεί ο κανόνας αλυσωτής παραγώγισης:

Λύση:

- $\{ z = xy : x = e^t, y = t^2 \}$

Έχουμε $z = z(x,y) = z\big(x(t), y(t)\big) = z(t)$

Δέντρο εξάρτησης:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x} = y \quad , \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = e^t \quad , \quad \dfrac{dy}{dt} = 2t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ye^t + x\cdot 2t = t^2e^t + 2te^t$$

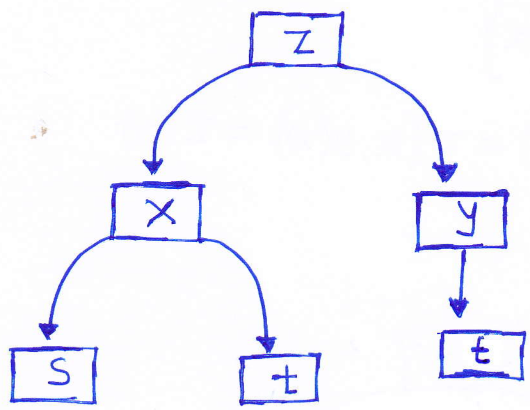
Επαλήθευση: Έχουμε $z(t) = xy = t^2e^t$ τότε

$$\frac{dz}{dt} = 2te^t + t^2\cdot e^t$$

▸ $\left\{ z = x^2 + xy + y \; : \; x = st \, , \; y = t^2 \right\}$

Έχουμε $\quad z = z(x,y) = z\big(x(s,t)\, ,\, y(t)\big) = z(s,t)$

Δέντρο εξάρτησης:



$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \\ &\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y \, , \quad \frac{\partial x}{\partial s} = t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = (2x+y) \cdot t = (2st + t^2)\, t = 2st^2 + t^3$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y \, , \quad \frac{\partial x}{\partial t} = s \\ &\frac{\partial z}{\partial y} = x + 1 \, , \quad \frac{dy}{dt} = 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = (2x+y) \cdot s + (x+1) \cdot 2t =$$

$$= (2st + t^2)\, s + (st + 1) \cdot 2t =$$

$$= 2s^2 t + st^2 + 2st^2 + 2t =$$

$$= 2s^2 t + 3st^2 + 2t$$

Επαλήθευση: Έχουμε $z = z(s,t) = (st)^2 + (st)t^2 + t^2 =$

$$= s^2t^2 + st^3 + t^2$$

οπότε $\dfrac{\partial z}{\partial s} = 2st^2 + t^3$ και $\dfrac{\partial z}{\partial t} = 2s^2t + 3st + 2t$

- $\left\{ z = x^{3/4} y^{1/4} : y = 4 - 3x \right\}$

Έχουμε $z = z(x,y) = z(x, y(x)) = z(x)$

Δέντρο εξάρτησης:

$$\begin{tikzcd} & \boxed{z} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{x} & & \boxed{y} \arrow[d] \\ & & \boxed{x} \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4} \\ \dfrac{dy}{dx} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4} + \frac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4} \cdot (-3) =$$

$$= \frac{3}{4} x^{-1/4} (4-3x)^{1/4} - \frac{3}{4} x^{3/4} (4-3x)^{-3/4}$$

Επαλήθευση: $z(x) = x^{3/4}(4-3x)^{1/4}$

οπότε έχουμε $\frac{dz}{dx} = \frac{3}{4}x^{-1/4}(4-3x)^{1/4} - \frac{3}{4}x^{3/4}(4-3x)^{-3/4}$

Άσκηση 4η: Να επαληθευτούν οι παρακάτω γραμμικές προσεγγίσεις στο $(0,0)$:

Λύση:

▸ $f(x,y) = (1-xy)e^{x+y}$

Είναι • $f_x(x,y) = -ye^{x+y} + (1-xy)e^{x+y}$ τότε

$f_x(0,0) = 1$

• $f_y(x,y) = -xe^{x+y} + (1-xy)e^{x+y}$ τότε

$f_y(0,0) = 1$

οπότε η γραμμική προσέγγιση της f στο $(0,0)$ είναι:

$f(x,y) \approx f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) =$

$= 1 + 1.x + 1.y = 1+x+y$

▸ $f(x,y) = (1+x)^{a}(1+y)^{\beta}$

Είναι • $f_x(x,y) = a(1+x)^{a-1}(1+y)^{\beta}$ τότε

$f_x(0,0) = a$

• $f_y(x,y) = \beta(1+x)^{a}(1+y)^{\beta-1}$ τότε

$f_y(0,0) = \beta$

οπότε η γραμμική προσέγγιση της f στο $(0,0)$ είναι:

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) =$$

$$= 1 + \alpha x + \beta y$$

Άσκηση $5^{η}$: Να χαρακτηριστούν ως προς την $\{x,y\}$-μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x,y)$, στις διάφορες περιοχές του επιπέδου και να γίνουν τα αντίστοιχα γραφήματα των διανυσματικών παραγώγων.

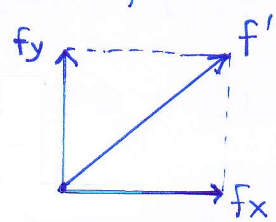
Λύση:

- $f(x,y) = 2x+3y$

  Είναι $f_x = 2>0$ και $f_y = 3>0$

  - αφού $\left.\begin{array}{l} f_x>0 \Rightarrow x\text{-αύξουσα} \\ f_y>0 \Rightarrow y\text{-αύξουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow$ η f είναι γνήσια αύξουσα

  Για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$ η διανυσματική παράγωγος είναι:



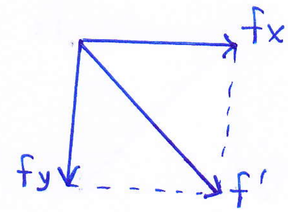
- $f(x,y) = 2x-3y$

  Είναι $f_x = 2>0$ και $f_y = -3<0$

  - αφού $f_x>0 \Rightarrow x$ - αύξουσα

    $f_y<0 \Rightarrow y$ - φθίνουσα

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ η διανυσματική παράγωγος είναι:

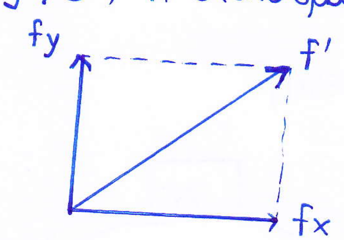


▸ $f(x,y) = x^2 y \quad \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

Είναι $\quad f_x = 2xy \quad$ και $\quad f_y = x^2 \geq 0$

- αφού $\left.\begin{array}{l} f_x = 2xy \geq 0 \Rightarrow x - \text{αύξουσα} \\ f_y = x^2 \geq 0 \Rightarrow y - \text{αύξουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow$ η f είναι αύξουσα

Για κάθε $x > 0$ και $y > 0$, η διανυσματική παράγωγος είναι:



ενώ για κάθε $x \neq 0$ και $y = 0$ έχουμε $f_x = 0,\ f_y > 0$

οπότε η διανυσματική παράγωγος είναι κατακόρυφη.

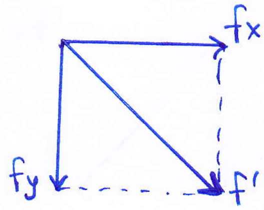
▸ $f(x,y) = x^{1/2} y^{-3/2}$

Είναι $\quad f_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{-3/2} \quad$ και $\quad f_y = -\frac{3}{2} x^{1/2} y^{-5/2}$

- αφού $\quad f_x > 0 \Rightarrow x - \text{αύξουσα}$

$\qquad\qquad f_y < 0 \Rightarrow y - \text{φθίνουσα}$

οπότε για κάθε $x>0, y>0$ η διανυσματική παράγωγος είναι:



Άσκηση 6η: Να διατυπωθούν οι τύποι αλυσωτής παραγώγισης για τις παρακάτω συνθέσεις, χρησιμοποιώντας

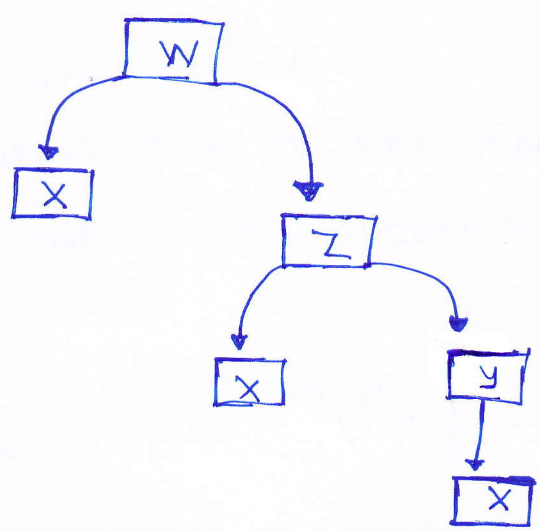
α) τα δέντρα σύνθεσης

β) διαφορικά

Λύση:

$$\left\{ w = w(x,z) \,,\ z = z(x,y) \,,\ y = y(x) \right\}$$

ⓐ Δέντρο Σύνθεσης

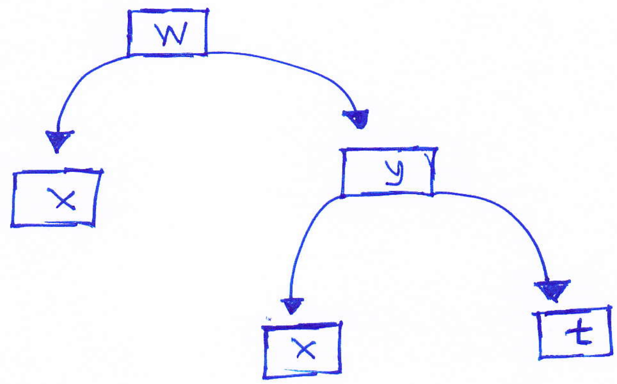


ⓑ Διαφορικά

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{z} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y,z} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{x,y} \left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x} \cdot \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\left\{ w = w(x,y), \quad y = y(x,t) \right\}$$

(α) Δέντρο Σύνθεσης



(β) Διαφορικά

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y,t} + \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x,t} \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{t}$$