Συναρτήσεις-Εξισώσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1η: Να γίνουν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων, χωρίς ειδική μελέτη.

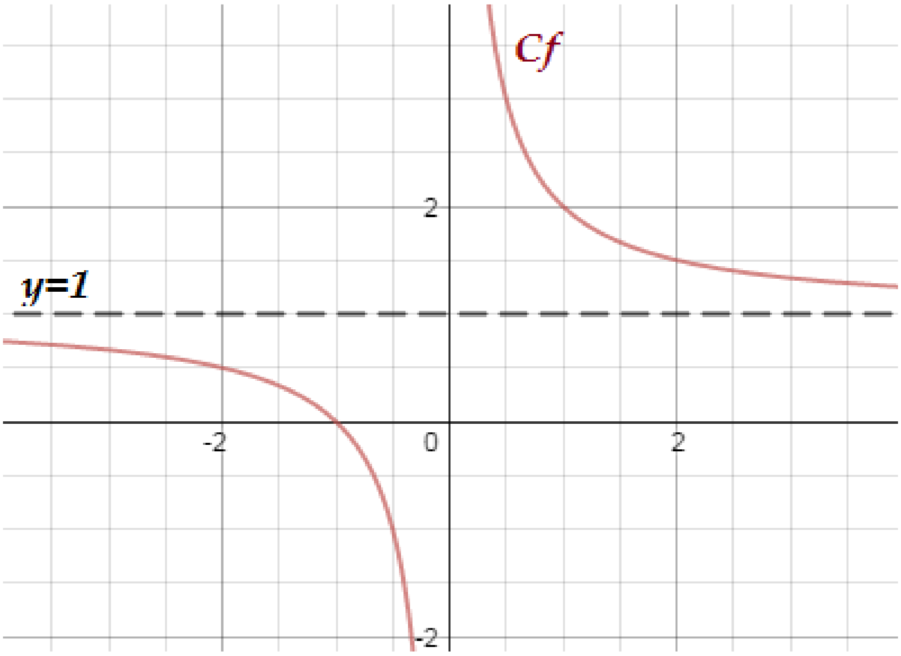
Λύση:

- $f(x)=\dfrac{x+1}{x},\ x\in R^*$

Για κάθε x≠0, έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x},\ x\in R^*$$

(Η y=1 είναι η βοηθητική μας συνάρτηση)



- $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+1}{x},\ x\in R^*$

Για κάθε x≠0, έχουμε:

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+1}{x}=\frac{2x^3}{x}-\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=2x^2-x+\frac{1}{x},\ x\in R^*$$

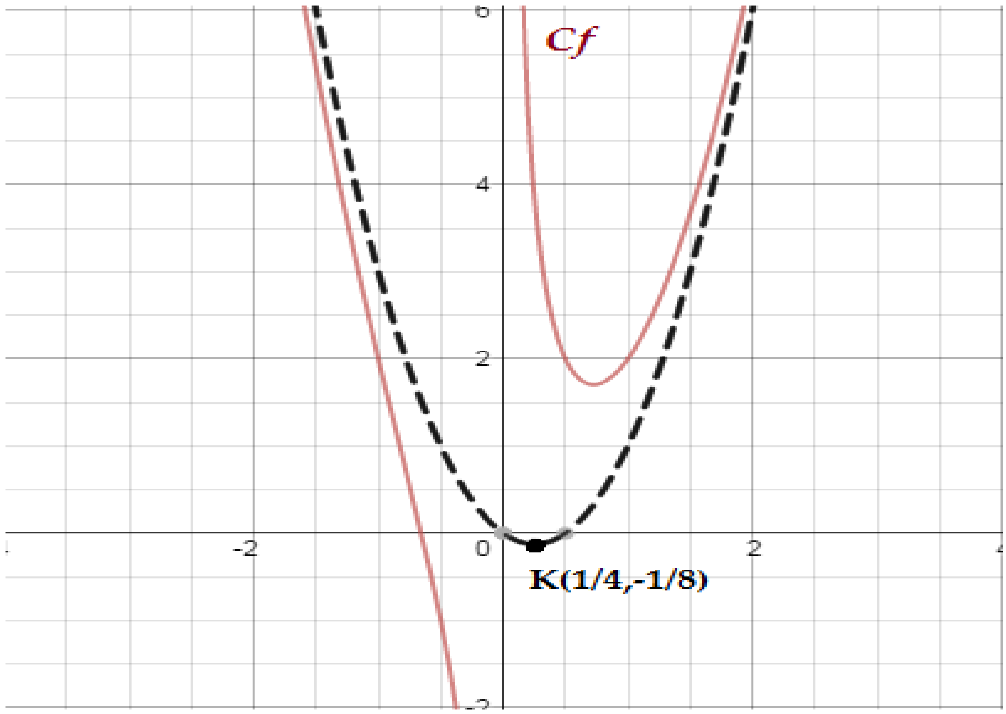
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση τριώνυμο $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq0$ και $x\in R$ έχει :

- Για α>0, ελάχιστο το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha})$
- Για α<0,μέγιοστο το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha})$

(Η $2x^2-x$ η βοηθητική μας συνάρτηση)

Οπότε $g(x)=2x^2-x$, $x\in R$ με α=2, β=1, γ=0 και Δ=1 > 0, άρα η g παρουσιάζει στη θέση $x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{1}{4}$ ελάχιστο το $g\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$

Επομένως η γραφική παράσταση της C_f είναι :



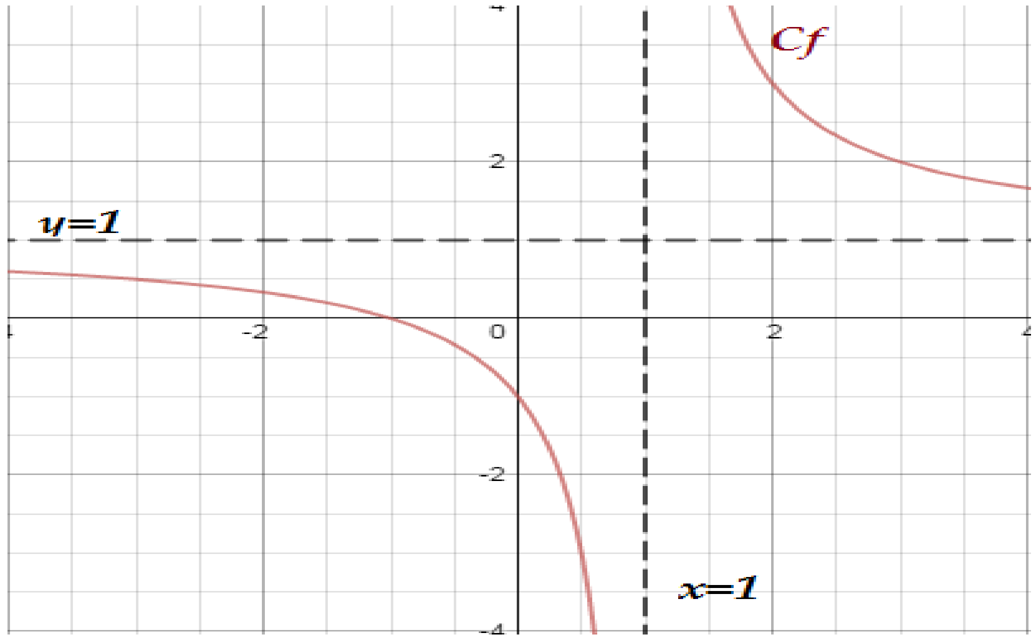
- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$

Για κάθε $x\neq1$, έχουμε:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},\ x\in R-\{1\}$$

(Η y=1 είναι η βοηθητική μας συνάρτηση)

οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης της f είναι:



- $$f(x)=\frac{2x^3-x^2+1}{x-1},\ x\in R-\{1\}$$

Αρχικά, κάνουμε τη διαίρεση του $2x^3-x^2+1$ με το $(x-1)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x^3+2x^2 & 2x^2+x+1 \\ \cline{1-1} x^2+1 & \\ -x^2+x & \\ \cline{1-1} x+1 & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

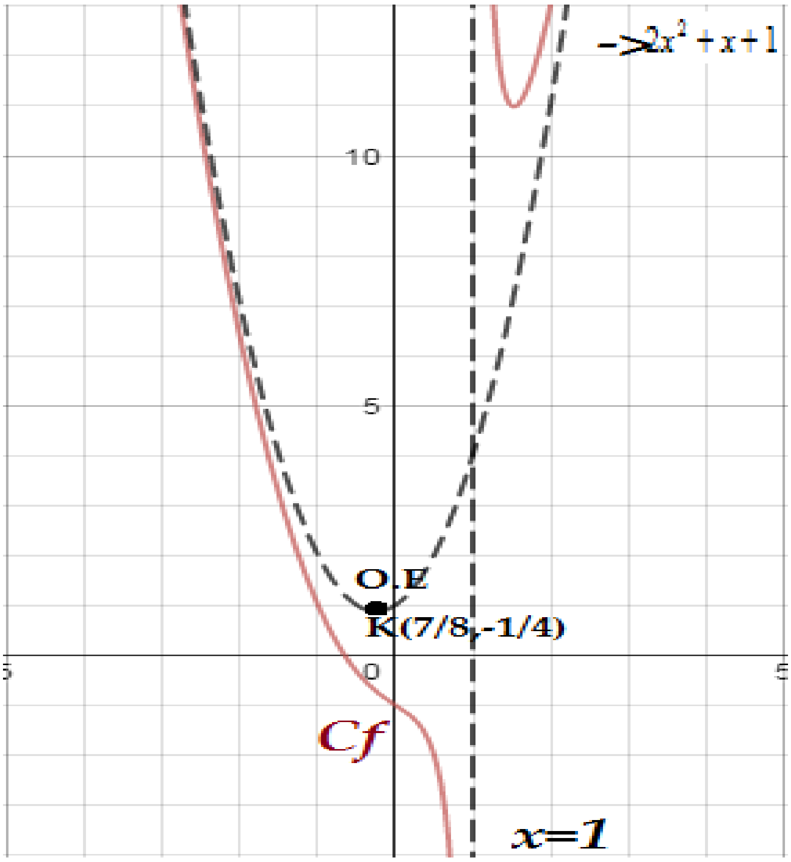
Άρα $2x^3-x^2+1=(x-1)(2x^2+x+1)+2$

Επομένως, για κάθε $x\neq 1$, έχουμε:

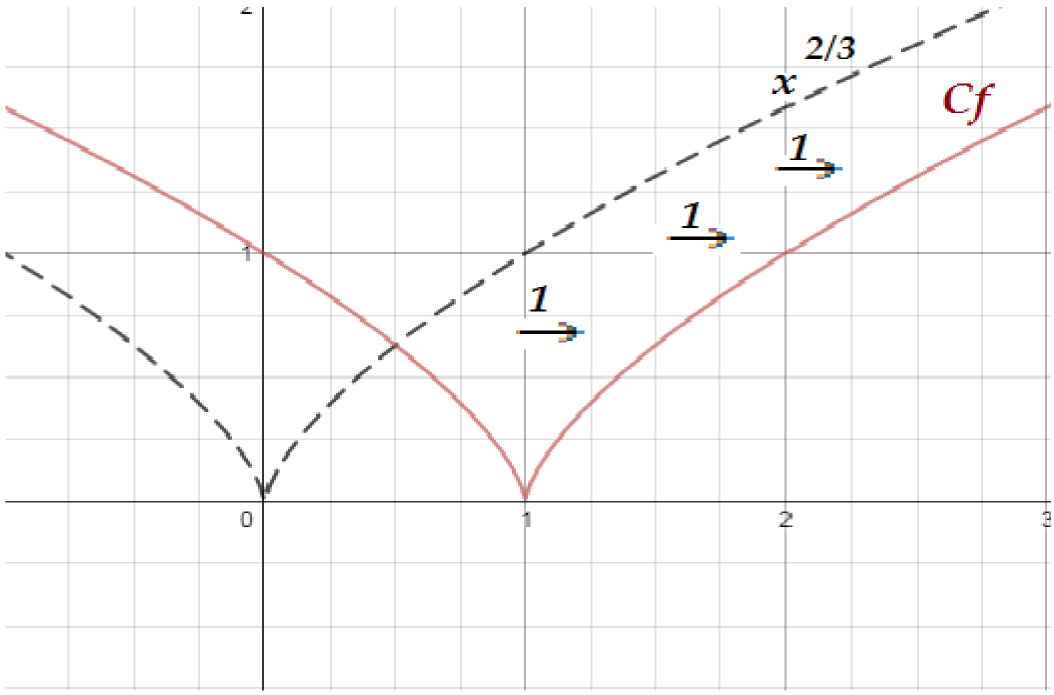
$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+1}{x-1}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)+2}{x-1}=2x^2+x+1+\frac{2}{x-1},\ x\neq 1$$

(Η $g(x)=2x^2+x+1$ είναι η βοηθητική μας συνάρτηση)

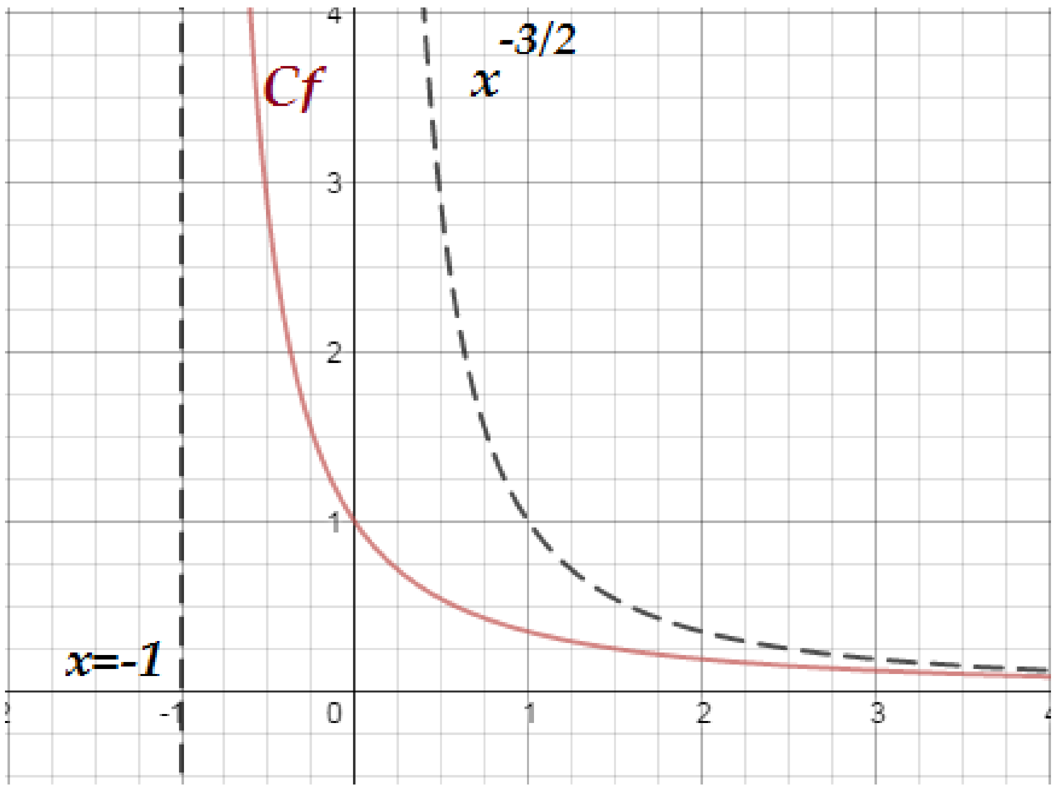
Η $g(x)=2x^2+x+1$ παρουσιάζει στη θέση $x_o=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{1}{4}$ ελάχιστο, το $g\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=g\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$.



- $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}},\ x\in R$



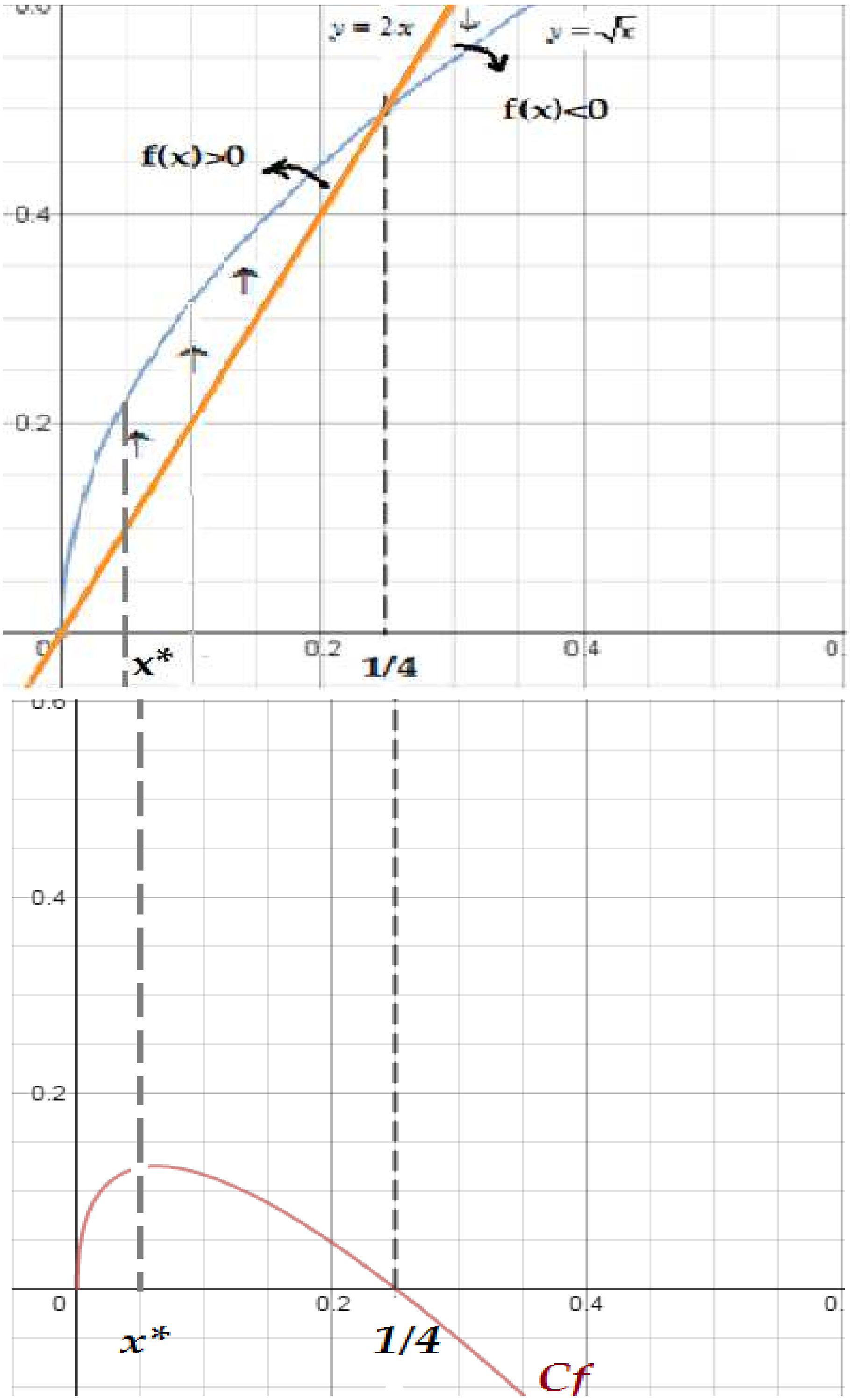
- $f(x) = (x+1)^{-\frac{2}{3}},\ x \in (-1, +\infty)$



- $f(x)=\sqrt{x}-2x,\ x\in[0,+\infty)$

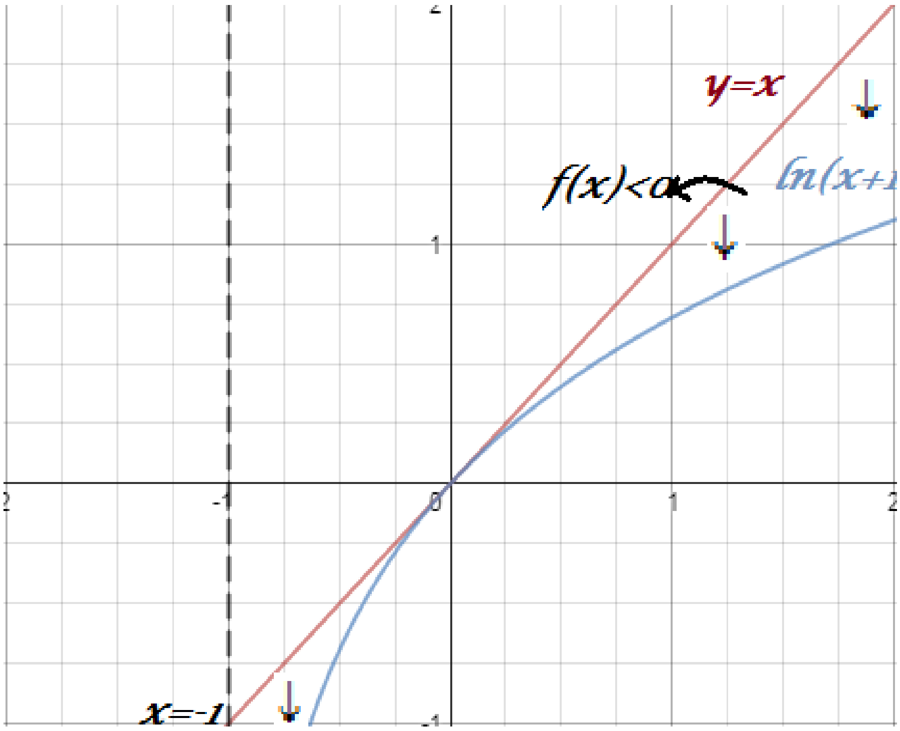
$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2x \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-x=0 \Leftrightarrow x(4x-1)=0 \Leftrightarrow$

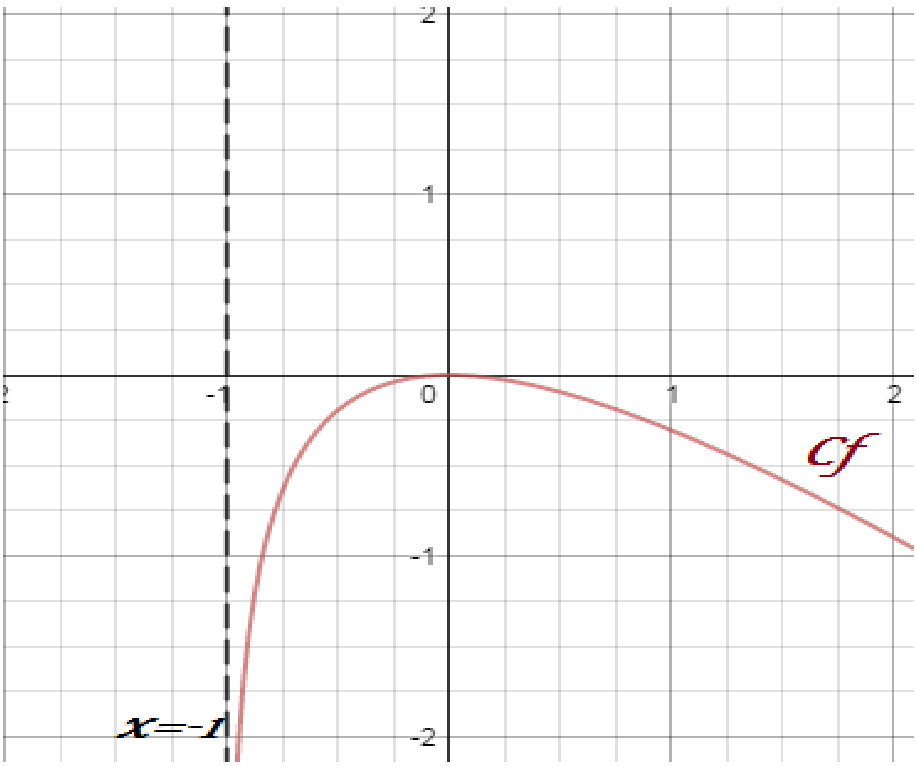
$x=0$ ή $x=\dfrac{1}{4}$



-

- $f(x) = \ln(x+1) - x,\ x \in (-1, +\infty)$





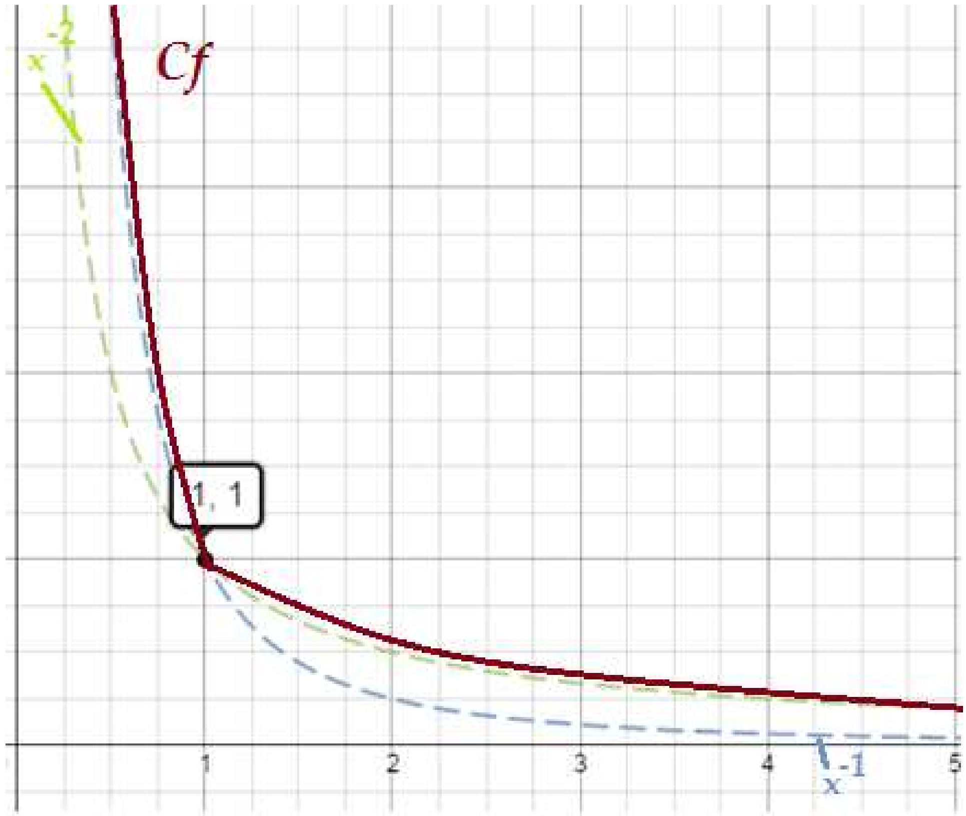
αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}(\ln(x+1)-x)\overset{(-\infty)-(-1)}{=}-\infty$ και

$$\lim_{x\to +\infty}(\ln(x+1)-x)=\lim_{x\to +\infty}x\left(\frac{\ln(x+1)}{x}-1\right)\underset{(*)}{\overset{(+\infty)(0-1)}{=}}-\infty$$

(*) επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{DLH}{\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}=0$

- $f(x)=\min\{x^{-1},x^{-2}\}$, $x\in(0,+\infty)$
  - $x^{-1}\geq x^{-2}\Leftrightarrow \frac{1}{x}\geq\frac{1}{x^2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\geq 1$
  - $x^{-1}\leq x^{-2}\Leftrightarrow \frac{1}{x}\leq\frac{1}{x^2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0<x\leq 1$

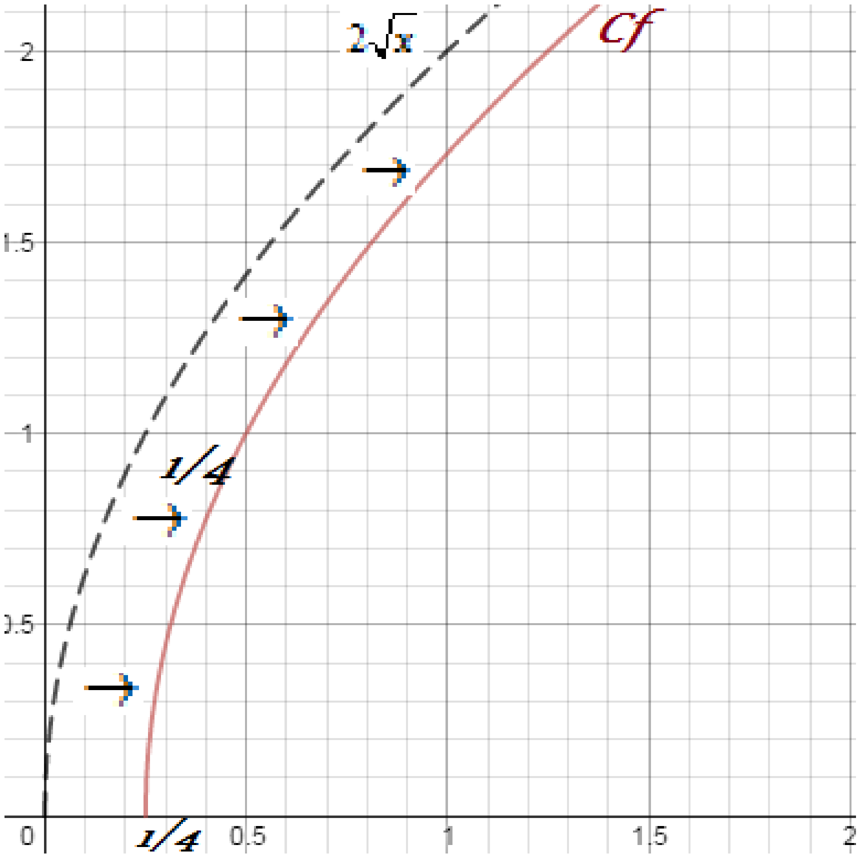
οπότε $f(x)=\begin{cases} x^{-1}, αν\ 0<x\leq 1 \\ x^{-2},\ αν\ x\geq 1\end{cases}$



- $f(x)=\sqrt{4x-1}$, $x \in \left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

Για κάθε $x \geq \frac{1}{4}$, έχουμε :

$$f(x)=\sqrt{4x-1}=4\sqrt{x-\frac{1}{4}}$$

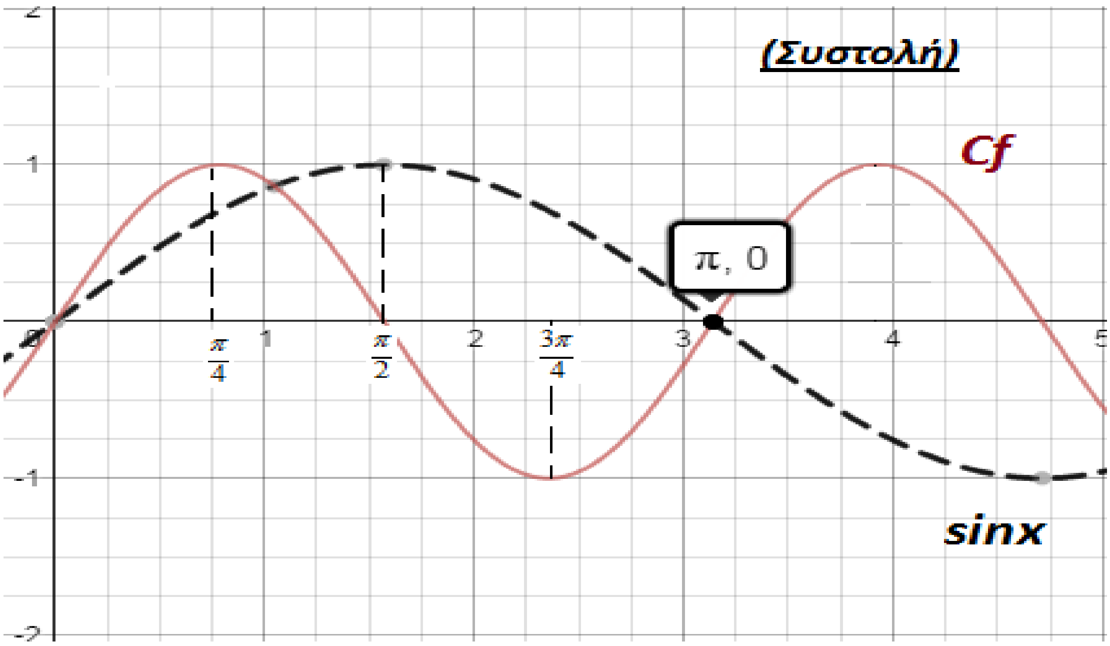


- f(x)=sin2x, x∈R

> <u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Αν $f(x)=\sin(\omega x)$ ή $g(x)=\cos(\omega x)$ τότε η περίοδος είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Περίοδος : $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

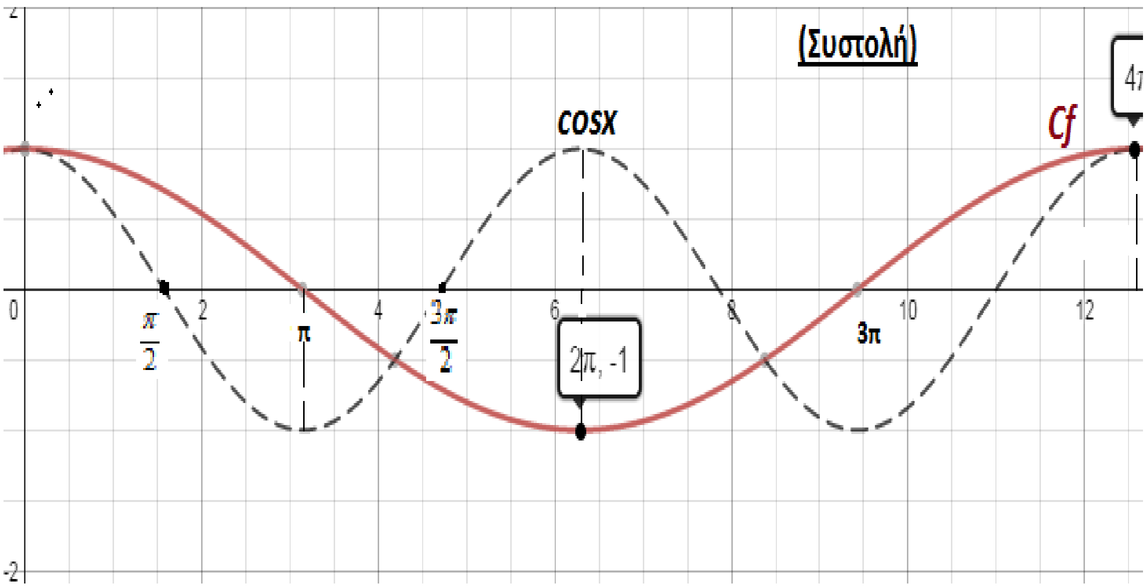
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin2x	0	1	0	-1	0



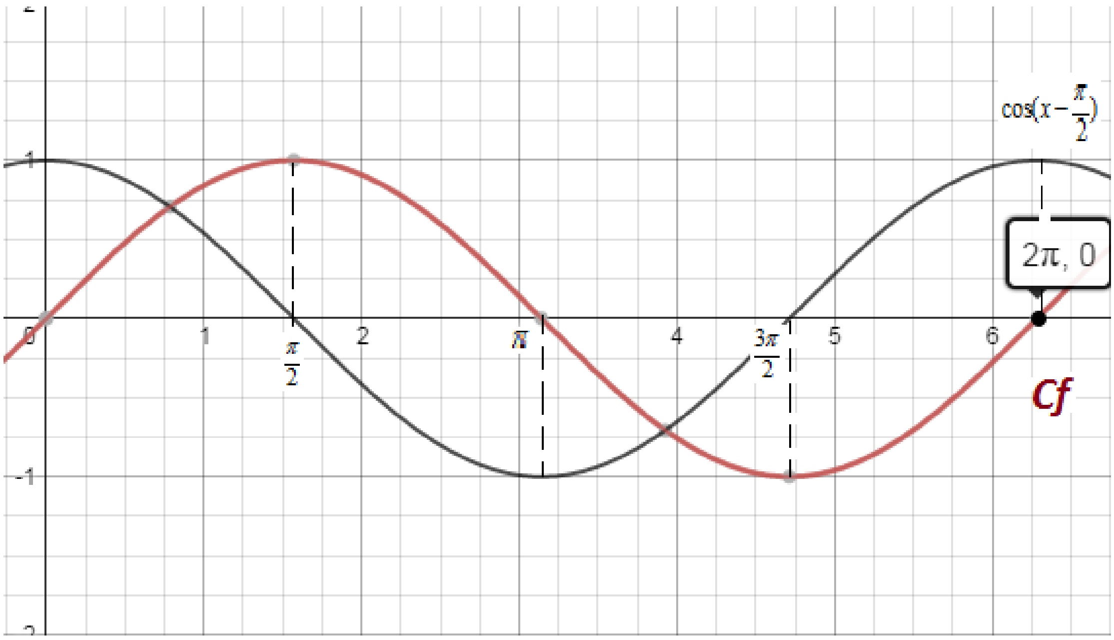
- $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in R$

Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

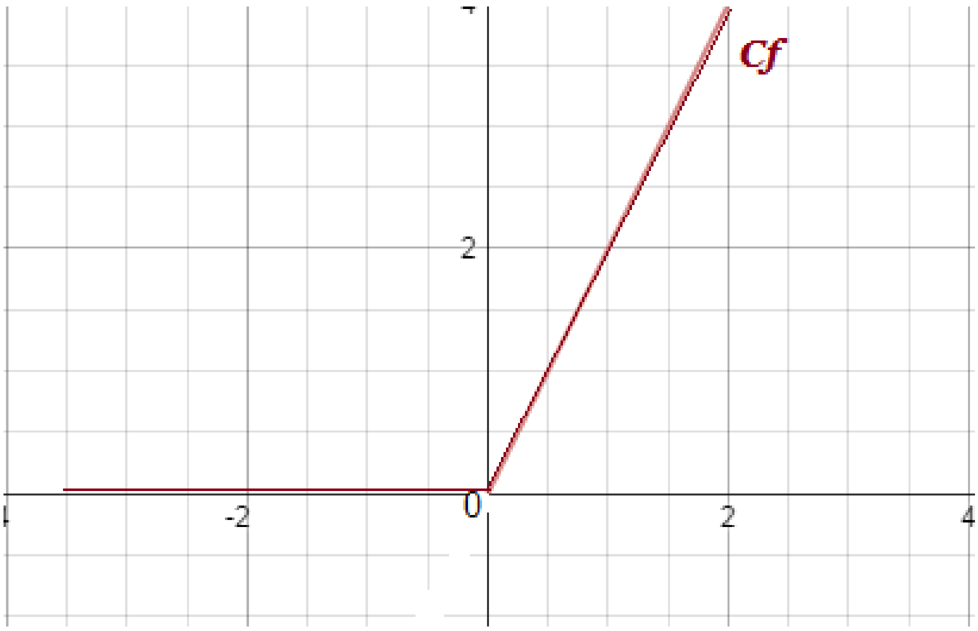
x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Cos($\frac{x}{2}$)	1	0	-1	0	1



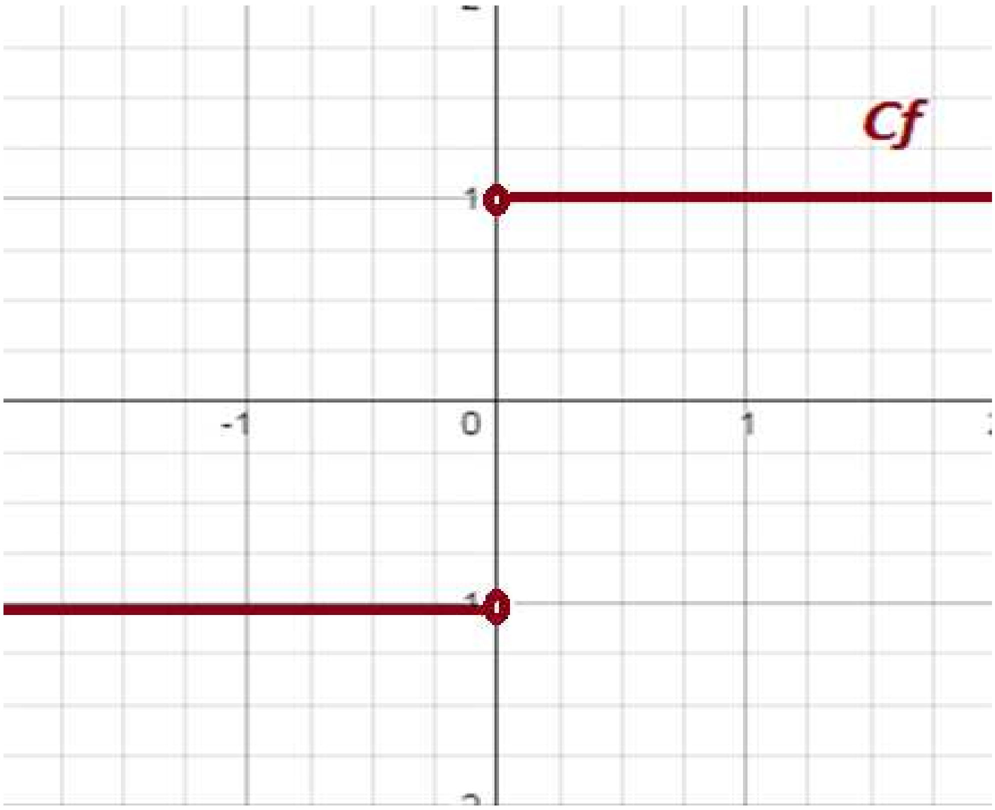
- $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\ x\in R$

- 

- $f(x)=x+|x|=\begin{cases}0, & \alpha\nu \quad x<0\\ 2x, & \alpha\nu \quad x\geq 0\end{cases}$



- $f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}-1, & \alpha\nu \quad x<0\\ 1, & \alpha\nu \quad x\geq 0\end{cases}$



Άσκηση $2^η$: Να βρεθούν οι θετικές λύσεις (x,y) των παρακάτω εξισώσεων και συστημάτων, όπου οι παράμετροι (α,β) είναι θετικές.

Λύση:

- $2x^{-\frac{2}{3}}-1=0 \Leftrightarrow x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$
- $\alpha x^{\alpha-1}-\beta=0 \Leftrightarrow x^{\alpha-1}=\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$
- $\begin{cases} x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-\alpha=0 \\ x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}=\alpha \\ x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{4}}=\beta \end{cases} \overset{\lambda o\gamma\alpha\rho\upsilon\theta\mu\acute{\iota}\zeta\omega}{\Rightarrow} \begin{cases} -\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{4}\ln y=\ln\alpha \\ \frac{3}{4}\ln x-\frac{1}{4}\ln y=\ln\beta \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\ln x=\ln\alpha+\ln\beta \\ -\ln x+\ln y=4\ln\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=2(\ln\alpha+\ln\beta) \\ -2(\ln\alpha+\ln\beta)+\ln y=4\ln\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln x=2\ln\alpha\beta \\ \ln y=6\ln\alpha+2\ln\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=\ln(\alpha\beta)^2 \\ \ln y=\ln(\alpha^6\beta^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(\alpha\beta)^2 \\ y=\alpha^6\beta^2 \end{cases}$$

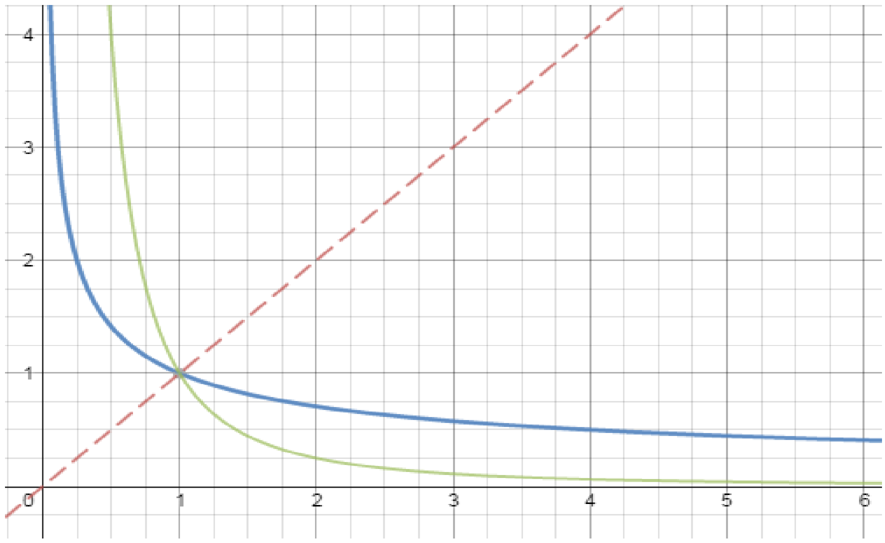
Άσκηση $3^η$: Να βρεθεί η αντίστροφη $f^{-1}(x)$ της συνάρτησης $f(x)=x^{-2}$ στο θετικό διάστημα και να γίνουν τα γραφήματά τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Να γίνει το ίδιο και για την $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Λύση:

$f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$

Έχουμε $y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} x^2=\frac{1}{y} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{\frac{1}{y}} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} x(y)=\frac{\sqrt{y}}{y}=y^{-\frac{1}{2}}$, y>0

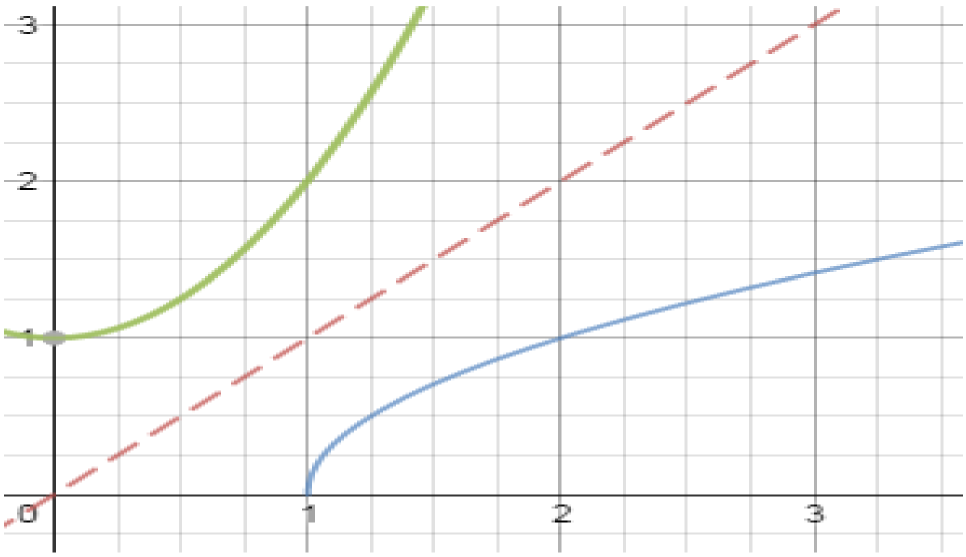
δηλαδή $f^{-1}(x)=x^{-\frac{1}{2}}$, $x>0$



- f(x)=$\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$

  Έχουμε y=f(x) $\Leftrightarrow$ y=$\sqrt{x-1} \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}$ y^2=x–1 $\Leftrightarrow$ x=y^2+1 $\Leftrightarrow$ x(y)=y^2+1, y≥0

  $f^{-1}(x)=x^2+1$, $x \geq 0$



Άσκηση 4^η: Να βρεθούν τα γραφήματα των παρακάτω παραστάσεων:

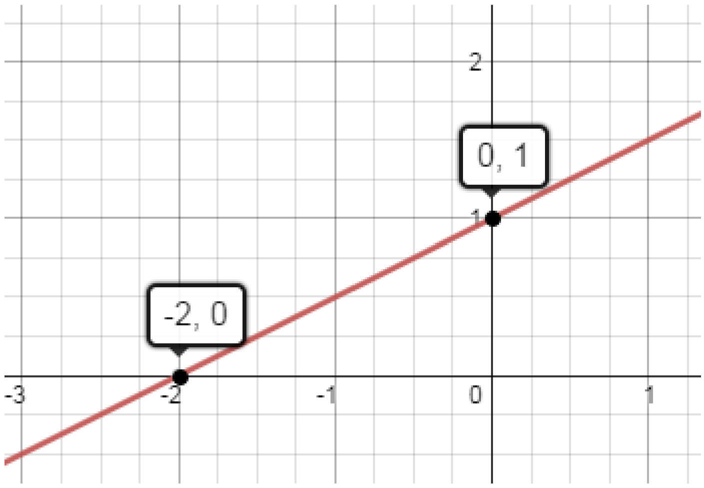
Λύση:

- 2x+3y=8 (γραμμική εξίσωση)

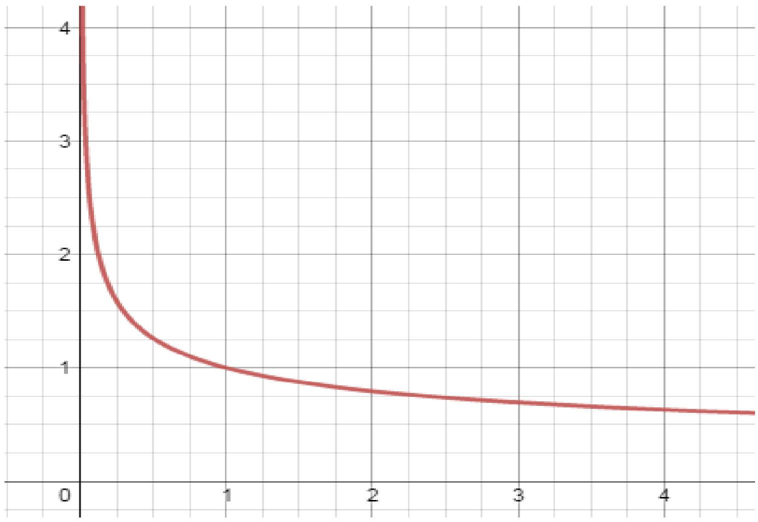
x	0	4
y	8/3	0

- $-2x+4y=4$ (γραμμική εξίσωση)

x	0	-2
y	1	0

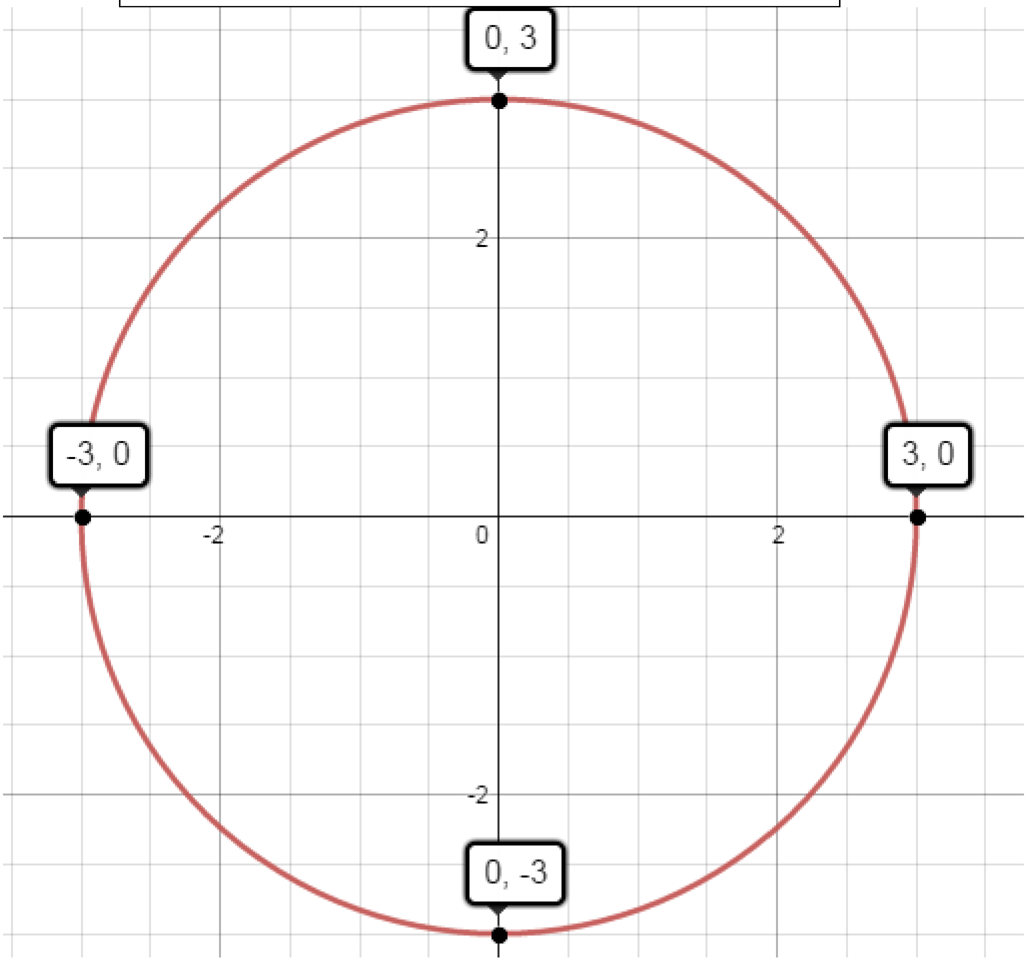


- $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}=1 \overset{x>,\,y>0}{\Leftrightarrow} y^{\frac{3}{4}}=x^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow y=x^{-\frac{1}{3}}$

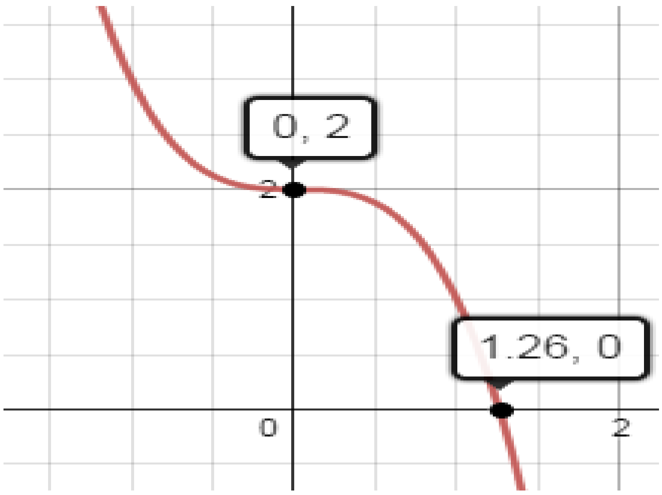


- $(x^2+y^2)^{1/2}=3 \Leftrightarrow x^2+y^2=9$ (κυκλος με κεντρο την αρχη των αξονων και ακτινα ρ=3)

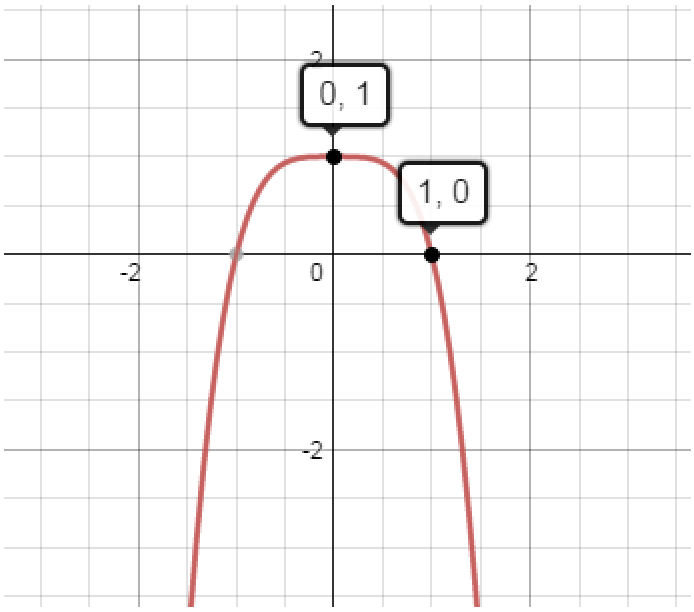
Σημειωση:Γνωριζουμε ότι η εξισωση του κυκλου με κεντρο $K(x_0,y_o)$ και ακτινας ρ είναι: (C) : $(x-x_0)^2 + (y-y_o)^2=\rho^2$



- $x^3+y=2 \Leftrightarrow y=2-x^3$, $x\in R$



- $x^4+y=1 \Leftrightarrow y=1-x^4$, $x \in R$



Άσκηση 5η: Να γίνουν τα γραφήματα των παρακάτω ανισοτήτων στη θετική περιοχή και να διερευνηθεί αν οι περιοχές είναι κυρτές.

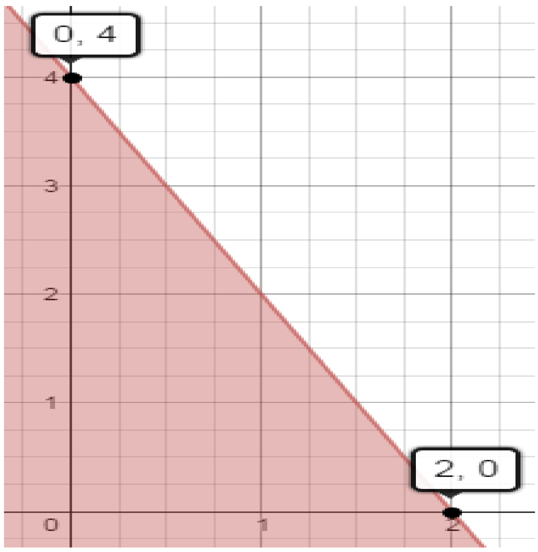
Λύση:

- $2x+y \leq 4$

  Αρχικά σχεδιάζουμε την $2x+y=4$

x	0	2
y	4	0

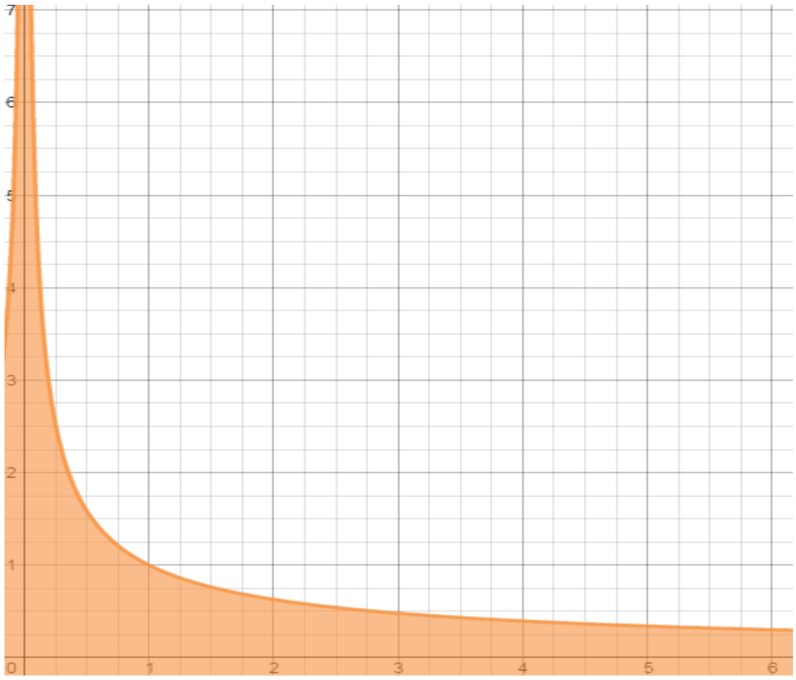
Κάθε γραμμική ανισότητα είναι κλειστή κυρτή περιοχή



- $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} \leq 1$

  Αρχικά σχεδιάζουμε την εξίσωση $X^{1/2}y^{3/4}=1$. Έχουμε $x^{1/2}y^{3/4}=1 \Leftrightarrow y=x^{-2/3}$

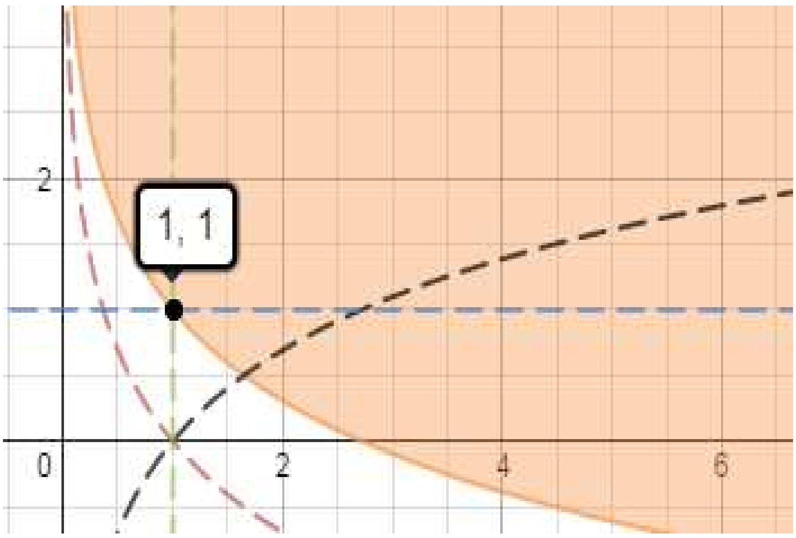
  (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση)



$x^{1/2}y^{3/4} \leq 1$, μη κυρτή περιοχή και $x^{1/2}y^{3/4} \geq 1$, κυρτή περιοχή

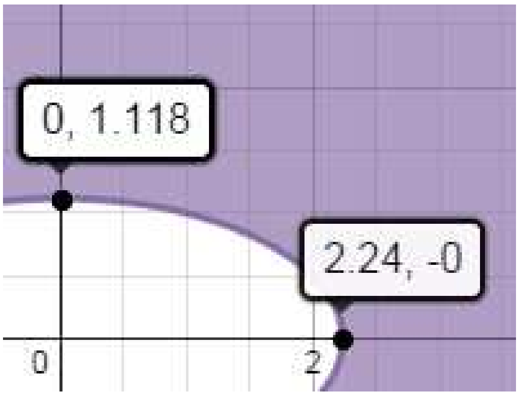
- $y+\ln x \geq 1$

  Αρχικά σχεδιάζουμε την εξίσωση $y+\ln x=1 \Leftrightarrow y=1-\ln x,\ x>0$



- $x^2+4y^2 \geq 5$

Αρχικά σχεδιάζουμε την εξίσωση $x^2+4y^2=5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5}^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=1$, (έλλειψη)



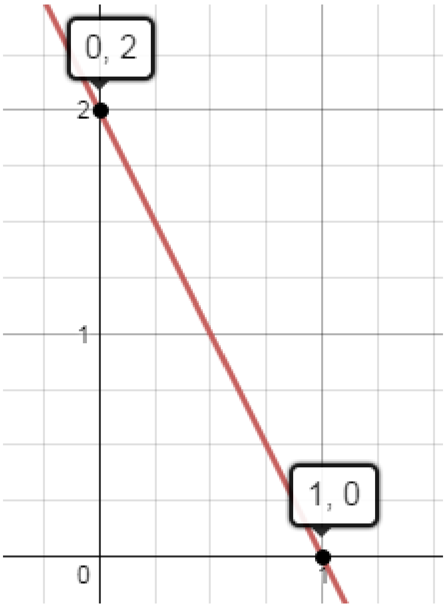
Άσκηση 6η: Να βρεθούν τα γραφήματα των τροχιών:

Λύση:

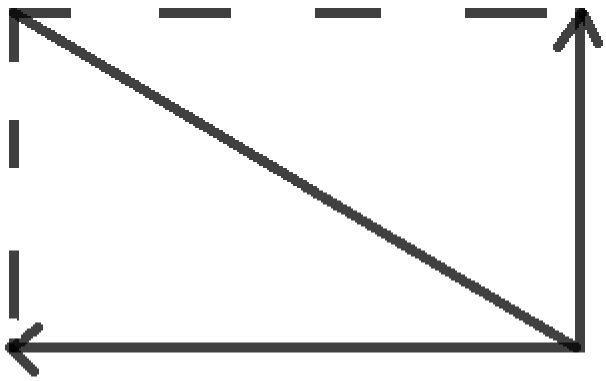
- $\{x = 1 - 2t\,, y = 4t\}$

Έχουμε $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1-x \\ y = 4t \end{cases} \Leftrightarrow y = 4\frac{1-x}{2} \Leftrightarrow y = 2-2x$

Γράφημα τροχιάς:



Καθώς το t αυξάνεται, το x μειώνεται και το y αυξάνεται.

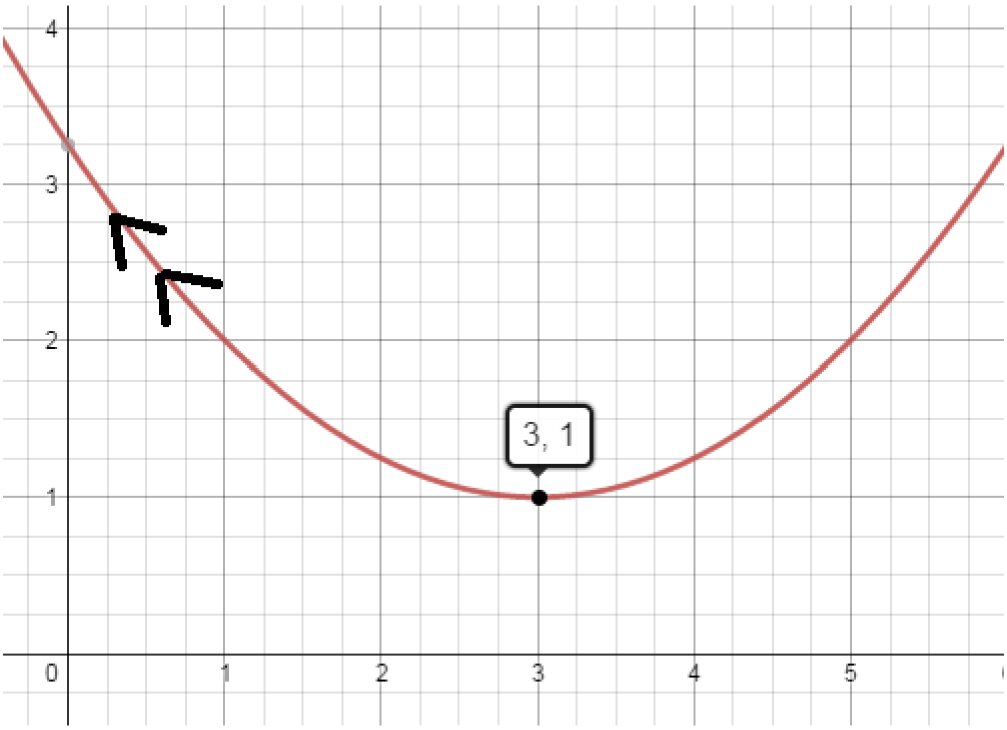


- $\{x=3–2t , y=t^2+1\}$

  Έχουμε

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=t^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=3-x \\ y=t^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{3-x}{2} \\ y=t^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow y=\left(\dfrac{3-x}{2}\right)^2+1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}(x-3)^2+1$$

  Γράφημα τροχιάς:



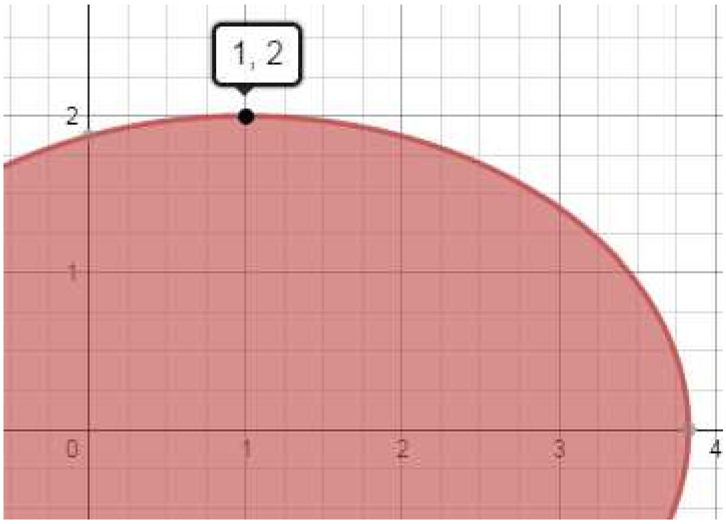
  καθώς το t αυξάνεται, το x μειώνεται και το y αυξάνεται.

Άσκηση 7^η: Να γίνουν τα γραφήματα των $x^2+2y^2–2x=7$, $x^2+2y^2–x \le 7$.

Λύση:

Αρχικά σχεδιάζουμε την εξίσωση $x^2+2y^2–2x=7 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+2y^2=8 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+2y^2=8 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ (έλλειψη)

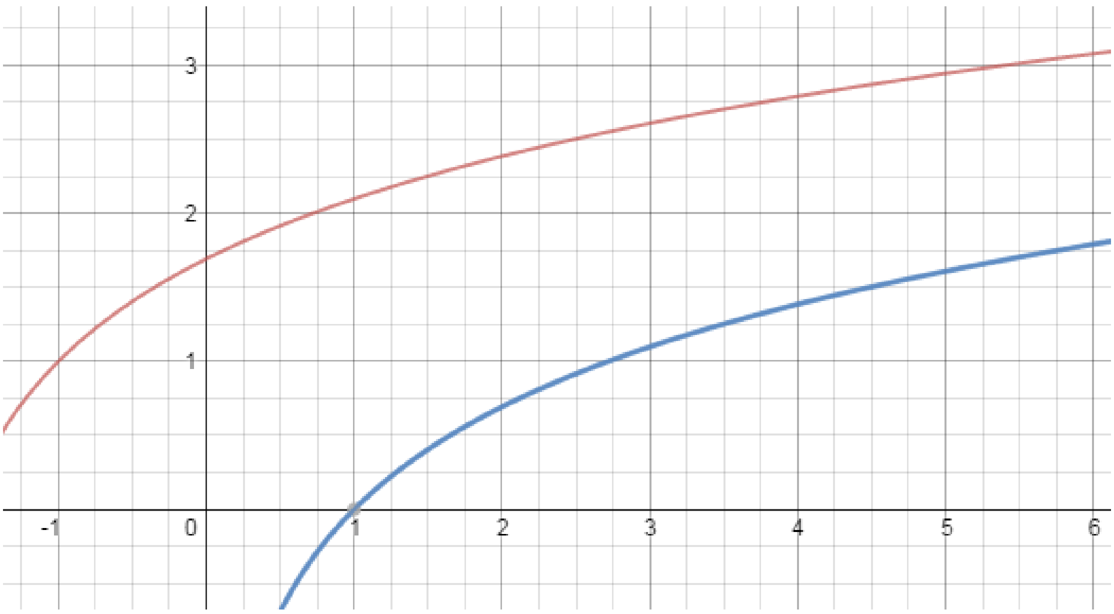


Κυρτή περιοχή

Άσκηση 8η: Για το καθένα απ τα παρακάτω ζεύγη εξισώσεων να γίνουν τα γραφήματα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιώντας μετατοπίσεις. Σε κάθε περίπτωση , να βρεθούν οι τομές με τους άξονες.

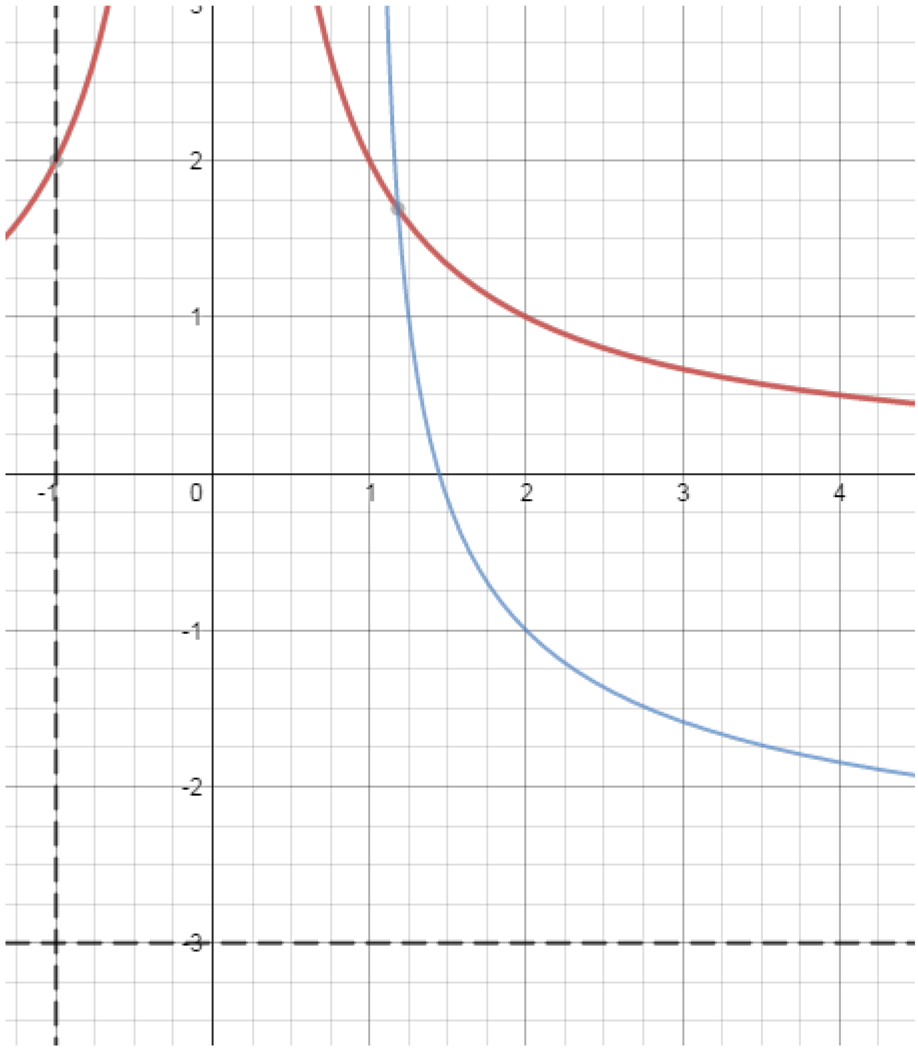
Λύση:

- $\{y-\ln x=0 , y-1=\ln(x+2)\}$



Η εξίσωση $y=\ln x$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β(1,0) και δεν τέμνει τον άξονα y'y. Η εξίσωση $y=\ln(x+2)+1$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Γ(1/e–2,0) αφού $y=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=-1 \Leftrightarrow x+2=e^{-1} \Leftrightarrow x=1/2-2$ και τον άξονα y'y στο σημείο $\Delta(0,\ln 2+1)$

- $\{xy^2=4,\ (x-1)(y+3)^2=4\}$



Η εξίσωση $xy^2=4$ δε τέμνει τους άξονες , αφού x και y διάφορο του 0. Η εξίσωση $(x-1)(y+3)^2=4$ τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο Α(13/9,0) αφού για y=0 έχουμε $(x-1)(0+3)^2=4 \Leftrightarrow x-1=4/9 \Leftrightarrow x=13/9$ και δεν τέμνει τον άξονα y'y , αφού για x=0 έχουμε$(-1)(y+3)^2=4 \Leftrightarrow (y+3)^2=-4$, αδύνατη.