Δεύτερη Παράγωγος
Κυρτότητα

2014-2015

Άσκηση 1η: Να διαπιστωθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές στο θετικό διάστημα: $x \geq 0$, και να γίνουν τα γραφήματα. Σε κάθε περίπτωση να εξεταστεί αν είναι μονότονες ή έχουν δύο μονότονα τμήματα.

Λύση:

- $f(x) = 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2, \ x \geq 0$

  $f'(x) = 2x - 2, \ x \geq 0$

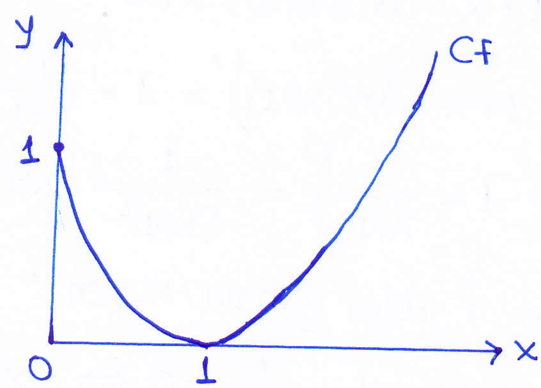
  $f''(x) = 2 > 0, \ \forall x \geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κυρτή.

  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
  - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
  - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

  οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

- Γράφημα:



- $f(x) = 1+x-2\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2, \ x \geq 0$

$f'(x) = \left(1+x-2x^{1/2}\right)' = 1 - 2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = 1 - x^{-1/2}, \ x>0$

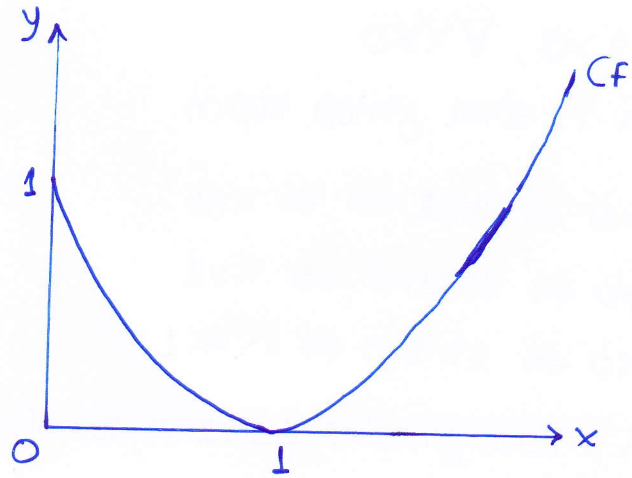
$f''(x) = \left(1-x^{-1/2}\right)' = -\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = \frac{1}{2}x^{-3/2} > 0, \ \forall x>0$

οπότε η f είναι γνήσια κυρτή.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^{-1/2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow$
  $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^{-1/2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

- Γράφημα:



- $f(x) = 1+x-\ln(x+1), \ x \geq 0$

$f'(x) = \left(1+x-\ln(x+1)\right)' = 1 - \frac{1}{x+1}(x+1)' = 1 - \frac{1}{x+1}, \ x \geq 0$

$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}\cdot(x+1)' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \ \forall x \geq 0$

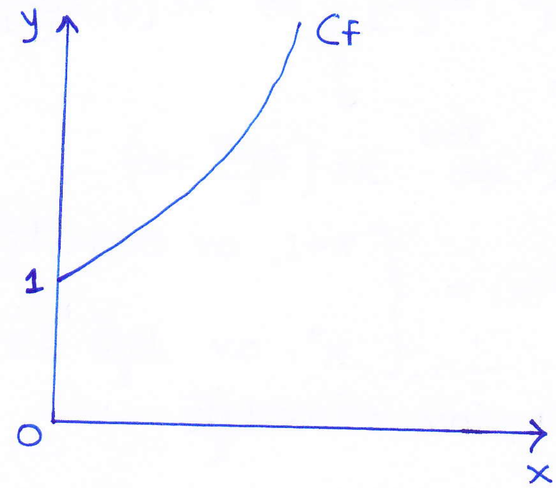
οπότε η f είναι γνήσια κυρτή.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x+1-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x+1} > 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x+1-1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ (απορρίπτεται)

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- Γράφημα:



- $f(x) = (x+1)^{-1} = \dfrac{1}{x+1}, \ x \geq 0$

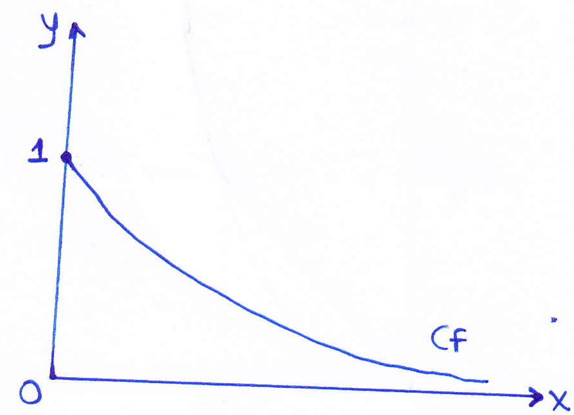
$f'(x) = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)' = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \cdot (x+1)' = -\dfrac{1}{(x+1)^2}, x \geq 0$

$f''(x) = \left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)' = \dfrac{1}{(x+1)^4} \cdot \left((x+1)^2\right)' = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{2}{(x+1)^3} > 0, \ \forall x \geq 0$

οπότε η f είναι γνήσια κυρτή.

- Επειδή $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0, \ \forall x \geq 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

- Γράφημα:



▸ $f(x)=\max\{1+x,\ x^2\}\ ,\ x\geq 0$

• $x+1\geq x^2 \Leftrightarrow x^2-x-1\leq 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{\begin{array}{l}\Delta=5\\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}}$

$$\left.\begin{array}{l} x\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ x\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow x\in\left[0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

• $x+1\leq x^2 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x\in\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$

οπότε
$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{αν } 0\leq x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x^2, & \text{αν } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq x<\infty \end{cases}$$

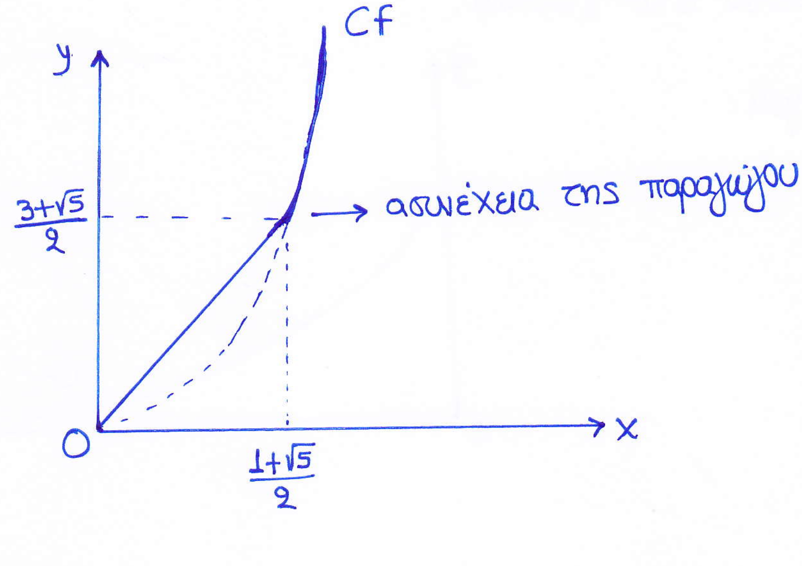
$$f'(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } 0\leq x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 2x, & \text{αν } x>\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } 0\leq x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 2, & \text{αν } x>\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

οπότε η f είναι κυρτή.

Επειδή $f'(x)>0,\ \forall x\in\left[0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ και $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

Γράφημα:



Άσκηση 2η: Να διαπιστωθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κοίλες στο θετικό διάστημα: $x \geq 0$ και να γίνουν τα γραφήματα. Σε κάθε περίπτωση να εξεταστεί αν είναι μονότονες ή έχουν δύο μονότονα τμήματα.

Λύση:

- $f(x) = x^{2/3} - 2x, \ x \geq 0$

$$f'(x) = \left(x^{2/3} - 2x\right)' = \frac{2}{3} x^{-1/3} - 2, \ x > 0$$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{3} x^{-1/3} - 2\right)' = -\frac{2}{9} x^{-4/3} < 0, \ \forall x > 0$$

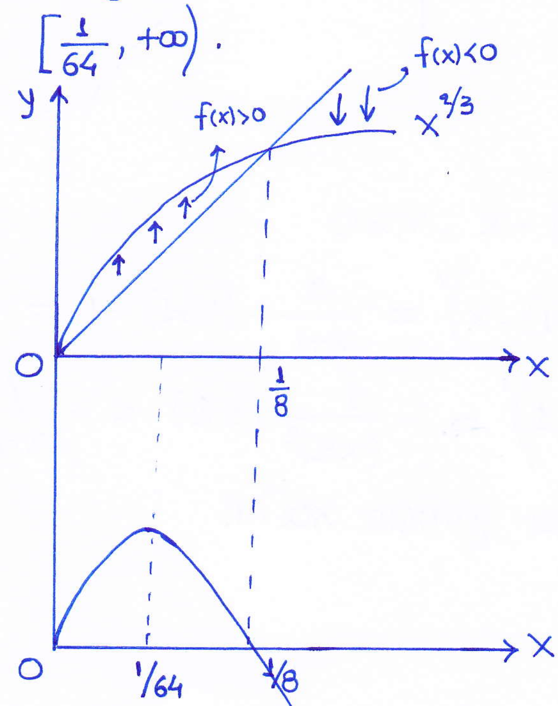
οπότε η f είναι γνήσια κοίλη

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^{-1/3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$
  $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^{-1/3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 4 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$
  $\sqrt[3]{x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{64}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{64}$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{1}{64}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{64}, +\infty\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2/3} - 2x = 0 \Leftrightarrow \\ x^{2/3}\left(1 - 2\sqrt[3]{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ x = 0 \ \text{ή} \ x = \frac{1}{8} \end{array}}$$

- Γράφημα:



- $f(x) = \ln(x+1) - 2x \, , \quad x \geq 0$

$$f'(x) = \left(\ln(x+1) - 2x\right)' = \frac{1}{x+1}(x+1)' - 2 = \frac{1}{x+1} - 2 \, , \; x \geq 0$$

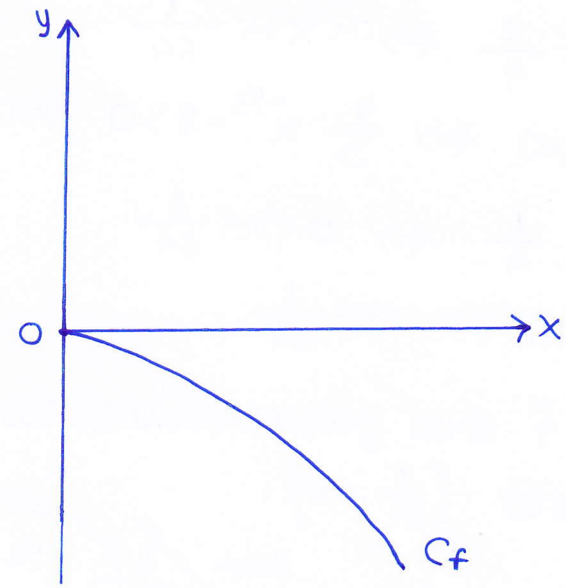
$$f''(x) = \left(\frac{1}{x+1} - 2\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}(x+1)' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \; \forall x \geq 0$$

οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 2 = 0 \quad 1 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (απορ.)
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 2 > 0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} 1 - 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ (απορ.)
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

- Γράφημα:



- $f(x) = 2\ln(x+1) - x \, , \quad x \geq 0$

$$f'(x) = \left(2\ln(x+1) - x\right)' = \frac{2}{x+1}(x+1)' - 1 = \frac{2}{x+1} - 1 \, , \; \forall x \geq 0$$

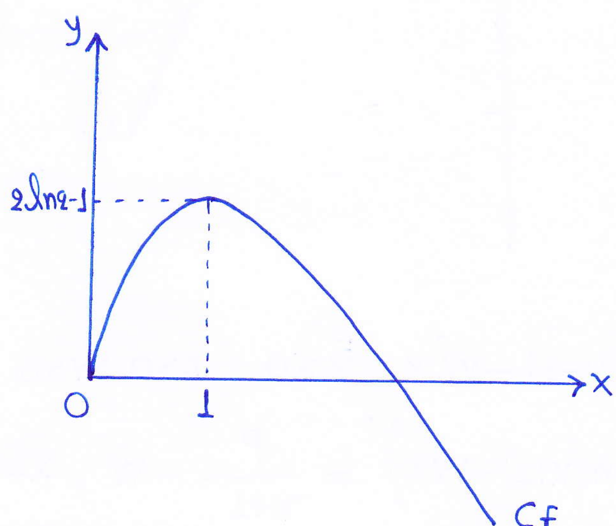
$$f''(x) = \left(\frac{2}{x+1} - 1\right)' = -\frac{2}{(x+1)^2}(x+1)' = -\frac{2}{(x+1)^2} < 0, \; \forall x \geq 0$$

οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}-1=0 \Leftrightarrow 2-x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}-1>0 \Leftrightarrow 2-x-1>0 \Leftrightarrow 0\leq x<1$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

- Γράφημα:



- $f(x)=px^{a}-wx^{\beta}$, $p>0, w>0$, $0<a<1$, $\beta\geq 1$, $x\geq 0$

$f'(x)=\left(px^{a}-wx^{\beta}\right)'=apx^{a-1}-w\beta x^{\beta-1}$, $x\geq 0$

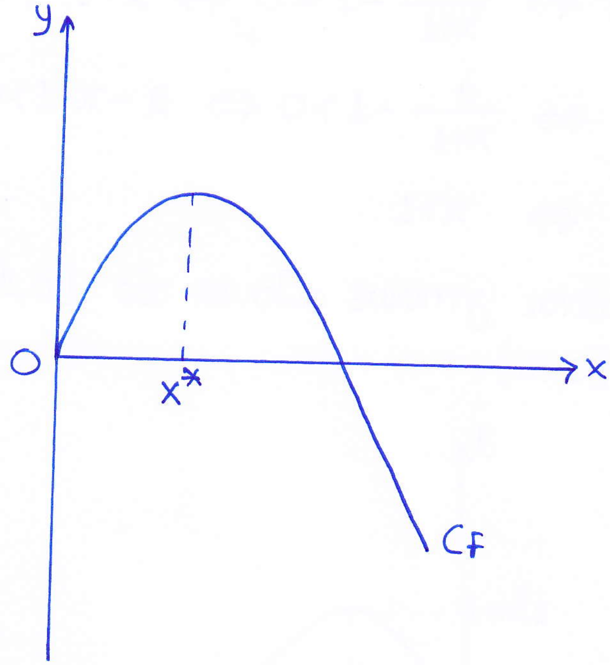
$f''(x)=\left(apx^{a-1}-\beta wx^{\beta-1}\right)'=a(a-1)x^{a-2}-\beta(\beta-1)wx^{\beta-2}\leq 0, \forall x\geq 0$

οπότε η f είναι κοίλη

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow apx^{a-1}-w\beta x^{\beta-1}=0 \Leftrightarrow x^{a-1}\left(ap-w\beta x^{\beta-a}\right)=0 \Leftrightarrow$
  $x=0$ ή $ap-w\beta x^{\beta-a}=0 \Leftrightarrow x^{*}=\left(\frac{ap}{w\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-a}}>0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^{a-1}\left(ap-w\beta x^{\beta-a}\right)>0 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} ap-w\beta x^{\beta-a}>0 \Leftrightarrow$
  $0\leq x<\left(\frac{ap}{w\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-a}}$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>\left(\frac{ap}{w\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-a}}$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\left(\frac{ap}{w\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-a}}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\left(\frac{ap}{w\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-a}},+\infty\right)$.

Γράφημα:



- $f(x) = p\ln(x+1) - wx$, $x \geq 0$, $p>0, w>0$

$$f'(x) = \left(p\ln(x+1) - wx\right)' = \frac{p}{x+1} - w, \quad x \geq 0$$

$$f''(x) = \left(\frac{p}{x+1} - w\right)' = -\frac{p}{(x+1)^2} < 0, \quad \forall x \geq 0$$

οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{x+1} - w = 0 \Leftrightarrow p - wx - w = 0 \Leftrightarrow$

$wx = p - w \Leftrightarrow x^* = \frac{p-w}{w} \geq 0$, εάν $p \geq w$, διαφορετικά απορρίπτεται

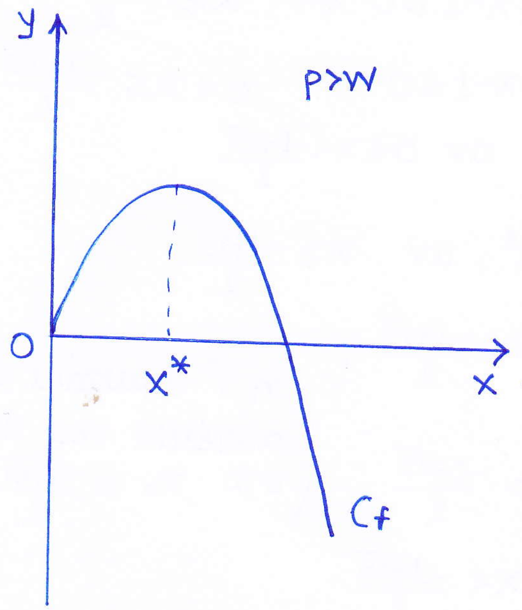
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{p}{x+1} - w > 0 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} p - wx - w > 0 \Leftrightarrow$

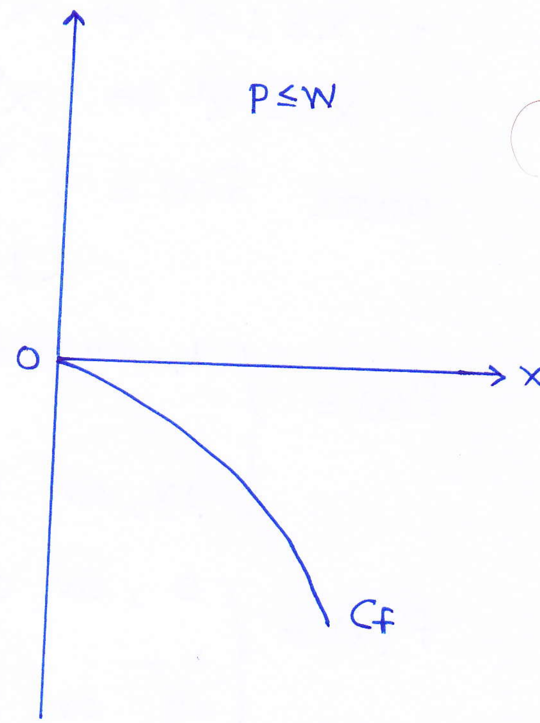
$wx < p - w \Leftrightarrow 0 \leq x^* < \frac{p-w}{w}$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^* > \frac{p-w}{w}$

Αν $p > w$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{p-w}{w}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{p-w}{w}, +\infty\right)$, ενώ εάν $p \leq w$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Γράφημα:





- $f(x) = 1-x-x^2-x^3, \ x\geq 0$

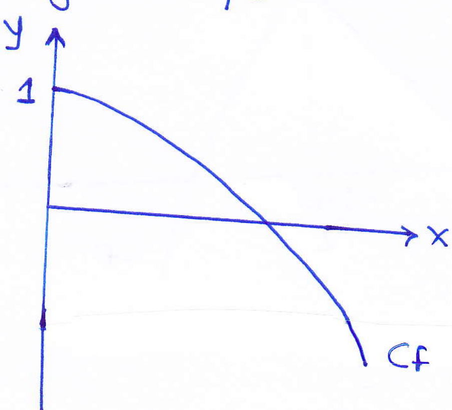
  $f'(x) = (1-x-x^2-x^3)' = -1-2x-3x^2, \ x\geq 0$

  $f''(x) = (-1-2x-3x)' = -2-3x<0, \ \forall x\geq 0$

  οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

  - $f'(x)=0 \Leftrightarrow -1-2x-3x^2=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x+1=0$, αδύνατη αφού $\Delta=-8<0$
  - $f'(x)<0, \ \forall x\geq 0$

    οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$
  - Γράφημα:



- $f(x) = \min\{x, 1-x^2\}, \; x \geq 0$

- $x \geq 1-x^2 \Leftrightarrow x^2+x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- $x \leq 1-x^2 \Leftrightarrow x^2+x-1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

οπότε $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1-x^2, & \text{αν } x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

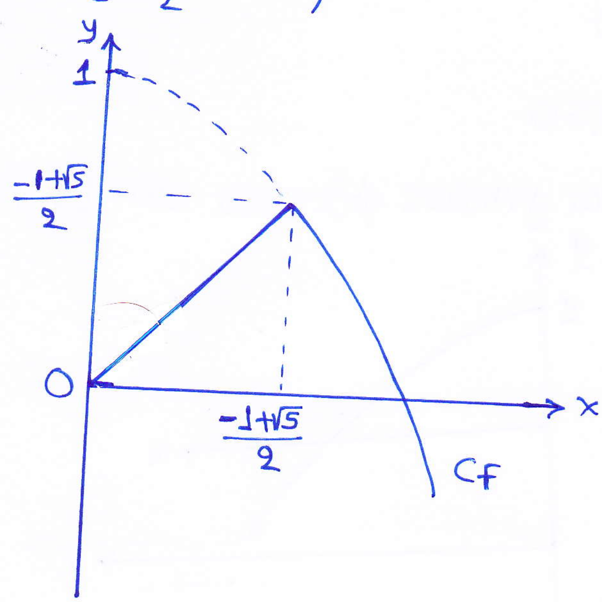
$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -2x, & \text{αν } x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (η f παρουσιάζει βηματική ασυνέχεια της παραγώγου στο $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$)

$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -2, & \text{αν } x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

άρα $f''(x) \leq 0, \; \forall x \in \left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

- Γράφημα:



Άσκηση 3η: Να μελετηθεί η μονοτονία και η κυρτότητα και να γίνουν τα γραφήματα, των συναρτήσεων:

Λύση:

▸ $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = \left(x^3 - 2x^2 + x + 1\right)' = 3x^2 - 4x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

• $f''(x) = \left(3x^2 - 4x + 1\right)' = 6x - 4,\ x \in \mathbb{R}$

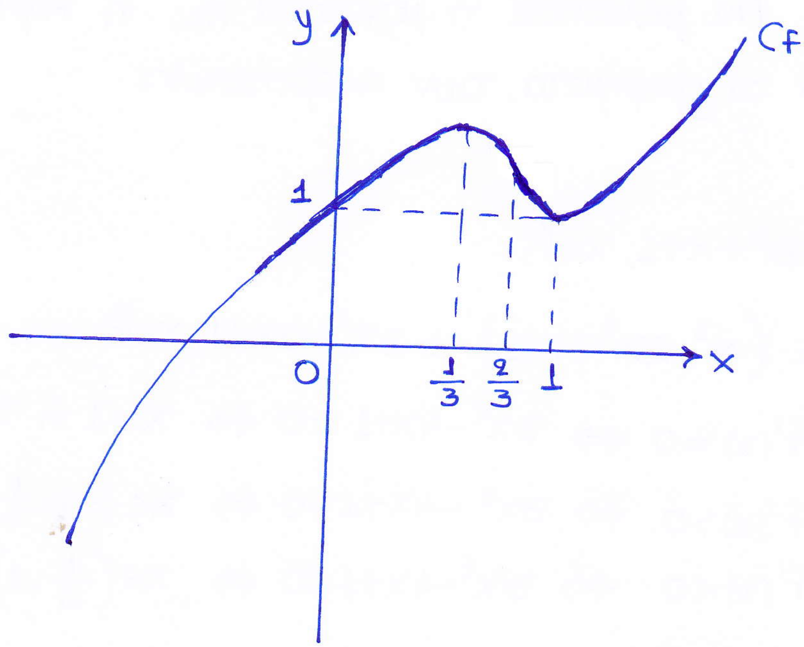
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	
			Σ.Κ.		

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$, οπότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.



▸ $f(x) = -x^3 - 2x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = \left(-x^3 - 2x^2 - x + 1\right)' = -3x^2 - 4x - 1,\ x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	T.E.	↗	T.M.	↘	

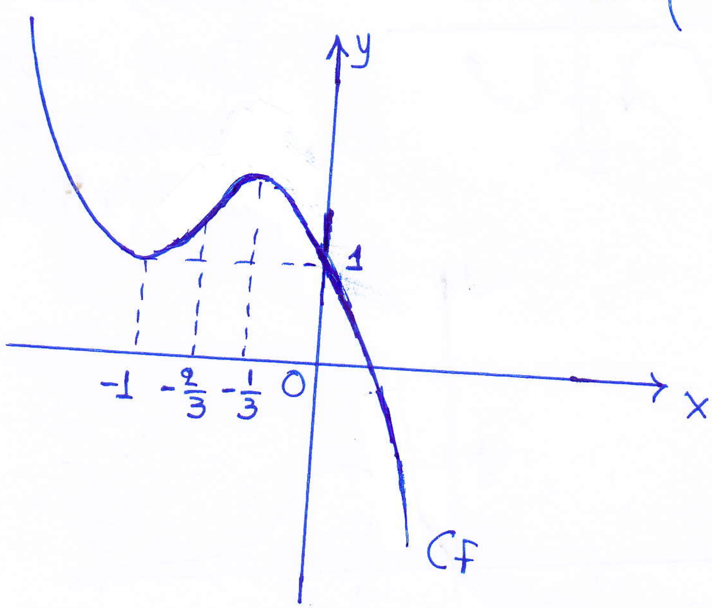
Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$.

- $f''(x) = \left(-3x^2 - 4x - 1\right)' = -6x - 4,\ x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -6x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow -6x - 4 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -\frac{2}{3}]$ και κοίλη στο $[-\frac{2}{3}, +\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $\left(-\frac{2}{3}, f\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.



▲ $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

• $f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \overset{e^{-x}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) > 0 \overset{e^{-x}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x < 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

• $f''(x) = \left(e^{-x}(1-x)\right)' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(2-x) = e^{-x}(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$

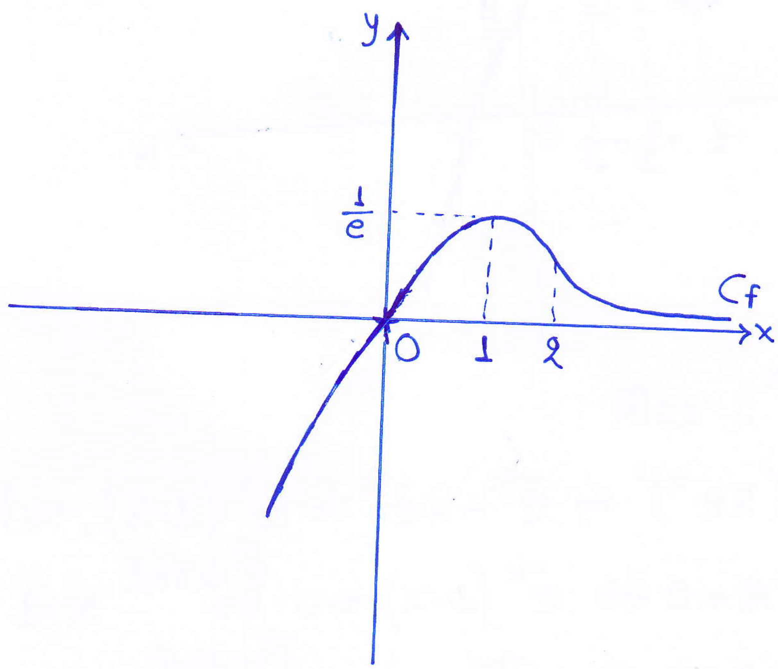
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)=0 \overset{e^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x=2$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)>0 \overset{e^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x>2$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(2, f(2))$.



▸ $f(x)=x^2e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(x^2e^{-x}\right)'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2),\ x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x-x^2)=0 \overset{e^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x=0 \text{ ή } x=2$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x-x^2)>0 \overset{e^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x\in(0,2)$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x-x^2)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

- $f''(x) = \left(e^{-x}(2x - x^2)\right)' = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) =$

$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

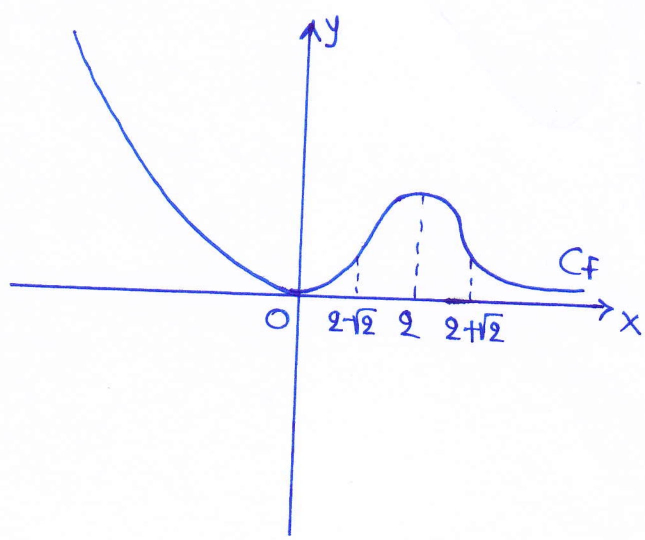
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$ ή $x = 2 - \sqrt{2}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 2 - \sqrt{2}]$ και $[2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και κοίλη στο $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$.



- $f(x) = x\ln x, \quad x \in (0,+\infty)$

  - $f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1, \quad x > 0$

    $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

    $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

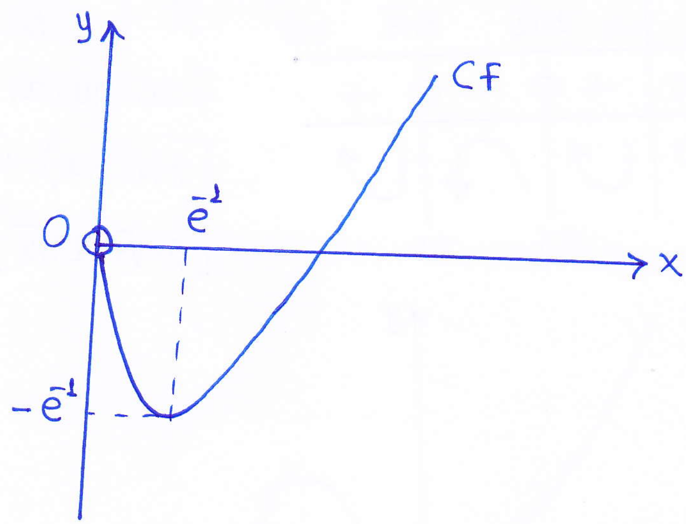
    $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$

x	$-\infty$	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\Vert$	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-1}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e^{-1},+\infty)$.

- $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0, \quad \forall x > 0$

οπότε η f είναι γνήσια κυρτή στο $(0,+\infty)$.



Άσκηση 4η: Να βρεθεί η γραμμική και η παραβολική προσέγγιση των παρακάτω συναρτήσεων:

Λύση:

- Γραμμική προσέγγιση της f στο $x_0 \in D_f$:
  $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Παραβολική προσέγγιση της f στο $x_0 \in D_f$:
  $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$

ⓐ ▸ $f(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R} \quad x_0 = 0$

- $f(0) = e^{0} = 1$
- $f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

  $f'(0) = -e^{0} = -1$
- $f''(x) = (-e^{-x})' = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

  $f''(0) = 1$

Γραμμική προσέγγιση: $f(x) \approx 1 - (x - 0) = 1 - x$

Παραβολική προσέγγιση: $f(x) \approx 1 - (x-0) + \frac{1}{2}(x-0)^2 =$

$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2$

▸ $f(x) = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}, \; x_0 = 0$

- $f(0) = 1$
- $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2}, x \neq 1$

  $f'(0) = 1$
- $f''(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^4}\left((1-x)^2\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}, x \neq 1$

  $f''(0) = 2$

Γραμμική προσέγγιση: $f(x) \approx 1 + (x - 0) = x + 1$

Παραβολική προσέγγιση: $f(x) \approx 1 + (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 2 (x-0)^2 =$

$= 1 + x + x^2$

▸ $f(x) = (1-x)^a, \; x \in \mathbb{R} \;, \; x_0 = 0$

- $f(0) = 1$
- $f'(x) = a(1-x)^{a-1} \cdot (1-x)' = -a(1-x)^{a-1}, x \in \mathbb{R}$

  $f'(0) = -a$
- $f''(x) = \left(-a(1-x)^{a-1}\right)' = -a(a-1)(1-x)^{a-2}(1-x)' = a(a-1)(1-x)^{a-2}$

  $f''(0) = a(a-1)$

Γραμμικη προσέγγιση : $f(x) \approx 1 - a(x-0) = 1 - ax$

Παραβολικη προσέγγιση: $f(x) \approx 1 - a(x-0) + \frac{1}{2} a(a-1)(x-0)^2 =$

$$= 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2$$

▸ $f(x) = \tan x \;, \; x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\} \;, \; x_0 = 0$

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

  $f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$
- $f''(x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^4 x}$

  $f''(0) = 0$

Γραμμική προσέγγιση: $f(x) \approx 0 + (x-0) = x$

Παραβολικη προσέγγιση: $f(x) \approx 0 + (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \, (x-0)^2 = x$

(β)

- $f(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)\ ,\ x_0=1$
  - $f(1)=0$
  - $f'(x)=\frac{1}{x},\ x>0$

    $f'(1)=1$
  - $f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ x>0$

    $f''(1)=-1$

  Γραμμική προσέγγιση: $f(x)\approx x-1$

  Παραβολική προσέγγιση: $f(x)\approx x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2$

- $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ x\in[0,+\infty)\ ,\ x_0=1$
  - $f(1)=1$
  - $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-1/2},\ x>0$

    $f'(1)=\frac{1}{2}$
  - $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}\ ,\ x>0$

    $f''(1)=-\frac{1}{4}$

  Γραμμική προσέγγιση: $f(x)\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$

  Παραβολική προσέγγιση: $f(x)\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$

- $f(x)=x^a,\ x\in\mathbb{R}\ ,\ x_0=1$
  - $f(1)=1$
  - $f'(x)=ax^{a-1},\ x\in\mathbb{R}$

    $f'(1)=a$
  - $f''(x)=(ax^{a-1})'=a(a-1)x^{a-2},\ x\in\mathbb{R}$

    $f''(1)=a(a-1)$

Γραμμική προσέγγιση: $f(x) \approx 1 + a(x-1)$

Παραβολική προσέγγιση: $f(x) \approx 1 + a(x-1) + \frac{a(a-1)}{2}(x-1)^2$

Άσκηση $5^{η}$: Να διαπιστωθεί ότι το άθροισμα κυρτών (κοίλων) συναρτήσεων, και ότι το θετικό πολλαπλάσιο κυρτής (κοίλης) είναι κυρτή (κοίλη). Να γίνει εφαρμογή στις παραπάνω ασκήσεις $\{1,2\}$.

Λύση:

- Έστω f, g κυρτές συναρτήσεις τότε ισχύει:

$$f''(x) \geq 0, \quad g''(x) \geq 0, \quad x \in \Delta$$

Έχουμε $(f+g)'(x) = \left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x), \; x \in \Delta$

$$(f+g)''(x) = \left(f'(x)+g'(x)\right)' = f''(x)+g''(x) \geq 0, \; x \in \Delta$$

οπότε η $f+g$ είναι κυρτή

- Έστω f, g κοίλες συναρτήσεις τότε ισχύει:

$$f''(x) \leq 0, \quad g''(x) \leq 0, \quad x \in \Delta$$

Έχουμε $(f+g)'(x) = \left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x), \; x \in \Delta$

$$(f+g)''(x) = \left(f'(x)+g'(x)\right)' = f''(x)+g''(x) \leq 0, \; x \in \Delta$$

οπότε η $f+g$ είναι κοίλη

- Έστω $h(x) = c f(x)$, $c > 0$ f κυρτή στο Δ

$$h'(x) = \left(c f(x)\right)' = c f'(x)$$

$$h''(x) = \left(c f'(x)\right)' = c f''(x) \geq 0, \; x \in \Delta$$

οπότε η h είναι κυρτή. Ομοίως, αν η f είναι κοίλη

- $f(x) = 1 + x^2 - 2x,\ x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \text{ γνήσια κυρτή} \\ 1-2x \text{ γραμμική} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f \text{ γνήσια κυρτή}$$

- $f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x},\ x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x} \text{ γνήσια κοίλη τότε } -2\sqrt{x} \text{ γνήσια κυρτή} \\ 1+x \text{ γραμμική} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f \text{ γν. κυρτή}$$

- $f(x) = 1 + x - \ln(x+1),\ x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \ln(x+1) \text{ γνήσια κοίλη τότε } -\ln(x+1) \text{ γν. κυρτή} \\ 1+x \text{ γραμμική} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f \text{ γν. κυρτή}$$

- $f(x) = x^{2/3} - 2x,\ x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^{2/3} \text{ γνήσια κοίλη} \\ -2x \text{ γραμμική} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f \text{ γν. κοίλη}$$

- $f(x) = \ln(x+1) - 2x,\ x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \ln(x+1) \text{ γνήσια κοίλη} \\ -2x \text{ γραμμική} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f \text{ γν. κοίλη}$$

- $f(x) = px^{a} - wx^{\beta}$, $p>0,\ w>0,\ 0<a<1,\ \beta \geq 1,\ x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^{a} \text{ γν. κοίλη τότε } px^{a} \text{ γν. κοίλη} \\ x^{\beta} \text{ γν. κυρτή τότε } -wx^{\beta} \text{ γν. κοίλη} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f \text{ γν. κοίλη}$$

Άσκηση 6η: (α) Να βρεθεί ο παρακάτω τύπος για την αλυσωτή 2η παράγωγο:

$$\left\{ y=y(x) \text{ και } x=x(t) \right\} \Rightarrow y=y(t) \text{ με}$$

$$y''(t) = y''(x)\,(x'(t))^2 + y'(x)\cdot x''(t)$$

Να επαληθευτεί για τις συναρτήσεις: $y=\ln x$, $x=t^2$.

(β) Να διαπιστωθεί ότι η σύνθεση αύξουσας κυρτής με κυρτή είναι κυρτή, και η σύνθεση αύξουσας κοίλης με κοίλη είναι κοίλη.

Να εφαρμοστεί στις συναρτήσεις:

$$e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma} \text{ με } \alpha>0,\ (1+x^2)^2,\ \ln(\alpha x+\beta), \sqrt{\ln x}, \sqrt{\alpha x+\beta}, \ln(\alpha x+\beta)$$

Τι θα ισχύει αν αντί "αύξουσας" έχουμε "φθίνουσας";

Λύση:

(α) Έχουμε $y=y(x)$ και $x=x(t)$ τότε $y(t)=y(x(t))$

- $\frac{dy}{dt} = y'(t) = y'(x(t))\cdot x'(t)$

- $\frac{d^2y}{dt^2} = y''(t) = \left(y'(x(t))\cdot x'(t)\right)' =$

$$= \left(y'(x(t))\right)'\cdot x'(t) + y'(x(t))\cdot x''(t) =$$

$$= y''(x(t))\cdot x'(t)\cdot x'(t) + y'(x(t))\cdot x''(t) =$$

$$= y''(x)\cdot (x'(t))^2 + y'(x)\cdot x''(t) \quad (1)$$

- Έχουμε $y=\ln x$ και $x=t^2$ τότε

$y(t) = y(x(t)) = y(t^2) = \ln t^2$

$y'(t) = \frac{1}{t^2}\cdot(t^2)' = \frac{2}{t}$ και $y''(t) = -\frac{2}{t^2}$

Επαλήθευση: Είναι $y=\ln x$, $x=t^2$

$y'(x)=\frac{1}{x}$, $y''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x'(t)=2t$, $x''(t)=2$

τότε από την (1) έχουμε:

$$y''(t)=-\frac{1}{x^2}\cdot(2t)^2+\frac{1}{x}\cdot 2=-\frac{1}{t^4}\cdot 4t^2+\frac{2}{t^2}=$$

$$=-\frac{4}{t^2}+\frac{2}{t^2}=-\frac{2}{t^2}$$

β) • $y''(t)=y''(x)\left(x'(t)\right)^2+y'(x)\cdot x''(t)$

Επειδή y αύξουσα τότε $y'\geq 0$

y κυρτή τότε $y''\geq 0$

x κυρτή τότε $x''\geq 0$

$\Rightarrow y''(t)\geq 0$, οπότε η σύνθεση αύξουσας κυρτής με κυρτή είναι κυρτή

• $y''(t)=y''(x)\left(x'(t)\right)^2+y'(x)\cdot x''(t)$

Επειδή y αύξουσα τότε $y'\geq 0$

y κοίλη τότε $y''\leq 0$

x κοίλη τότε $x''\leq 0$

$\Rightarrow y''(t)\leq 0$, οπότε η σύνθεση αύξουσας κοίλης με κοίλη είναι κοίλη.

► $y(x)=e^x$, $x(t)=at^2+\beta t+\gamma$, με $a>0$ τότε

$y(t)=y(x(t))=e^{at^2+\beta t+\gamma}$, $a>0$

• η y είναι αύξουσα και κυρτή

• η x είναι κυρτή

$\Rightarrow y(t)=y(x(t))$ είναι κυρτή

▸ $y(x)=x^2$, $x(t)=1+t^2$ τότε

$y(t)=y(x(t))=(1+t^2)^2,\ t\geq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{η } y \text{ είναι αύξουσα και κυρτή}\\ \bullet\ \text{η } x \text{ είναι κυρτή}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y(t)=y(x(t)) \\ \text{είναι κυρτή}\end{array}$$

▸ $y(x)=\ln x$ και $x(t)=\alpha t+\beta$ τότε

$y(t)=y(x(t))=\ln(\alpha t+\beta)$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{η } y \text{ είναι αύξουσα και κοίλη}\\ \bullet\ \text{η } x \text{ είναι κοίλη (ως γραμμική)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y(t)=y(x(t)) \\ \text{είναι κοίλη}\end{array}$$

▸ $y(x)=\sqrt{x}$, $x(t)=\ln t$ τότε

$y(t)=y(x(t))=\sqrt{\ln t}$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{η } y \text{ είναι αύξουσα και κοίλη}\\ \bullet\ \text{η } x \text{ είναι κοίλη}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y(t)=y(x(t)) \\ \text{είναι κοίλη}\end{array}$$

▸ $y(x)=\sqrt{x}$, $x(t)=\alpha t+\beta$ τότε

$y(t)=y(x(t))=\sqrt{\alpha t+\beta}$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{η } y \text{ είναι αύξουσα και κοίλη}\\ \bullet\ \text{η } x \text{ είναι κοίλη (ως γραμμική)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y(t)=y(x(t)) \\ \text{είναι κοίλη}\end{array}$$

▸ $y(x)=\ln x$ και $x(t)=at+\beta$ τότε

$y(t)=y(x(t))=\ln(at+\beta)$

- η y είναι αύξουσα και κοίλη
- η x είναι κοίλη (ως γραμμική)

$\Big\} \Rightarrow y(t)=y(x(t))$ είναι κοίλη

Άσκηση 7η: ⓐ Να βρεθεί ο παρακάτω τύπος για την 2η παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης:

$$y=y(x) \Rightarrow x=x(y) \text{ με } x''(y)=-\frac{y''(x)}{(y'(x))^3}$$

Να επαληθευτεί για τις αντίστροφες των συναρτήσεων:

$$y=\ln x, \quad y=\sqrt{x}$$

ⓑ Να διαπιστωθεί ότι η αντίστροφη κυρτής συνάρτησης είναι κοίλη αν είναι αύξουσα, κυρτή αν είναι φθίνουσα. Αντίστοιχα για την αντίστροφη κοίλης. Να εφαρμοστεί στις συναρτήσεις:

$$e^x, \sqrt{x}, e^{-x}, x^{-2}$$

Λύση:

ⓐ Έχουμε $\dfrac{dx}{dy}=x'(y)=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{y'(x)}$ (1)

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\left(\frac{1}{y'(x)}\right)'=-\frac{(y'(x))'}{(y'(x))^2}=-\frac{y''(x)\cdot x'(y)}{(y'(x))^2}\overset{(1)}{=}$$

$$=-\frac{y''(x)}{(y'(x))^3} \quad (2)$$

- Έχουμε $y=\ln x \Rightarrow x=e^y$ τότε $x''(y)=e^y$
- Επαλήθευση: $x''(y)\overset{(2)}{=}-\dfrac{(\ln x)''}{[(\ln x)']^3}=-\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}}=x=e^y$

(β)

▸ • $x''(y) = -\dfrac{y''(x)}{(y'(x))^3}$

• η y είναι γν. αύξουσα $y'>0$

• η y είναι κυρτή $y''\geq 0$

$\Rightarrow$ $x''(y) \leq 0$ τότε η αντίστροφη αύξουσας κυρτής συνάρτησης είναι κυρτή

▸ • $x''(y) = -\dfrac{y''(x)}{(y'(x))^3}$

• η y είναι γν. φθίνουσα $y'<0$

• η y είναι κυρτή $y''\geq 0$

$\Rightarrow$ $x''(y)\leq 0$ τότε η αντίστροφη φθίνουσας κυρτής συνάρτησης είναι κυρτή.

▸ $y(x) = e^x$

Αφού η y αύξουσα και κυρτή τότε η $x(y)$ είναι κοίλη.

▸ $y(x) = \sqrt{x}$

Αφού η y αύξουσα και κοίλη τότε η $x(y)$ είναι κυρτή

▸ $y(x) = e^{-x}$

Αφού η y είναι φθίνουσα και κυρτή τότε η $x(y)$ είναι κυρτή.

▸ $y(x) = x^{-2}$

Αφού η y είναι φθίνουσα και κυρτή τότε η $x(y)$ είναι κυρτή.